

特別研究報告書

ATM 網における CBR MPEG デコーダの パラメタ設定に関する考察

指導教官

福島 雅夫 教授

滝根 哲哉 助教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成 8 年度入学

槌山 志郎

平成 12 年 2 月 15 日提出

摘要

CBR MPEG などの一定速度で符合化される画像情報が、ATM 網を通じて伝送される場合について考察する。ATM において、画像情報はセルという小さな伝送単位に分割され、一定量、一定間隔で送信される。ところが、セルが ATM 網を通過する際に、他のトラヒックの干渉を受けるため、受信側ではその規則性は保たれていない。セルが受信側のデコーダのバッファへ不規則に到着した場合、バッファの容量は限られているため、セル損やバッファ内セルの枯渇といった障害が生じることにより、画像が乱れるおそれがある。

こうした障害を回避するために次のような工夫がされている。まず、デコーダにおいて復号を開始するのはバッファに決められた量(基準量)のセルが蓄積されてからとする。その後バッファ内セル量が、予め定められた上限量(下限量)を上回る(下回る)間は、セル損(バッファ内セルの枯渇)を発生させないために、復号速度を上げる(下げる)という方法である。しかし現行のデコーダは、セルの基準量および上下限量といったパラメタが予め様に作り込まれており、制御可能な形で提供されていない。異なる状況で利用されるデコーダには、本来それぞれにとって望ましいパラメタが存在しているはずである。そこで本研究では、パラメタが制御可能であるという仮定の下で、それぞれのデコーダに対して利用状況に応じた適切なパラメタを与える方法について考察を行った。

画像情報を含めて全てのトラヒックは、通信網に送出される際は送出量と送出間隔に関して制御を受ける。また本研究において、網内の交換機ではセル損が発生せず、全てのセルが必ずデコーダへ到着することを仮定した上で議論を進める。そのとき網内の交換機は全て安定で、その容量を上回るトラヒックがそこへ送出されることはない。これらの条件を満たすものの中で、画像情報に最も重大な影響を与える場合を考えることで、バッファ内セル量が最大および最小になる場合を知ることが可能になる。これによって、障害を回避するための条件と、それが満たされたとき、出力速度を加減しなければならない期間を最小限度にとどめるようなパラメタを求める方法を得ることができた。

最後にシミュレーション実験を行い、こうした装置が障害を回避するために果たす効果について考察を行った。その結果、復号開始までにバッファに蓄積されるセルの基準量を適切に設定することが、障害を回避する上で非常に大きな働きをすることが確認された。一方、復号速度の加減については、加減の度合いを実用的に許される小さなもので行わなければならないため、その効果も小さいことが明らかになった。

目次

1 序論	1
2 Envelope Process と Envelope Rate	2
2.1 Upper Envelope Process と Upper Envelope Rate	2
2.2 Lower Envelope Process と Lower Envelope Rate	3
2.3 セルの到着過程ならびに離脱過程と Envelope Process	3
3 ATM 網 のモデルと MUEP ならびに MLEP の変化	4
3.1 ATM 網を通過する情報のクラスとネットワークモデル	4
3.2 網内での MUEP ならびに MLEP の変化	5
3.2.1 queue 1 において	7
3.2.2 queue k において ($k = 2, 3, \dots, N$)	7
4 デコーダモデルとバッファ内セル量の変化幅	8
4.1 デコーダモデル	8
4.2 バッファ内セル量の変化幅	9
4.2.1 バッファ内セル量の基準量 T からみた増加幅	9
4.2.2 バッファ内セル量の基準量 T からみた減少幅	10
5 デコーダのパラメタ設定法	11
6 シミュレーション実験	14
6.1 $N = 2$ のとき	14
6.2 $N = 3$ のとき	18
7 結論	20
A 補題 2.3 の証明	i
B 補題 2.4 の証明	i
C 定理 2.2 の証明	ii
D 命題 1 の証明	iii
E 命題 2 の証明	iii

1 序論

広帯域通信網の基本技術である ATM (Asynchronous Transfer Mode) では、伝送される情報はセルと呼ばれる 53 バイト (内、ペイロード 48 バイト) の伝送単位に分割された後、ATM 網へ送出される。網内では、特別なフラグが立てられていない限り、セルは全て平等に扱われ、各交換機で FIFO (First-In First-Out) に従い転送され、受信側へと到達する [1]。

本研究では、ATM 網における CBR (Constant Bit Rate) MPEG の伝送を円滑に行うためのデコーダのパラメタ設定に関する考察を行う。対象となるシステムでは、伝送される動画情報は一定の時間間隔毎に固定長のパケットとしてエンコーダに送られる。エンコーダでは、受けとったパケットをセルに分割して ATM 網へ送出する。網内を通過したセルが受信側のデコーダに到着すると、デコーダは受けとったセルをパケットに再構築し、表示装置へと送出する (図 1)。

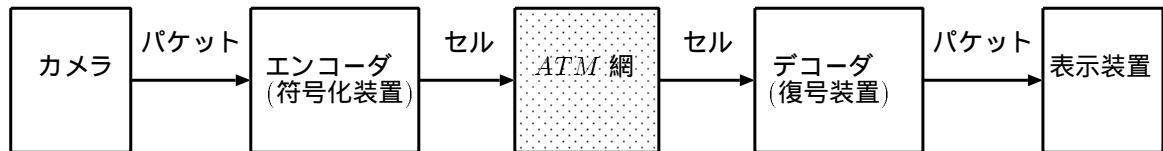


図 1: 画像の伝送過程

受信側において、セルが常に適切な間隔で届くのであれば、届いたものを次々と動画として表示装置へ送出すればよいのでなんら問題は起こらない。ところが ATM 網へ送出されたセルは、複数の使用者によって共有されている網内の交換機を通過する際に遅延を被る。その結果、受信側におけるセルの到着過程は送信時のような一定量、一定間隔といった規則性が保たれていない。

受信側におけるセルの到着過程が不規則な場合、次のようなことが起きると考えられる。まず、セルの到着間隔が短くなり、大量のセルが短期間に到着すると、デコーダにおいてバッファ溢れ (セル損) が発生し、画像に乱れが生じる。また、セルの到着間隔が広がった結果、セルの到着が少ない状態が長期間に渡り継続すると、表示装置に送出する情報がなくなり、画像が途切れてしまう。

そこで、デコーダに対して次のような工夫がされている。まず、動画の伝送が開始された後、暫くの間は、受信側にセルが届いても、基準となる量のセルがバッファに蓄積されるまで動画の再生を行わない。そして基準量のセルが蓄積された時点で、画像を適切な速度 (基準速度) で復号し、表示装置への送出を開始する。送出開始後、バッファ内のセル量が増えて、予め定められた上限量を上回ったときは、セル損を防ぐために、バッファ内のセルが上限量を下回るまで復号の速度を基準速度より上げる。またバッファに蓄えたセルが減少し、予め定められた下限量を下回ったときは、バッファが空になるのを防ぐために、バッファ内のセルが下限量を上回るまで復号速度を基準速度より下げる。こうした措置により、セル損やバッファ内セルの枯渇といった障害を

回避しようとしている [3] .

しかし現行のデコーダ装置は，セルの基準量および上下限量などのパラメタが予め一様に作り込まれており、制御可能な形で提供されていない。異なる状況で利用されるデコーダには，本来それぞれにとって望ましいパラメタが存在しているはずである。つまりパラメタが制御可能であるという仮定の下では，それを適切に設定することにより，障害が回避可能となったり，出力速度の加減による画質劣化の期間をより短くすることができるようになる場合があると考えられる。

本研究では、バッファ容量ならびに表示装置への送出速度（復号速度），および利用状況が与えられたとき、セル損ならびにバッファ内セルの枯渇を発生させることがなく，さらに復号速度の加減による画質劣化の期間を最小限にとどめるような，デコーダにおけるセルの基準量、上下限量を決定するアルゴリズムを考察した上で，この装置がもたらす効果について確認を行う。

2 Envelope Process と Envelope Rate

2.1 Upper Envelope Process と Upper Envelope Rate

非負の数列 $\{a(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$ について $A(s, s+t) = \sum_{k=s}^{s+t-1} a(k)$ とする。 N を自然数として $W = \{(a, b) \in N \times N \mid a \leq b\}$ を定義したとき，

$$A(t_1, t_2) \leq \hat{A}(t_2 - t_1), \quad \forall (t_1, t_2) \in W$$

を $\hat{A}(t)$ を $a(t)$ の Upper Envelope Process と呼ぶ。

Upper Envelope Process について補題 2.1 が成り立つ [2] .

補題 2.1 $\hat{A}(t)$ が与えられたとき，非減少で劣加法的な新しい Upper Envelope Process を $\hat{A}(t)$ から得ることができる。ここで $\hat{A}(t)$ が劣加法的とは，任意の正数 t_1, t_2 に対して $\hat{A}(t)$ が $\hat{A}(t_1 + t_2) \leq \hat{A}(t_1) + \hat{A}(t_2)$ を満たすことである。

補題 2.1 により， $\hat{A}(t)$ が非減少で劣加法的であると仮定できる。また補題 2.2 が成り立つことが知られている [2] .

補題 2.2 $\hat{A}(t)$ が劣加法的なとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{A}(t)}{t} = \inf_{t \geq 1} \frac{\hat{A}(t)}{t} \equiv \hat{a}$ となる。

\hat{a} を $\hat{A}(t)$ の Envelope Rate とよぶ。ところで Upper Envelope Process は複数存在するので最小のものが存在すると考えられる。つまり任意の t と Upper Envelope Process に対して $\bar{A}(t) \leq \hat{A}(t)$ を満たす $\bar{A}(t)$ が存在する。明らかに $\bar{A}(t)$ は

$$\bar{A}(t) = \sup_{s \geq 0} A(s, s+t)$$

である。これから $\bar{A}(t)$ のことを $a(t)$ の MUEP (Minimum Upper Envelope Process) とし，それに対する Envelope Rate \bar{a} を MUER (Minimum Upper Envelope Rate) とする。 $\bar{A}(t)$ は非減少で劣加法的である。

2.2 Lower Envelope Process と Lower Envelope Rate

$$\tilde{A}(t_2 - t_1) \leq A(t_1, t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in W$$

を満たすような $\tilde{A}(t)$ を $a(t)$ の Lower Envelope Process として定義したとき補題 2.3 が成り立つ (証明は付録 A に与える) .

補題 2.3 $\tilde{A}(t)$ が与えられたとき, 非減少で優加法的な新しい Lower Envelope Process $\tilde{A}'(t)$ を $\tilde{A}(t)$ から得ることができる. ここで $\tilde{A}(t)$ が優加法的とは, 任意の正数 t_1, t_2 に対して $\tilde{A}(t)$ が $\tilde{A}(t_1 + t_2) \geq \tilde{A}(t_1) + \tilde{A}(t_2)$ を満たすことである .

補題 2.3 により, $\tilde{A}(t)$ が非減少で優加法的であると仮定できる. ここで補題 2.4 が成り立つ (証明は付録 B に与える) .

補題 2.4 $\tilde{A}(t)$ が優加法的なとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{A}(t)}{t} = \sup_{t \geq 1} \frac{\tilde{A}(t)}{t} \equiv \tilde{a}$ となる .

\tilde{a} を $\tilde{A}(t)$ の Envelope Rate とよぶ . ところで Lower Envelope Process は複数存在するので最大のもが存在すると考えられる . つまり任意の t と Lower Envelope Process に対して $\underline{A}(t) \geq \tilde{A}(t)$ を満たす $\underline{A}(t)$ が存在する . 明らかに $\underline{A}(t)$ は

$$\underline{A}(t) = \inf_{s \geq 0} A(s, s + t)$$

である . $\underline{A}(t)$ のことを $a(t)$ の MLEP (Maximum Lower Envelope Process) とし, それに対する Envelope Rate \underline{a} を MLER (Maximum Lower Envelope Rate) とする . $\underline{A}(t)$ は非減少で優加法的である .

2.3 セルの到着過程ならびに離脱過程と Envelope Process

今後は Envelope Process, 特に MUEP と MLEP をセルがデコーダまたは ATM 網内の交換機に到着するときの到着過程や, エンコーダまたは交換機から離脱するときの離脱過程に対し適用していく .

$a(t)$ を時刻 t に, あるシステムに到着 (離脱) するセル数としたとき, その MUEP と MLEP は

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= \sup_{s \geq 0} A(s, s + t) = \sup_{s \geq 0} \sum_{k=s}^{s+t-1} a(k) \\ \underline{A}(t) &= \inf_{s \geq 0} A(s, s + t) = \inf_{s \geq 0} \sum_{k=s}^{s+t-1} a(k) \end{aligned}$$

である . それぞれ t 期間にそのシステムに到着 (離脱) する最大セル数と最小セル数をあらわしている . ここで以下の定理が成り立つ [2] .

定理 2.1 $\bar{a} < c_u$ のとき $d_u = \inf\{t \geq 1 : \bar{A}(t) - c_u t \leq 0\} < \infty$ が存在する .

つまり , d_u 期間にシステムに到着するセル数は多くても $\bar{A}(d_u)$ であることから , $\bar{a} < c_u$ を満たす速度 c_u でセルが処理されたとき , 時刻 0 でシステム内セル量が u であればセル量が増加しても時刻 d_u までには必ず一度はセル量が u に戻る .

また , 次の定理も成り立つ (証明は付録 C に与える) .

定理 2.2 $\underline{a} > c_l$ のとき $d_l = \inf\{t \geq 1 : \underline{A}(t) - c_l t \geq 0\} < \infty$ が存在する .

つまり , d_l 期間にシステムに到着するセル数は少なくとも $\underline{A}(d_l)$ であることから , $\underline{a} > c_l$ を満たす速度 c_l でセルが処理されたとき , 時刻 0 でシステム内セル量が十分大きな量 l であればセル量が減少しても時刻 d_l までには必ず一度はセル量が l に戻る .

3 ATM 網 のモデルと MUEP ならびに MLEP の変化

1 章でも述べたように , エンコーダから送り出される画像情報 (セル) は , デコーダに到着するまでに複数の使用者により共有される ATM 網を通過する . 網内で画像情報は他のトラヒックによる干渉を受けるため , デコーダ到着時における到着過程の MUEP, MLEP はエンコーダ離脱時における離脱過程の MUEP, MLEP とは異なったものとなる .

ATM においてエンコーダ離脱時における画像情報の MUEP と MLEP は , 一定量 , 一定間隔という送出過程の性質により容易に知ることができる . また一般に , 網内に送られるトラヒックについては , 一度にそこへ送出できる情報量およびその間隔が制御されている . よって本研究で取り扱うべく , 画像情報の MUEP と MLEP に対して最も重大な影響を与えるような局面 , つまり最大 (一定) 量 , 最短 (一定) 間隔で送られている局面についてその干渉トラヒックの MUEP と MLEP を知ることができる .

本章では , エンコーダから送られた画像情報 (セル) がデコーダに到着するまでに通過する ATM 網のモデルを取り上げ , 画像情報および干渉トラヒックが網内へ送出されるとき MUEP と MLEP が明らかなきとき , 画像情報のデコーダ到着時の MUEP, MLEP を求める方法について考察する .

3.1 ATM 網を通過する情報のクラスとネットワークモデル

取り扱う ATM 網のモデルは , エンコーダとデコーダの間に queue 1 , queue 2 , \dots queue N と順に N 個の交換機が並んでおり , それぞれの交換機を複数のクラスの情報が通過するものである .

クラス (i, j) は queue i から入って queue j で出ていく情報のクラスをあらわし , サブクラス (i, j, l) は queue i から入って queue j で出ていく情報の中の l 番目の情報のクラスをあらわす ($l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$) .

ここで queue k を通過するクラスを次のような集合に分類する .

$$\begin{aligned} I_0^{(k)} &= \{(i, j) \mid i \leq k - 1, j \geq k + 1\} \\ I_1^{(k)} &= \{(i, j) \mid i = k, j \geq k\} \\ I_2^{(k)} &= \{(i, j) \mid i \leq k - 1, j \geq k\} \\ I_3^{(k)} &= \{(i, j) \mid i \leq k, j = k\} \end{aligned}$$

ここでは時間が離散化されているシステムを考える . 既に述べたように , 交換機において到着したセルは FIFO に従い処理される . また , $x = 1, 2, \dots, N$ に対して , $q^{(x)}(t), a^{(x)}(t)$, をそれぞれ時刻 t に queue x に蓄積したセル数および到着するセル数とし , $c^{(x)}$ を単位時間にその queue x で処理されるセル数としたとき , 次の式が成り立つ .

$$q^{(x)}(t + 1) = q^{(x)}(t) + a^{(x)}(t) - c^{(x)}$$

3.2 網内での MUEP ならびに MLEP の変化

以下用いる関数などを定義する .

- $\bar{A}_{(i,j,l)}(t)$: サブクラス (i, j, l) の情報が , 網外から queue i に到着するときの到着過程の MUEP .
- $\bar{A}_{(i,j)}(t)$: クラス (i, j) の情報が , 網外から queue i に到着するときの到着過程の MUEP .
 $\bar{A}_{(i,j)}(t) = \sum_{l=1}^{P(i,j)} \bar{A}_{(i,j,l)}(t)$ が成り立つ .
- $\underline{A}_{(i,j,l)}(t)$: サブクラス (i, j, l) の情報が , 網外から queue i に到着するときの到着過程の MLEP .
- $\underline{A}_{(i,j)}(t)$: クラス (i, j) の情報が , 網外から queue i に到着するときの到着過程の MLEP .
 $\underline{A}_{(i,j)}(t) = \sum_{l=1}^{P(i,j)} \underline{A}_{(i,j,l)}(t)$ が成り立つ .
- $\bar{B}_{(i,j,l)}^{(x)}(t)$: サブクラス (i, j, l) の情報が , queue x から離脱するときの離脱過程の MUEP .
- $\bar{B}_{(i,j)}^{(x)}(t)$: クラス (i, j) の情報が , queue x から離脱するときの離脱過程の MUEP . $\bar{B}_{(i,j)}^{(x)}(t) = \sum_{l=1}^{P(i,j)} \bar{B}_{(i,j,l)}^{(x)}(t)$ が成り立つ .
- $\underline{B}_{(i,j,l)}^{(x)}(t)$: サブクラス (i, j, l) の情報が , queue x から離脱するときの離脱過程の MLEP .
- $\underline{B}_{(i,j)}^{(x)}(t)$: クラス (i, j) の情報が , queue x から離脱するときの離脱過程の MLEP . $\underline{B}_{(i,j)}^{(x)}(t) = \sum_{l=1}^{P(i,j)} \underline{B}_{(i,j,l)}^{(x)}(t)$ が成り立つ .

- $\bar{A}^{(x)}(t)$: queue x に到着する全ての情報の到着過程の MUEP
- $c^{(x)}$: queue x で単位時間に処理される情報量
- $d^{(x)}$: queue x において, そこに情報がたまり始めて再び空になるまでの最大時間.
- $D^{(x)}$: queue x における最大待ち時間

本研究で注目する局面, すなわち全てのトラフィックが一定量, 一定間隔で ATM 網に送り込まれるような局面において, $\underline{A}_{(i,j,l)}(t)$, $\bar{A}_{(i,j,l)}(t)$ を求めることが可能で,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\underline{A}_{(i,j,l)}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}_{(i,j,l)}(t)}{t} < \infty$$

が成り立つことに注意する. また本研究においては, 網内ではセル損が発生せず, 全てのセルが必ずデコーダへ到着するという仮定した上で議論を進める. そのとき網内の交換機は全て安定となり, $x = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}^{(x)}(t)}{t} < c^{(x)} \quad (1)$$

が成り立つことが仮定できる.

< 交換機における MUEP, MLEP の変化を計算する手順 >

1. queue x ($x = 1, 2, \dots, N$) に到着する情報全体の MUEP $\bar{A}^{(x)}(t)$ は, そこへ到着する各情報の MUEP の和で与えられる.
2. 式 (1) が成り立つことから, 定理 2.1 により $d^{(x)}$ が有限の値で求められる.
3. 情報は交換機において FIFO に従い転送されることから, $d^{(x)}$ が有限の値で得られたとき $D^{(x)}$ も有限の値で求められる [2].
4. $D^{(x)}$ が得られたとき各情報の queue x 離脱時の MLEP が求められる.
5. $D^{(x)}$ および各情報の queue x 離脱時の MLEP が得られたとき, queue x では情報は単位時間に最大 $c^{(x)}$ しか処理されないことを考慮した上で, 各情報の queue x 離脱時の MUEP が求められる.

ここで注目している画像情報のクラスを $(1, N, 1)$ とすると, エンコーダ離脱時の画像情報の MUEP, MLEP はそれぞれ $\bar{A}_{(1,N,1)}(t)$, $\underline{A}_{(1,N,1)}(t)$ であらわされる. よって, 以下で示す計算を queue 1 から queue N まで順次行うことにより, デコーダ到着時の画像情報の MUEP, MLEP が $\bar{B}_{(1,N,1)}^{(N)}(t)$, $\underline{B}_{(1,N,1)}^{(N)}(t)$ により得られる.

3.2.1 queue 1 において

$$\bar{A}^{(1)}(t) = \sum_{(i,j) \in I_1^{(1)}} \bar{A}_{(i,j)}(t)$$

$$d^{(1)} = \inf \{ t \geq 1 \mid \bar{A}^{(1)}(t) - c^{(1)}t \leq 0 \}$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}} \cdot \max [\bar{A}^{(1)}(1), \bar{A}^{(1)}(2) - c^{(1)}, \bar{A}^{(1)}(3) - 2c^{(1)}, \dots, \bar{A}^{(1)}(d^{(1)}) - (d^{(1)} - 1)c^{(1)}]$$

1. $(i, j) \in I_1^{(1)}, \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\underline{B}_{(i,j,l)}^{(1)}(t) = \underline{A}_{(i,j,l)}(t - D^{(1)})$$

2. $(i, j) \in I_1^{(1)} - (1, 1), \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\bar{B}_{(i,j,l)}^{(1)}(t) = \min [\bar{A}_{(i,j,l)}(t + D^{(1)}), c^{(1)}t - \sum_{(m,n) \in I_1^{(1)} - \{(i,j,l)\}} \underline{A}_{(m,n)}(t - D^{(1)})]$$

3.2.2 queue k において ($k = 2, 3, \dots, N$)

$$\bar{A}^{(k)}(t) = \sum_{(i,j) \in I_1^{(k)}} \bar{A}_{(i,j)}(t) + \min [\sum_{(m,n) \in I_2^{(k)}} \bar{B}_{(i,j)}^{(k-1)}(t), c^{(k-1)}t - \sum_{(i,j) \in I_3^{(k-1)}} \underline{B}_{(i,j)}^{(k-1)}(t)]$$

$$d^{(k)} = \inf \{ t \geq 1 \mid \bar{A}^{(k)}(t) - c^{(k)}t \leq 0 \}$$

$$D^{(k)} = \frac{1}{c^{(k)}} \cdot \max [\bar{A}^{(k)}(1), \bar{A}^{(k)}(2) - c^{(k)}, \bar{A}^{(k)}(3) - 2c^{(k)}, \dots, \bar{A}^{(k)}(d^{(k)}) - (d^{(k)} - 1)c^{(k)}]$$

1. $(i, j) \in I_1^{(k)}, \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\underline{B}_{(i,j,l)}^{(k)}(t) = \underline{A}_{(i,j,l)}(t - D^{(k)})$$

2. $(i, j) \in I_2^{(k)}, \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\underline{B}_{(i,j,l)}^{(k)}(t) = \underline{B}_{(i,j,l)}^{(k-1)}(t - D^{(k)})$$

3. $(i, j) \in I_1^{(k)} - (k, k), \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\bar{B}_{(i,j,l)}^{(k)}(t) = \min [\bar{A}_{(i,j,l)}(t + D^{(k)}), c^{(k)}t - \sum_{(m,n) \in I_1^{(k)} - \{(i,j,l)\}} \underline{A}_{(m,n)}(t - D^{(k)}) - \sum_{(m,n) \in I_2^{(k)}} \underline{B}_{(m,n)}^{(k)}(t - D^{(k)})]$$

4. $(i, j, l) \in I_0^{(k)}, \quad l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$

$$\bar{B}_{(i,j,l)}^{(k)}(t) = \min [\bar{B}_{(i,j,l)}^{(k-1)}(t + D^{(k)}), c^{(k)}t - \sum_{(m,n) \in I_1^{(k)}} \underline{A}_{(m,n)}(t - D^{(k)}) - \sum_{(m,n) \in I_2^{(k)} - (i,j,l)} \underline{B}_{(m,n)}^{(k)}(t - D^{(k)})]$$

4 デコーダモデルとバッファ内セル量の変化幅

ここまでの考察の結果，画像情報のデコーダ到着時における到着過程の MUEP と MLEP を求めることが可能になった．本章では，画像情報のデコーダ到着過程の MUEP と MLEP が明らかとなるとき，デコーダのバッファ内セル量の変化幅を求める方法についての考察を行う．

4.1 デコーダモデル

デコーダの動作については 1 章でも述べたように，動画の伝送が始まりバッファにセルが到着しても，基準量 T のセルがバッファに蓄積されるまではセルの復号を行わない．基準量 T のセルが蓄積された後は，バッファ内のセル量が正常な量である間は単位時間に c 個ずつセルを復号する．また，セル量が上限量 $T + u$ を上回っているときは単位時間に $c_u (> c)$ 個，セル量が下限量 $T - l$ を下回っているときは単位時間に $c_l (< c)$ 個ずつセルを復号する．

時間が離散化されているシステムを考え， $q(t), a(t)$ をそれぞれ時刻 t にバッファに蓄積されたセル数およびバッファに到着するセル数とする．バッファ内セル量が初めて T を越える時刻を $t_0 = \inf\{t \geq 1 : q(t) \geq T\}$ として定義したとき以下の式が成り立つ．

i) $t < t_0$ では

$$\begin{cases} q(0) &= 0 \\ q(t+1) &= q(t) + a(t) \end{cases}$$

ii) $t \geq t_0$ では

$$q(t+1) = \begin{cases} q(t) + a(t) - c, & (T - l < q(t) < T + u) \\ q(t) + a(t) - c_u, & (q(t) \geq T + u) \\ q(t) + a(t) - c_l, & (q(t) \leq T - l) \end{cases}$$

である．

またバッファに到着するセルの到着過程 $a(t)$ について次のことがいえる．エンコーダから規則的に伝送されるセル数の時間平均は a で，デコーダに到着するセル数の時間平均に等しい．つまり，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(0, t)}{t} = a$$

であり，

$$c = a \tag{2}$$

とする．

ここでセルがデコーダのバッファに届くときの到着過程の MUEP, MLEP を $\bar{A}(t), \underline{A}(t)$ とし， $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\underline{A}(t)}{t} = \underline{a}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{t} = \bar{a}$ とする．セルの送出過程の周期性より $\underline{a} = a = \bar{a}$ であることに注意すると， $c_l < c < c_u$ のとき式 (2) より $c_l < \underline{a}$, $\bar{a} < c_u$ がそれぞれ成り立つ．このとき定理 2.1, 定理 2.2 よりバッファ内セル量が $T + u$ を上回るか $T - l$ を下回るかしたとき，セル量が $T + u$, $T - l$ に戻ってくるまでの時間は有限の値で抑えられる．このとき，セル量の変化幅も有界となる．

4.2 バッファ内セル量の変化幅

4.1節の議論により復号の速度を $c_l < c < c_u$ を満たすような c_l, c, c_u で加減しておけば，バッファ内のセル量の変化幅は有限の範囲に抑えられることが明らかになった．本節では $\bar{A}(t)$ と $\underline{A}(t)$ および復号速度 c_u, c, c_l が与えられたとき，バッファ内セル量の基準量 T からみた増加幅と減少幅を，パラメタ u, l の関数 $U(u), L(l)$ として求める方法を考える．

セルのデコーダへの到着過程について，送出時のような一定量，一定間隔という規則性が保たれていないことは既に述べた．網内の交換機で遅延を被ることがあるからである．そのときセルの到着過程は，他のトラヒックの干渉を受けずに送出時のような規則性を保ったままセルが到着する安定期間，網内での遅延により到着するセル量が通常より減少し，バッファ内セル数が極小値をとるまでの減少期間，遅延を被ったセルがまとめて到着するため，到着するセル量が通常より多く，再びセル到着が安定するまでの増加期間，この3つのパターンでの到着がこの順序で発生し繰り返されたものとなる（15ページの図3を参照）．

また，復号速度を c で一定に保ったとき，減少期間におけるセルの減少幅と，増加期間におけるセルの増加幅は等しい．なぜならば，増加期間における到着セル数の増加は，減少期間において到着が遅延していたセルに起因するからである．

また，本研究では全てのトラヒックが周期的に網内へ送出される場合に注目している．よって全ての $s, t (s, t \geq 0)$ に対して

$$A(s, s + t + k\tau) = A(s, s + t) + k\tau a \quad (k = 1, 2, \dots)$$

となるような周期 τ が存在する．さらにこの周期性より

$$\bar{A}(t + k\tau) = \bar{A}(t) + k\tau a \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$\underline{A}(t + k\tau) = \underline{A}(t) + k\tau a \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

が全ての $t > 0$ に対して成立する．

4.2.1 バッファ内セル量の基準量 T からみた増加幅

基準量 T が与えられたとき，バッファ内セル量が上限量をとる場合を考える．

増加期間でセルが増加する前に，減少期間においてセルが減少していることは既に述べた．ところが，復号が開始されるまでは減少期間においてもセルは減少せず増加する．

ここで次の命題が成り立つ（証明は付録Dに示す）

命題 1 基準量以下であったバッファ内セル量が増加し，ある時点 t において，基準量 T 以上になったとする．このとき，バッファ内セル量は時刻 $t + \tau - 1$ までに一度は基準量 T 以下となる．

よって，バッファ内セル量の上限值は，時刻0において基準量 T 以上であったという条件の下で，周期 τ 内に達成されるバッファ内セルの最大値として与えられる．以下では，バッファ内セ

ル量の基準量 T からみた増加幅の上界値を求める方法として、復号開始時に MUEP による到着が発生した場合の、増加幅の上界値を求める方法を示す。

< 増加幅の上界 $U(u)$ を求める方法 >

1. $d_{u0} = \inf \{ t \mid \bar{A}(t) - ct \geq u \}$ を求める。
2. (i) $d_{u0} = \infty$ のとき

$$U(u) = \sup \{ u \mid \exists t, \bar{A}(t) - ct \geq u \}$$

(ii) $d_{u0} < \infty$ のとき

$q_u(0) = 0$ とし,

$$q_u(t+1) = q_u(t) + (\bar{A}(t) - \bar{A}(t-1)) - C_u(t) \quad (t = 0, 1, \dots, \tau-1)$$

を求める。ただし $\bar{A}(-1) = 0$ であり

$$C_u(t) = \begin{cases} c & (q_u(t) < u) \\ c_u & (q_u(t) \geq u) \end{cases}$$

である。これを用いて $U(u)$ は次式で与えられる。

$$U(u) = \max \{ q_u(d_{u0}), q_u(d_{u0} + 1), \dots, q_u(\tau) \}$$

4.2.2 バッファ内セル量の基準量 T からみた減少幅

十分大きな基準量 T が与えられたとき、バッファ内セル量が下限量をとる場合を考える。ここで次の命題が成り立つ（証明は付録 E に示す）

命題 2 基準量以上であったバッファ内セル量が減少し、ある時点 t において、基準量 T 以下になったとする。このとき、バッファ内セル量は時刻 $t + \tau - 1$ までに一度は基準量 T 以上となる。

よって、バッファ内セル量の下限值は、時刻 0 において基準量 T 以下であったという条件の下で、周期 τ 内に達成されるバッファ内セルの最小値として与えられる。

以下では、バッファ内セル量の基準量 T からみた減少幅の上界値を求める方法として、復号開始時に MLEP による到着が発生した場合の、減少幅の上界値を求める方法を示す。

< 減少幅の上界を $L(l)$ 求める方法 >

1. $d_{l0} = \inf \{ t \mid \bar{A}(t) - ct \leq -l \}$ を求める。
2. (i) $d_{l0} = \infty$ のとき

$$L(l) = \sup \{ l \mid \exists t, \bar{A}(t) - ct \leq -l \}$$

(ii) $d_{l_0} < \infty$ のとき

$q_l(0) = 0$ とし,

$$q_l(t+1) = q_l(t) + (\underline{A}(t) - \underline{A}(t-1)) - C_l(t) \quad (t = 0, 1, \dots, \tau-1)$$

を求める．ただし $\underline{A}(-1) = 0$ であり

$$C_l(t) = \begin{cases} c & (q_l(t) > -l) \\ c_l & (q_l(t) \leq -l) \end{cases}$$

である．これを用いて $L(u)$ は次式で与えられる．

$$L(l) = \max\{ |q_l(d_{l_0})|, |q_l(d_{l_0} + 1)|, \dots, |q_l(\tau)| \}$$

5 デコーダのパラメタ設定法

前章までの考察によって，エンコーダ送出時の画像情報の MUEP, MLEP および ATM 網の利用状況(干渉トラヒックの MUEP, MLEP)と表示装置への送出速度が与えられたとき，バッファ内セル量の基準量 T からみた増加幅および減少幅の上界値 $U(u)$, $L(l)$ が求められる．

本章ではバッファ容量 X が与えられたとき，ここまでで得られた $U(u)$, $L(l)$ をもとに，基準量 T および，基準速度での出力が許されるバッファ内セル量の，基準量 T からみた増加幅と減少幅の最大値 u , l を適切な値に設定する方法を考える．ここで適切な値とは，セル損ならびにバッファ内セルの枯渇を発生させることがなく，さらに復号速度の加減による画質劣化の期間を最小限にとどめるような値である．

パラメタの設定方法

1. $U(0) + L(0) > X$ のとき

セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障するパラメタ設定は存在しない．

2. $\sup\{u \mid \exists t, \bar{A}(t) - ct \geq u\} + \sup\{l \mid \exists t, \underline{A}(t) - ct \leq -l\} \leq X$ のとき

基準量 $T = \sup\{l \mid \exists t, \underline{A}(t) - ct \leq -l\}$ としたとき画像の復号速度を c で一定に保っていても，セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことが保障できる．

3. その他のとき

適当な u , l に対して， $T = L(l)$ と設定することによりセル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障することができる．このとき u , l に対して，なるべく画像が速度 c_u , c_l で復号される期間を短くするような設定を行いたい．

ここで出力速度に関するパラメタを u, l で行った場合における指示関数 $I_u(t, u, l), I_l(t, u, l)$ を次式で定義する .

$$I_u(t, u, l) = \begin{cases} 1 & \text{時刻 } t \text{ に速度 } c_u \text{ で復号されている場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$I_l(t, u, l) = \begin{cases} 1 & \text{時刻 } t \text{ に速度 } c_l \text{ で復号されている場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

定義より画像が速度 c_u, c_l で復号される期間の時間平均 $T_u(u, l), T_l(u, l)$ は

$$T_u(u, l) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_u(t, u, l) dt$$

$$T_l(u, l) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_l(t, u, l) dt$$

で与えられる .

画像が速度 c_u, c_l で復号される期間が短くなるようなパラメタ u, l は次の問題の解 u^*, l^* により得られる .

$$\begin{aligned} P1 : \quad & \text{minimize} && T_u(u, l) + T_l(u, l) \\ & \text{subject to} && u \geq 0, l \geq 0 \\ & && u \leq U(u), l \leq L(l) \\ & && U(u) + L(l) \leq X \end{aligned} \tag{5}$$

また , 画像を速度 c で復号することが許されるバッファ内セル量の範囲が広いほど , 画像が速度 c_u, c_l で復号される期間を短くすることができるのではないかと考えられるので , 最小化問題 $P1$ に準ずる問題として次に示すような問題も適当なパラメタ u^*, l^* を与える問題として考えられる .

$$\begin{aligned} P2 : \quad & \text{maximize} && u + l \\ & \text{subject to} && u \geq 0, l \geq 0 \\ & && u \leq U(u), l \leq L(l) \\ & && U(u) + L(l) \leq X \end{aligned} \tag{6}$$

< 最大化問題 $P2$ を解く手続き >

$u + l = k, (k = 1, 2, \dots, X)$ とする . $V_k = \{u \mid 0 \leq u \leq k, u \leq U(u), k - u \leq L(k - u)\}$ で u の実行可能領域の集合 V_k を定義したとき , 各 k に対して

$$M(k) = \min_{u \in V_k} \{U(u) + L(k - u)\}$$

とすると、この問題の最大値は

$$k^* = \max \{k \mid 1 \leq k \leq X, M(k) \leq X\}$$

で与えられる。よって、

$$\begin{cases} u^* = \{u \mid \min_{u \in V_{k^*}} \{U(u) + L(k^* - u)\}\} \\ l^* = k^* - u^* \end{cases}$$

を満たす u^* , l^* をパラメタの値として設定すればよい。また u^* , l^* が一意に定まらない場合は、最初にバッファに蓄積するセルの基準量 $T = L(l^*)$ の値を小さくとることにより、画像情報が復号され表示装置へ出力されるまでの時間を短縮できることから

$$\begin{cases} u^* = \max \{u \mid \min_{u \in V_{k^*}} \{U(u) + L(k^* - u)\}\} \\ l^* = k^* - u^* \end{cases}$$

とする。

6 シミュレーション実験

本章では、本研究で得られた結果についてシミュレーション実験による確認を行う。用いるモデルは本研究で取り扱ってきたものと同様のモデルである。ここで実験で設定したモデルの各パラメータについて説明する。

画像情報をはじめその他のトラヒックの伝送速度は $a = 1.0$ (6Mbps) で一様とし、P.8の式(2)よりデコーダでの通常の復号速度を $c = 1.0$ とする。また加減時の復号速度については $c_u = 1.2$, $c_l = 0.8$ とする。エンコーダから送出されたセルがデコーダに到着するまでに通過する交換機の数 N としたとき、網内の queue x ($x = 1, 2, \dots, N$) における処理速度を $c^{(x)} = 25.0$ (150Mbps) とする。さらに、全てのトラヒックは一定量、一定間隔で通信網に送り込まれるものとする。画像情報の場合、8個のセルが続けて伝送されるとセル192個分の間隔をあけるという周期的なトラヒックである。以下、 $N = 2, 3$ の場合について実験を行った。

6.1 $N = 2$ のとき

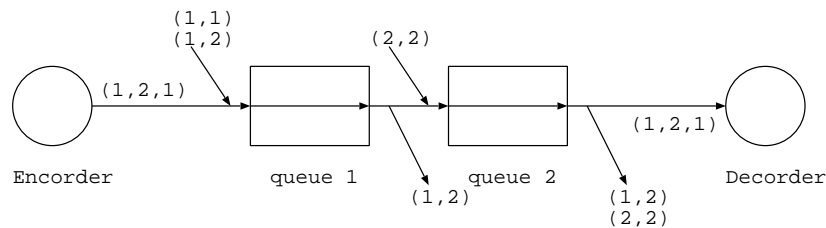


図 2: ネットワークモデル ($N = 2$)

ATM 網を通過する情報のクラスは $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ の 3 種類がある (図 2)。また各クラス (i,j) ($i = 1, 2, j = 2$) はサブクラス (i,j,l) ($l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$) から成っており、ここでは $P_{(1,1)} = 5$, $P_{(1,2)} = 6$, $P_{(2,2)} = 5$ としてある。つまり、注目する画像情報のクラス $(1,2,1)$ を除けば各クラスは 5 つの干渉トラヒックのサブクラスから成っている。また、各クラスの 5 つの干渉トラヒックのうち 2 つは画像情報と同様のトラヒックであるが、残りの 3 つは画像情報の 100 倍のバースト (一度に送られる最大量) を持っており、800 個のセルが続けて伝送されるとセル 19200 個分の間隔をあけるという周期的なトラヒックである。

図 3 はデコーダに到着したセル数をシミュレーションにより求めたもので、図 4 は 3 章に示した計算によって得られるデコーダに到着するセル数の MUEP, MLEP である。図 3 のどの期間をみても図 4 で示されている各期間に到着する最大セル数をあらかず MUEP を上回ることなく、各期間に到着する最小セル数をあらかず MLEP を下回ることがないことが確認できる。

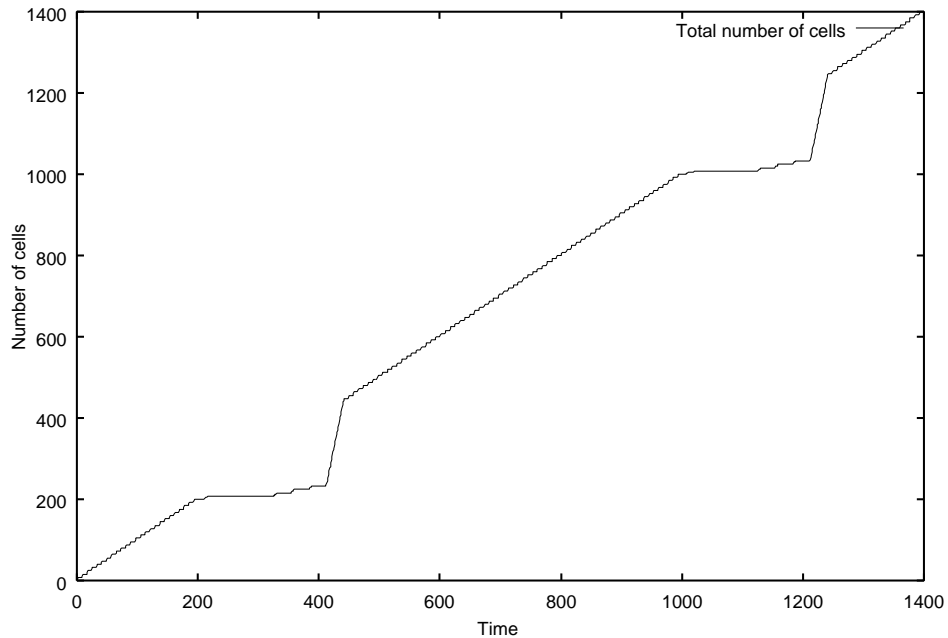


図 3: デコーダに到着した累積セル数

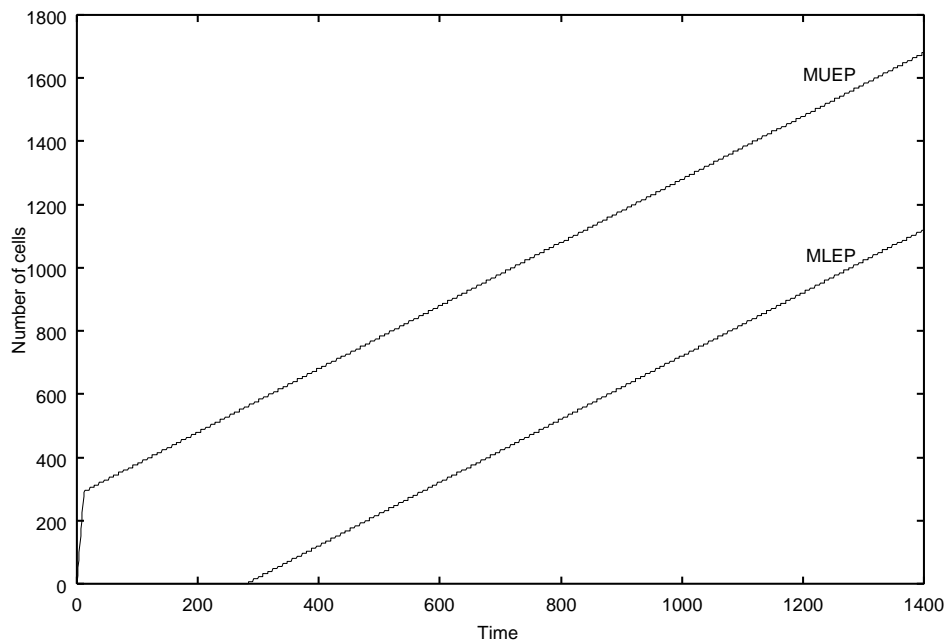


図 4: デコーダに到着するセル数の MUEP, MLEP

また、ここで得られた MUEP および MLEP から 4.3 節で示した方法によりバッファ内セル数

の変化幅を求めたところ

$$\begin{cases} U(0) = 280.4 \\ L(0) = 226.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sup \{ u \mid \exists t, \bar{A}(t) - ct \geq u \} = 283.0 \\ \sup \{ l \mid \exists t, \underline{A}(t) - ct \leq -l \} = 283.0 \end{cases}$$

が得られた．5章の議論により，デコーダのバッファ容量 X が $X < 506.8$ のとき，セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障するパラメタ設定は存在せず， $X \geq 506.8$ のとき画像の出力速度を c で一定に保っていても，セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障できる．

次にバッファ容量が $X = 530$ である場合について考える．出力速度のパラメタとして任意の値を選んだとき，ここでは $u = 50, l = 50$ としたとき $U(50) = 281.0, L(50) = 236.4$ より $U(50) + L(50) \leq X$ となるので，この場合もセル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障できる．そこではじめにバッファに貯めるセルの基準量を $T = L(50) = 236.4$ としシミュレーションを行ったところ，図 5 をみても解るように，速度が c_u, c_l で復号されている期間が長く，また $X - U(50) + L(50) = 12.4$ であることから使用できるバッファの容量にまだ余裕があることがわかる．

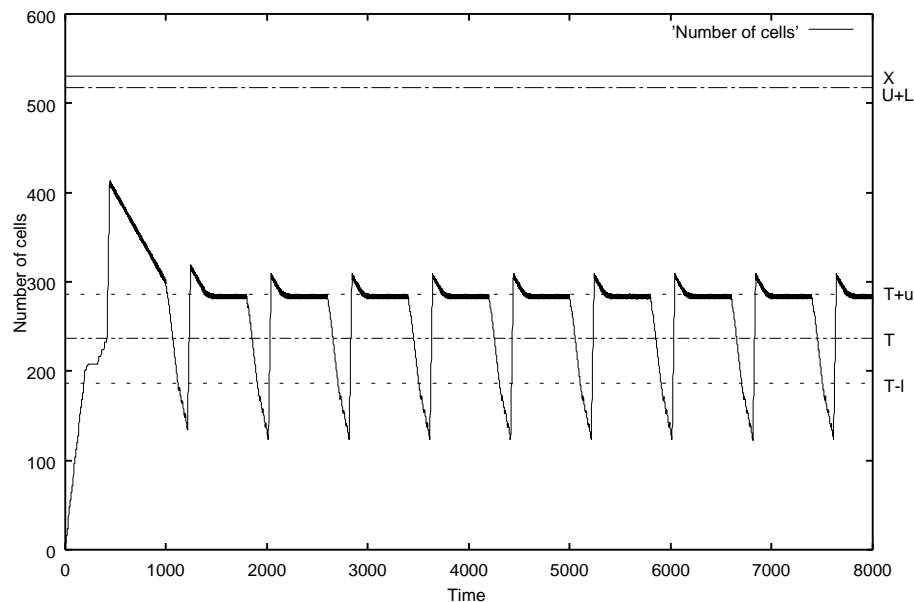


図 5: バッファ内セル数の変化 ($u = 50, l = 50$)

そこで，5章の最大化問題 $P2$ を解いたところ $u^* = 283, l^* = 102, U(u^*) = 283, L(l^*) = 246.8$ が得られた．それらをパラメタの値として設定しシミュレーションを行った結果を図 6 と 図 7 に示

す．図より明らかなように出力速度が c_u, c_l で出力されている期間が短く， $U(u^*) + L(l^*) = 529.8$ ということからバッファ容量を最大限に生かしているといえる．また $u^* = U(u^*)$ となっていることから，セルを速度 c_u で出力させる必要がない．

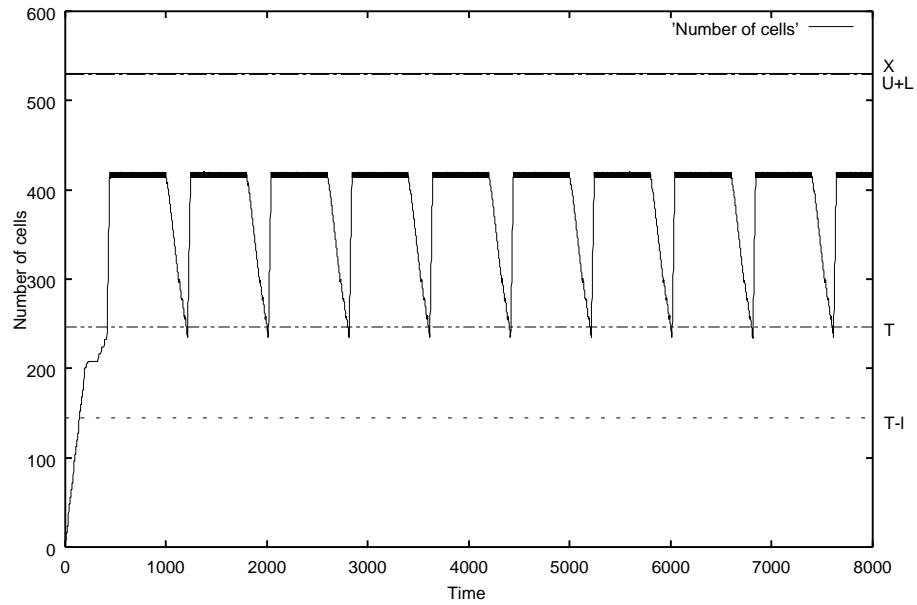


図 6: 復号開始時に増加期間が発生する場合

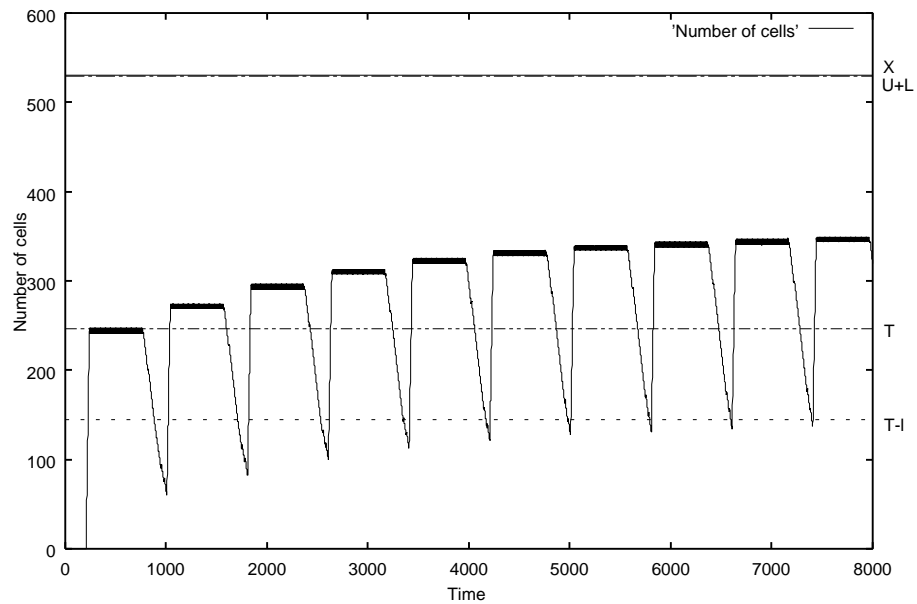


図 7: 復号開始時に安定期間が発生する場合

6.2 $N = 3$ のとき

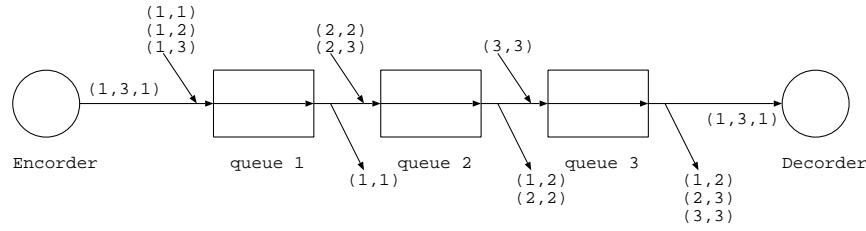


図 8: ネットワークモデル ($N = 3$)

ATM 網を通過する情報のクラスは $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$ の 6 種類がある (図 8)。また各クラス (i, j) ($i = 1, 2, 3, j = 2, 3$) はサブクラス (i, j, l) ($l = 1, 2, \dots, P_{(i,j)}$) から成り $P_{(1,1)} = 5$, $P_{(1,2)} = 5$, $P_{(1,3)} = 6$, $P_{(2,2)} = 5$, $P_{(2,3)} = 5$, $P_{(3,3)} = 5$ としてある。つまり $N = 2$ の場合と同様に、注目する画像情報のクラス $(1, 3, 1)$ を除けば各クラスは 5 つの干渉トラヒックのサブクラスから成り、各クラスの 5 つの干渉トラヒックのうち 2 つは画像情報と同様のトラヒックで、残りの 3 つは画像情報の 100 倍のバーストを持っており、800 個のセルが続けて伝送されるとセル 19200 個分の間隔をあけるという周期的なトラヒックである。

得られた MUEP および MLEP からバッファ内セル数の変化幅を求めたところ

$$\begin{cases} U(0) = 677.2 \\ L(0) = 551.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sup \{ u \mid \exists t, \bar{A}(t) - ct \geq u \} = 683.0 \\ \sup \{ l \mid \exists t, \underline{A}(t) - ct \leq -l \} = 689.0 \end{cases}$$

が得られた。よってデコーダのバッファ容量 X が $X < 1228.4$ のとき、セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障するパラメタ設定は存在せず、 $X \geq 1372.0$ のとき画像の出力速度を c で一定に保っていても、セル損ならびにバッファ内セルの枯渇が発生しないことを保障できる。また、バッファ容量が $X = 1260$ である場合について最大化問題 $P2$ を解いて得られた $u^* = 683$, $l^* = 128$, $U(u^*) = 683.0$, $L(l^*) = 576.8$ をもとにシミュレーションを行った結果を図 9, 図 10 に示した。

この場合も、速度が c_u, c_l で復号されている期間が短く、 $U(u^*) + L(l^*) = 1259.8$ よりバッファ容量が最大限に生かされていることがいえる。また $u^* = U(u^*)$ となっており、セルを速度 c_u で復号させる必要がない。

また、 $N = 2$ の場合と比べてみると、エンコーダから送られた画像情報がデコーダに到着する間に干渉トラヒックから受ける影響が大きくなるため、必要とされるバッファの容量が大きくなることわかる。

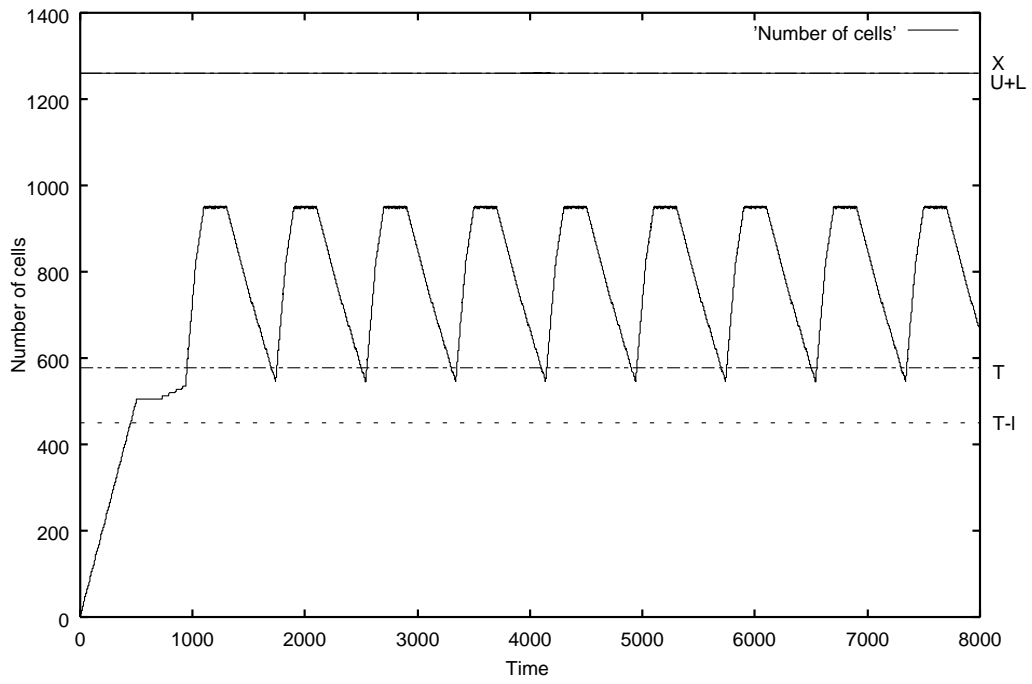


図 9: 復号開始時に増加期間が発生する場合

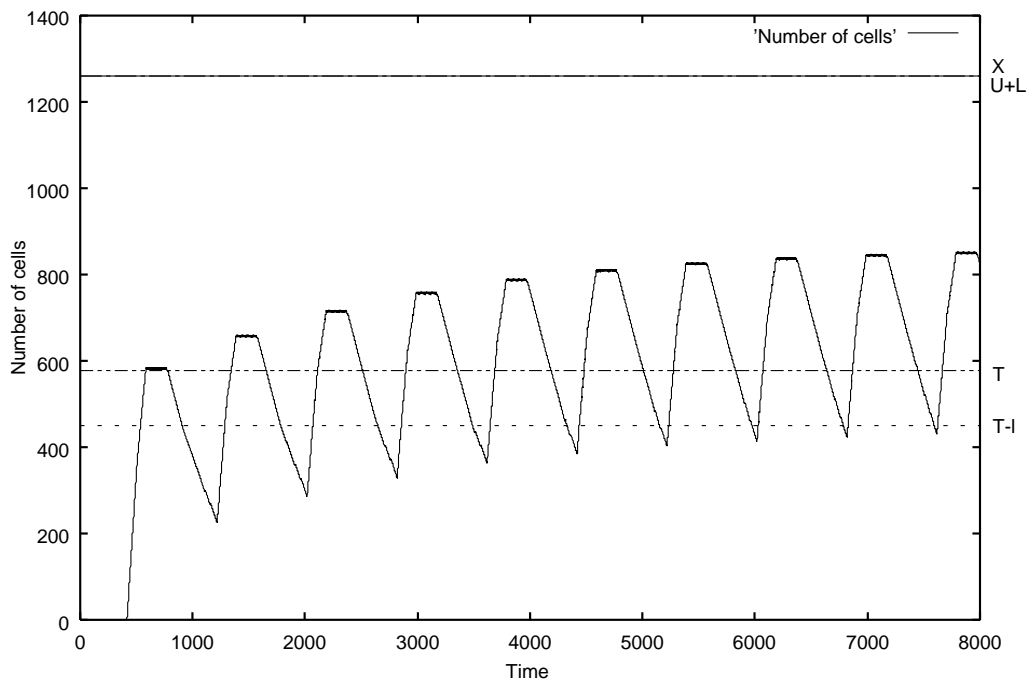


図 10: 復号開始時に安定期間が発生する場合

7 結論

本研究では CBR MPEG デコーダのバッファにおいて、セル損ならびにバッファ内セルの枯渇といった障害を回避するために使用されている装置に対して、パラメタ設定の観点からの考察を行ってきた。

その結果、次のようなパラメタを求める方法を提案することができた。一つは、表示速度を変化させなくても障害を回避できる場合における基準量 T 。もう一つは、表示速度を変化させることにより障害を回避できる場合における基準量 T と表示速度に関するパラメタ u, l 。これらのパラメタを用いると、セル損ならびにバッファ内セルの枯渇といった障害を回避するための条件を満たし、さらに画質の劣化を最小限度にとどめることが可能になる。

また、この装置が障害を回避する上で果たす効果に関して、次のようなことがわかった。まず、復号開始までにバッファに蓄積されるセルの基準量については、その適切な設定が、障害を回避する上ではいずれの局面においても必要不可欠とされるため、それが果たす効果は大きいといえる。一方、復号速度の調整については、調整の度合いを実用的に許される小さなもので行わなければならないため、障害を回避する上で適切な設定が必要とされる局面は比較的少なく、それが果たす効果は小さいといえる。

謝 辞

本研究において貴重なご指導を頂いた福島雅夫教授、並びに本報告書の作成全般に渡り、細部に至るまで数多くの助言と熱心なご指導を頂いた滝根哲哉助教授に心より感謝致します。さらに、日頃からお世話頂いた山下伸雄助手に深く感謝致します。また、研究を進めるに当たり、快く議論に加わり多くの助言を頂いた修士課程の井上大さんを始めとし、お世話になった福島研究室の諸先輩方に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] U. Black, *ATM: Foundation for Broadband Network*, Prentice Hall, NJ, 1995.
- [2] C.-S. Chang, "Stability, Queue Length, and Delay of Deterministic and Stochastic Queueing Networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, no.5, pp.913-931, 1994.
- [3] T. Mori, H. Tatezumi, Y. Kawanishi, S. Kasahara, T. Takine and Y. Takahashi, "Relation between the Cell Jitter and the Distortion of MPEG Pictures on ATM Multi-Node Integrated Connection," to be presented at *the 8th International Conference on Telecommunication Systems*, Nashville, TN

付録

A 補題 2.3 の証明

$\tilde{A}''(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \tilde{A}(s)$ とすると $\tilde{A}''(t)$ は明らかに非減少である．また $a(t)$ は非負の数列なので， $0 \leq s \leq t_2 - t_1$ を満たす s に対して $\tilde{A}(t_2 - t_1 - s) \leq A(t_1, t_2 - s) \leq A(t_1, t_2)$ が成り立つ．従って， $\forall (t_1, t_2) \in W$ に対して $\tilde{A}''(t_2 - t_1) = \sup_{0 \leq s \leq t_2 - t_1} \tilde{A}(t_2 - t_1 - s) \leq A(t_1, t_2)$ が成り立ち， $\tilde{A}''(t)$ は $a(t)$ の Lower Envelope Process である．

ここで，式 (7) を用いると $\tilde{A}''(t)$ から $\tilde{A}'(t)$ が再帰的に得られる．

$$\tilde{A}'(t) = \max[\tilde{A}''(t), \max_{0 < s < t} \{\tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t - s)\}] \quad (7)$$

$\tilde{A}''(t+1) \geq \tilde{A}''(t)$ と $\max_{0 < s < t+1} \{\tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t+1 - s)\} \geq \max_{0 < s < t} \{\tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t - s)\}$ が成り立つことから， $\tilde{A}'(t)$ が非減少であることは帰納的に証明できる．また

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(t_1 + t_2) &\geq \max_{0 < s < t_1 + t_2} \{\tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t_1 + t_2 - s)\} \\ &\geq \tilde{A}'(t_1) + \tilde{A}'(t_2) \end{aligned}$$

より， $\tilde{A}'(t)$ は優加法的である．

$\tilde{A}'(t)$ が $a(t)$ の Lower Envelope Process であることを t について帰納的に証明する．

まず $\tilde{A}'(1) = \tilde{A}''(1)$ であることから $t = 1$ の場合について成り立つ．

次に $\forall \tau \in N$ に対して $s = 1, 2, \dots, t - 1$ で

$$A(\tau, \tau + s) \geq \tilde{A}'(s) \quad (8)$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$\begin{aligned} A(\tau, \tau + t) &= A(\tau, \tau + s) + A(\tau + s, \tau + t) \\ &\geq \tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t - s) \end{aligned}$$

が成り立つことから， $A(\tau, \tau + t) \geq \max_{0 < s < t} \{\tilde{A}'(s) + \tilde{A}'(t - s)\}$ が言える．また $\tilde{A}''(t)$ は $a(t)$ の Lower Envelope Process であることから $A(\tau, \tau + t) \geq \tilde{A}''(t)$ となることも考え合わせると，式 (7) より $A(\tau, \tau + t) \geq \tilde{A}'(t)$ が成り立つので，式 (8) は $s = t$ の場合も成り立つ．

B 補題 2.4 の証明

$$M = \left\{ t' \mid \frac{\tilde{A}(t')}{t'} = \sup_{t \geq 1} \frac{\tilde{A}(t)}{t} \right\}$$

という集合 M を定義する．

i) 有限の値 $t_* \in M$ が存在するとき， $\tilde{A}(t)$ が優加法的であることから $k = 1, 2, \dots$ に対して

$$\frac{\tilde{A}(kt_*)}{kt_*} \geq \frac{k\tilde{A}(t_*)}{kt_*} = \frac{\tilde{A}(t_*)}{t_*} = \sup_{t \geq 1} \frac{A(t)}{t}$$

となることを考えると

$$\frac{\tilde{A}(kt_*)}{kt_*} = \frac{\tilde{A}(t_*)}{t_*}$$

したがって $k = 1, 2, \dots$ に対して, $kt_* \in M$ である.

ここで任意の t は $m (= 0, 1, 2, \dots)$, $n (= 0, 1, 2, \dots, t_* - 1)$ により $t = mt_* + n$ としてあらわせるので,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}(t)}{t} &= \frac{\tilde{A}(mt_*) + \tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*)}{t} \\ &= \frac{\tilde{A}(mt_*)}{t} + \frac{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*)}{t} \\ &= \frac{mt_*}{t} \cdot \frac{\tilde{A}(mt_*)}{mt_*} + \frac{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*)}{t} \\ &= \frac{t-n}{t} \cdot \frac{\tilde{A}(mt_*)}{mt_*} + \frac{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*)}{t} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*) &\leq \tilde{A}((m+1)t_*) - \tilde{A}(mt_*) \\ &= \frac{m+1}{m} \tilde{A}(mt_*) - \tilde{A}(mt_*) \\ &= \frac{\tilde{A}(mt_*)}{m} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(mt_*)}{t} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{A}(mt_*)}{mt} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{t_*}{t} \cdot \frac{\tilde{A}(mt_*)}{mt_*} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{A}(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-n}{t} \cdot \frac{\tilde{A}(mt_*)}{mt_*} \\ &= \tilde{a} \end{aligned}$$

ii) 有限の値 $t_* \in M$ が存在しないとき, \sup の範囲は $t \geq 1$ なので $M = \{\phi\}$ である.

C 定理 2.2 の証明

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \underline{a} > c_l$ であるので $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) - c_l t = \infty$. よって d_l は有限の値で求まる.

D 命題 1 の証明

$q(0) < T$ かつ $q(1) \geq T$ と仮定する．このとき，ある値 $t_u^* \geq 1$ に対して $q(t) \geq T$ ($t \in [1, t_u^*]$) ならば

$$q(t) \leq q(0) + \bar{A}(t) - ct \quad t \in [1, t_u^*]$$

が成立する．ここで $t_u^* \geq \tau$ と仮定すると

$$q(t) \leq q(0) + \bar{A}(t) - c\tau$$

となるが， $c = a$ ， $\bar{A}(t) = a\tau$ より $q(\tau) \leq q(0) < T$ となり矛盾する．よって $t_u^* \leq \tau - 1$

E 命題 2 の証明

$q(0) > T$ かつ $q(1) \leq T$ と仮定する．このとき，ある値 $t_l^* \geq 1$ に対して $q(t) \leq T$ ($t \in [1, t_l^*]$) ならば

$$q(t) \geq q(0) + \underline{A}(t) - ct \quad t \in [1, t_l^*]$$

が成立する．ここで $t_l^* \geq \tau$ と仮定すると

$$q(t) \geq q(0) + \underline{A}(t) - c\tau$$

となるが， $c = a$ ， $\underline{A}(t) = a\tau$ より $q(\tau) \geq q(0) > T$ となり矛盾する．よって $t_l^* \leq \tau - 1$