

特別研究報告書

集団到着集団サービス待ち行列システムの解析

指導教官

福嶋 雅夫 教授
滝根 哲哉 助教授

京都大学工学部情報学科数理工学コース
平成9年度入学
平成13年度卒業

竹口 英樹

平成13年1月31日提出

集団到着集団サービス待ち行列システムの解析

竹口 英樹

摘要

本報告書では、客が集団で到着し、集団単位で先着順にサービスを受ける複数サーバ待ち行列、すなわち、集団到着集団サービス待ち行列システムを考察する。各集団内の客はそれぞれ一つのサーバを要求する。それゆえ、 j 人の客からなる集団が待ち行列の先頭に来たとき、 j 個以上のサーバが空であれば、その内の j 個のサーバを利用してこの集団のサービスが開始され、サービスが終了するとこれら j 個のサーバを同時に解放する。一方、 $j-1$ 個以下のサーバしか空でない場合は、空のサーバが j 個以上になるまで待ち行列の先頭で待つことになる。また、到着する個々の集団を一人の客と見なすと、この待ち行列システムは一人の客が複数のサーバを同時に使用するシステムと見る事もできる。

過去の集団到着集団サービス待ち行列システムの研究は、サーバ数が 2 の場合で、かつ、一人からなる集団と二人からなる集団のサービス時間が同じパラメタをもつ指数分布に従う場合しか行われていない。また、過去の研究では確率母関数を用いてシステム内客数を解析しているが、この手法はサーバ数が 3 以上の場合には、状態数が多くなるため容易に拡張できない。

本報告書では、従来研究されていたモデルを拡張し、一般に複数のサーバをもち、かつ、集団のサービス時間分布が集団内に含まれる客数によって異なる集団到着集団サービス待ち行列システムを考察する。まず初めに、システム内客数過程が構造化された連続時間マルコフ連鎖によって記述できることを示す。次に、この構造を利用して定常状態確率の数値計算法を提案する。さらに提案した手法に基づき数値実験を行い、システムを記述する各パラメタの値を変化させたとき、それぞれの集団の平均待ち時間特性について調査した。その結果、 i 人の客からなる集団の到着率とサービス率の比を一定に保ちながらサービス率を大きくしていくと、 i 人より小さな数の客からなる集団の平均待ち時間は単調に減少するわけではなく、ある点を境に増大していくことが分かった。

今後の課題としては、より多数のサーバに対しても定常状態確率が計算可能なように数値計算法を改善していく必要がある。

目次

1	はじめに	1
2	モデルの記述と定式化	2
2.1	モデル	2
2.2	状態空間	2
2.3	状態遷移率	2
2.4	定常状態確率の計算法	4
3	クラス別の平均系内客数	7
4	数値実験	9
4.1	実験 1	9
4.2	実験 2	11
5	結論	17

1 はじめに

集団到着集団サービス待ち行列システム（以下、集団待ち行列システム）とは、複数の客が集団として到着し、集団内の客一人一人がそれぞれ一つのサーバを要求する。そしてその1つの集団が複数のサーバを一度に使用する。そしてサービスを終える時は集団の客全てが同時にサービスを終了する、という待ち行列モデルである。解析する際には、使用するサーバ数によって客の集団を区別する。すなわち、サーバの数が c 個の時、客の集団を c 個のクラスに分類し、一人の客からなる客の集団はクラス1の客の集団、二人の客からなる客の集団はクラス2の客の集団・・・というように、集団内に含まれる客数によって客の集団のクラスを分類する。一つの客の集団を一人の客として考えると、集団待ち行列システムは、一人で i 個 ($i = 1, \dots, c$) のサーバを同時に使用する c 種類の客が存在する待ち行列システムと考える事もできる。このように見ると、集団待ち行列システムは通常の待ち行列システムを拡張したものになっている。以下では簡単のため、あるクラスの客の集団を、複数のサーバを使用する一人の客として扱う事にする。一人で複数のサーバを占有するという事以外は、通常の待ち行列モデルと同様である。

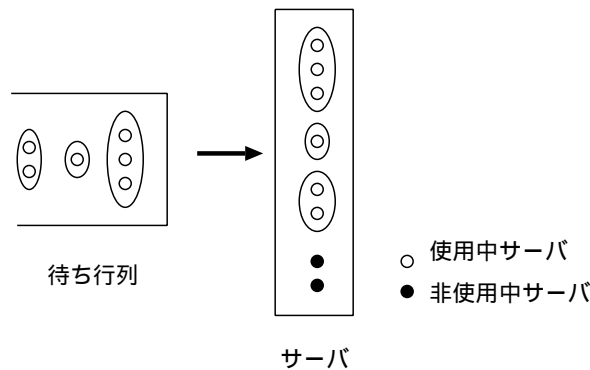


図 1: 集団待ち行列システムの例 ($c = 8$).

図 1 は、集団待ち行列システムの例である。図 1 ではサーバが 2 個空いているにも関わらず、クラス 1 やクラス 2 の客がサービスを受けられずに待っている。これは集団ごとに先着順でサービスを受けるためである。図 1 では待ち行列の先頭にクラス 3 の客が並んでいるため、その後ろに並んでいるクラス 1 やクラス 2 の客はサービスを受けられない。このように、たとえ空いているサーバがあったとしても、待ち行列の先頭の客が必要とするだけの数のサーバが空くまでは、待合室の客全てが待ち続ける。

過去この集団待ち行列システムに関する研究は、確率母関数を使っての解析が主であった。[1] において紀は、サーバ数が 2 で、到着がポワソン過程に従い、全クラスの客のサービス時間が同じパラメタの指数分布に従う場合のシステムの安定条件や平均系内客数を求めている。しかしこの手法では、サーバ数が増える程に状態数が爆発的に増大し、厳密解を求めることが困難になる。そこで紀は、サーバ数が大きくなった場合の平均系内客数を近似的に求める計算方法を提案している。[1] では系内客数や安定条件に関しては研究がされているが、客の待ち時間に関する研究はなされていない。この集団待ち行列システムにおいては、客のクラスが異なればその待ち時間も異なると考えられる。また、あるパラメタを変化させた場合におけるクラスごとの待ち時間への影響の違いもあると考えられるが、それについても言及されていない。

本報告書では、サービス時間が同じパラメタの指数分布に従うという仮定を外し、各クラスの客が異なるパラメタの指数分布に従ってサービスを受ける集団待ち行列システムを扱う。まず、これを構造化された連続時間マルコフ連鎖行列によって記述する。次に、定常状態確率分布を計算する数値計算手法を提案する。さらに提案した数値計算手法を用いて数値実験を行い、クラスごとの平均系内客数や平均待ち時間を求め、集団待ち行列システム固有の性質を調べる事を目的とする。

2 モデルの記述と定式化

2.1 モデル

本報告書ではサーバ数が c ($c \geq 1$) の集団待ち行列システムを扱う。簡単のため、 i 人の集団として到着しサービスを受ける客を、 i 個のサーバを使用する一人の客として扱う。一人で i 個のサーバを使用する客をクラス i の客とする。クラス i の客はパラメタ λ_i のポワソン過程に従って到着し、パラメタ μ_i の指数分布に従ってサービスを受けるとする。また、 $\lambda = \sum_{i=1}^c \lambda_i$ と定義する。

客は FCFS でサービスを受けるものとする。例えばあるクラス i の客が到着した時、待合室に客が無く、かつ非使用中のサーバが i 個以上ある場合、その客は直ちにサービスを受けられる。待合室に客が無く、かつ非使用中のサーバが i 個未満であった場合、クラス i の客は待ち行列の先頭に並ぶ。待合室に客が並んでいる場合、クラス i の客は待ち行列の最後尾に並ぶ。また、待合室の容量は無量大とする。待ち行列に客が並んでいる時にある客のサービスが終わった場合、待ち行列の先頭の客は、自分の必要とする数のサーバが空いていたら、直ちにサーバに入りサービスを開始する。

2.2 状態空間

システムの挙動を記述するのに必要な変数を次のように設定する。

まず、サービス中の客も含めたシステム内の全客数を N とする。次に、現在サービスを受けているクラス i の客の数を G_i ($i = 1, \dots, c$) とする。そして、待ち行列の先頭の客のクラスを H (ただし空の時は 0) とする。この時、システムの状態ベクトル Y は次のように書ける。

$$Y = (N, G_1, \dots, G_c, H)$$

この状態ベクトル Y の取りうる値の集合を \mathcal{Y} で定義する。

到着はポワソン過程と仮定している故に、待ち行列については先頭の客のクラスだけに着目すればよい。また、 N や G_i の値には次のような制約がある。

$$\begin{aligned} \text{条件 1. } & N \geq 0 \\ & 0 \leq G_i \leq \lfloor \frac{c}{i} \rfloor \quad (i = 1, \dots, c) \\ & 0 \leq H \leq c \\ \text{条件 2. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^c G_i = N, & H = 0 \\ 1 + \sum_{i=1}^c G_i \leq N, & H > 0 \end{cases} \\ \text{条件 3. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^c i G_i \leq c, & H = 0 \\ c - H < \sum_{i=1}^c i G_i \leq c, & H > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

条件 1. はモデルの性質より自明である。条件 2. はサービス中の客数とシステム内容数との関係を表している。条件 3. はサーバの数とサービス中の客のクラスと種類、そして H の種類との関係を表している。これらの条件 1. ~ 3. を全て満たす時、 $Y = (N, G_1, \dots, G_c, H)$ は \mathcal{Y} の要素になる。

2.3 状態遷移率

上のように記述した各状態間の遷移率を、客数が増えるときと減るときに分けて求める。

まず客数が増えるときの遷移率を求める。

到着はポワソン過程に従うとしているので、客は高々一人しか一度には到着しない。客数が増える前の状態を $y = (n, g_1, \dots, g_c, h)$ とし、客数が増えた後の状態を $y' = (n+1, g'_1, \dots, g'_c, h')$ とする。この時の遷移率 $p(y, y')$ は次のようになる。

$$p(y, y') = \begin{cases} \lambda, & h > 0, g_k = g'_k \ (k = 1, \dots, c), h = h' \\ \lambda_{h'}, & h = 0, h' > 0, g_k = g'_k \ (k = 1, \dots, c) \\ \lambda_l, & h = h' = 0, \text{ある } l \ (l = 1, \dots, c) \text{ に対して } g_l + 1 = g'_l, \\ & \text{かつ } g_k = g'_k \ (k \neq l, k = 1, \dots, c) \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

次に、客数が減るときの遷移率を求める。

サービス時間は指数分布に従うとしているので、客は高々一人しか一度にはサービスを終了しない。客数が減る前の状態を $y = (n, g_1, \dots, g_c, h)$ とし、客数が減った後の状態を $y' = (n-1, g'_1, \dots, g'_c, h')$ とする。この時の遷移率 $p(y, y')$ は次のようになる。

$$p(y, y') = \begin{cases} g_l \mu_l, & h = h', \text{ある } l \ (l = 1, \dots, c) \text{ に対して } g_l - 1 = g'_l, \\ & \text{かつ } g_k = g'_k \ (k \neq l, k = 1, \dots, c) \\ g_h \mu_h \prod_{k=1}^c \left(\frac{\sum_{l=k}^c (g'_l - g_l)}{g'_k - g_k} \right) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^{g'_k - g_k} \frac{\lambda_{h'}}{\lambda}, & h > 0, g_k \leq g'_k \ (k = 1, \dots, c), g_h = g'_h \neq 0 \\ g_l \mu_l \prod_{k=1}^c \left(\frac{\sum_{l=k}^c d_k(h, l)}{d_k(h, l)} \right) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^{d_k(h, l)} \frac{\lambda_{h'}}{\lambda}, & \text{ただし、} d_k(h, l) = \begin{cases} g'_h - g_h - 1, & k = h \\ g'_l - g_l + 1, & k = l \\ g'_k - g_k, & \text{それ以外の場合} \end{cases} \\ 0, & h > 0, g_h + 1 \leq g'_h, \text{ある } l \ (l \neq h, l = 1, \dots, c) \text{ に対して } g_l - 1 = g'_l, \\ & \text{かつ } g_k \leq g'_k \ (k \neq l, h, k = 1, \dots, c) \\ & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

このように求めた遷移率を用いて、連続時間マルコフ連鎖行列 Q を作る前に、状態確率ベクトル z を次のように定義する。

まず状態の並べ方を次のように定義する。

$N = k \ (k \geq 0)$ である状態の集合を \mathcal{Y}_k と定義する。また、集合 \mathcal{Y}_k の要素の数を N_k で定義する。集合 $\mathcal{Y}_k \ (0 \leq k \leq c+1)$ に対してある関数 $f_k(g_1, \dots, g_c, h)$ を用意して、集合 \mathcal{Y}_k の要素一つ一つに、1 から N_k までの異なるインデックスを対応させるものとする。集合 $\mathcal{Y}_k \ (k \geq c+2)$ に関しては、客数が $c+1$ 以上の場合、待ち行列に客が並んでいる状態しかあり得ないため、客数が $n \ (n \geq c+1)$ であるようなある状態 $y = (n, g_1, \dots, g_c, h)$ に対応して、 $y' = (c+1, g_1, \dots, g_c, h)$ なる状態 y' が必ず存在する。そのため客数が $n \ (n \geq c+1)$ である状態の数は n の値に関係なく一定で、 (g_1, \dots, g_c, h) のとりうる値の組み合わせは同じである。そこで、集合 $\mathcal{Y}_k \ (k \geq c+2)$ に対しては、別々の新しい関数を用いるのではなく、関数 $f_{c+1}(g_1, \dots, g_c, h)$ を使ってそれぞれの要素に異なるインデックスを対応させるものとする。

$N = k$ である状態を、上で定義したインデックスに従って昇順に並べ、それぞれの状態の確率を全て並べたベクトルを z_k とする。その z_k を k について昇順に並べて、次のように状態確率ベクトル z を表す。

$$z = (z_0, z_1, z_2, \dots)$$

と変形し、 G の場合と同様に

$$R_{a,k+1} = (\bar{U} + R_{a,k}^2 \bar{D})(I - \bar{S})^{-1}$$

を $R_{a,0}$ からスタートして繰り返し計算すれば、 $R_{a,k}$ は単調に R_a に収束する事が知られている [3]。 $R_{a,k}$ の (i, j) 成分を $R_{a,k}(i, j)$ と書くと、 G の場合と同様に適当な 0 に近い数 ϵ を用意して、

$$\sum_i \sum_j (R_{a,k+1}(i, j) - R_{a,k}(i, j)) < \epsilon$$

を満たすようになるまで繰り返し計算をすれば、任意の精度で R_a を求める事ができる。

なお R_a と G の間には、次のような関係が成立する事が知られている [3]。

$$\begin{aligned} R_a &= \bar{U}(I - \bar{S} - \bar{U}G)^{-1} \\ G &= (I - \bar{S} - R_a \bar{D})^{-1} \bar{D} \end{aligned}$$

この R_a を用いると、

$$x_{c+1+k} = x_{c+1} R_a^k$$

が成り立ち、 $x'_{c+2}, x'_{c+3}, \dots$ が順に求められる。

上で求めた値は各 x'_k ($k = 0, 1, \dots$) の比を表すものなので、最後に正規化して総和を 1 にすれば、求める定常状態確率が得られる。以下に手続きをまとめる。

1. $G, R_1, \dots, R_{c+1}, R^*, R_a$ をそれぞれ求める。
2. $x'_{c+1} = x'_{c+1} R^*$ を解く。ただし $x'_{c+1} e = 1$ 。
3. $x'_k = x'_{k+1} R_{k+1}$ ($k = c, c-1, \dots, 0$) を順次求める。
4. 正規化定数 α を、

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} x'_k e \\ &= \sum_{k=0}^c x'_k e + \sum_{k=c+1}^{\infty} x'_k e \\ &= \sum_{k=0}^c x'_k e + \sum_{k=0}^{\infty} x'_{c+1} R_a^k e \\ &= \sum_{k=0}^c x'_k e + x'_{c+1} (I - R_a)^{-1} e \end{aligned}$$

で求める。

5. $x_k = x'_k / \alpha$ ($k = 0, 1, \dots, c+1$) で定常状態確率 x_k ($k = 0, 1, \dots, c+1$) を求める。
6. x_k ($k \geq c+2$) については、 $x_k = x_{k-1} R_a$ により順次計算される。

3 クラス別の平均系内容数

システム内の客数が n で状態が $y = (n, g_1, \dots, g_c, h)$ であるときの、クラス i の平均系内容数を $L_n^{(i)}(y)$ で表す。サービスを受けているクラス i の客は g_i である。待ち行列に並んでいる客については、先頭の客のクラスだけは h で与えられる。待合室で待っている残りの客については、到着がポワソン過程であることから、確率 λ_i / λ でクラス i の客であると考えられる。以上の事から、 $L_n^{(i)}(y)$ は次のようになる。

$$L_n^{(i)}(y) = \begin{cases} g_i + \left(n - \sum_{j=1}^c g_j \right) \frac{\lambda_i}{\lambda} & (h = 0) \\ g_i + 1 + \left(n - 1 - \sum_{j=1}^c g_j \right) \frac{\lambda_i}{\lambda} & (h = i) \\ g_i + \left(n - 1 - \sum_{j=1}^c g_j \right) \frac{\lambda_i}{\lambda} & (h \neq 0, i) \end{cases}$$

この $L_n^{(i)}(y)$ を前に述べた並べ方に基づいて、 y について縦に並べたベクトルを $L_n^{(i)}$ とする。すると、あるクラス i の平均系内客数 $L^{(i)}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} L^{(i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k L_k^{(i)} \\ &= \sum_{k=0}^c x_k L_k^{(i)} + \sum_{k=c+1}^{\infty} x_k L_k^{(i)} \\ &= \sum_{k=0}^c x_k L_k^{(i)} + \sum_{k=0}^{\infty} x_{c+1} R_a^k L_{c+1+k}^{(i)} \end{aligned}$$

前に述べたように、客数が $c+1$ 以上になると、客数が $c+1$ の時と状態の総数は変化しない。また、状態そのものも、 $y = (c+1+k, g_1, \dots, g_c, h)$ ($k \geq 0$) に対して必ず、 $y = (c+1, g_1, \dots, g_c, h)$ なる状態が存在する。この2つの状態間で異なるのは、待ち行列に並ぶ人の数だけである。よって、

$$L_{c+1+k}^{(i)}(y) = L_{c+1}^{(i)}(y) + k \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (k \geq 0)$$

が成り立つ。すなわち、

$$L_{c+1+k}^{(i)} = L_{c+1}^{(i)} + k \frac{\lambda_i}{\lambda} e$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x_{c+1} R_a^k L_{c+1+k}^{(i)} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_{c+1} R_a^k \left(L_{c+1}^{(i)} + k \frac{\lambda_i}{\lambda} e \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_{c+1} R_a^k L_{c+1}^{(i)} + \sum_{k=0}^{\infty} x_{c+1} R_a^k k \frac{\lambda_i}{\lambda} e \\ &= x_{c+1} (I - R_a)^{-1} L_{c+1}^{(i)} + \frac{\lambda_i}{\lambda} x_{c+1} \sum_{k=0}^{\infty} k R_a^k e \\ &= x_{c+1} (I - R_a)^{-1} L_{c+1}^{(i)} + \frac{\lambda_i}{\lambda} x_{c+1} (I - R_a)^{-1} \{ (I - R_a)^{-1} - I \} e \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$L^{(i)} = \sum_{k=0}^c x_k L_k^{(i)} + x_{c+1} (I - R_a)^{-1} L_{c+1}^{(i)} + \frac{\lambda_i}{\lambda} x_{c+1} (I - R_a)^{-1} \{ (I - R_a)^{-1} - I \} e$$

となり、クラスごとの平均系内客数が求められる。リトルの公式を用いれば、クラス i の平均系内滞在時間 W_i は、

$$W_i = \frac{L^{(i)}}{\lambda_i}$$

で求める事ができる。そしてクラス i の平均待ち時間 w_i は、

$$w_i = W_i - \frac{1}{\mu_i}$$

で求めることができる。

4 数値実験

以下では、集団待ち行列システムの特徴的な挙動を観察するために、今までに述べた計算方法を用いて数値実験を行う。

まず ρ_i を次のように定義する。

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

これは、クラス i の客が単位時間にシステムに持ち込む平均仕事量を表しており、クラス i をサービス中の平均サーバ数に等しい。 ρ を次のように定義する。

$$\rho = \sum_{i=1}^c i \rho_i$$

この ρ は、単位時間にシステムに持ち込まれる平均仕事量を表しており、これはサービス中の平均サーバ数に等しい。よって ρ/c は、単位時間に1つのサーバに持ち込まれる平均仕事量を表しており、これはある1つのサーバがサービス中である確率に等しい。

4.1 実験 1

通常の待ち行列システムにおいては、 ρ/c が1より小さい事が安定条件となる。しかし集団待ち行列システムにおいては、サーバが空いていても客がサービスを受けられない状態が存在する。その分システムが安定であるためにはより厳しい条件が必要である事が予想される。

そこで、サーバ数とシステムの安定性に関して考察を行った結果を以下に示す。

図2は、 $\lambda_i = \lambda^*$, $\mu_i = 1$ ($i = 1, \dots, c$) として、到着率 λ^* を変化させた時のクラス1の客の待ち時間を $c = 2, 3, \dots, 6$ の場合について示したものである。縦軸にクラス1の客の平均待ち時間を取り、横軸に ρ/c をとった。同じく図3は、 $\lambda_i = \lambda^*$, $\mu_i = 1$ ($i = 1, \dots, c$) として、到着率 λ^* を変化させた時のクラス2の客の待ち時間を $c = 2, 3, \dots, 6$ の場合について示したものである。縦軸にクラス2の客の平均待ち時間を取り、横軸に ρ/c をとった。

グラフから、サーバ数 c を大きくすると、システムの負荷 ρ/c の増加に伴うクラス1, クラス2の客の平均待ち時間の増加が急激なものになり、システムの安定性が失われているのが分かる。これは、システムにかける負荷を大きくした時に、サーバ数が大きいほど待っている客がいるにも関わらずサーバが使えないという状態が起こりやすくなり、システムの安定条件が厳しくなることを示している。

また、グラフからは伺いにくいですが、 ρ/c が小さい時には、サーバ数を大きくするとクラス1, 2の待ち時間が小さくなっている。この理由は次のように考えられる。

システムにかける負荷が非常に軽い場合、システム内の平均客数は非常に少なく、客数が3人以上になる確率は微少であると考えられる事ができる。クラス1の客が到着した時に注目した場合、客数が3人以上になる確率が微少であると仮定するならば、クラス1の客がサービスを受けられずに待ち行列に並ぶのは、クラス c の客がサービス中の時のみである。この時、クラス c の客がサービス中である確率は、 ρ_c で与えられる。今、 $\lambda_i = \lambda^*$, $\mu_i = 1$ ($i = 1, \dots, c$) として、到着率 λ^* を変化させると、 ρ の値は、

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i=1}^c i \rho_i = \sum_{i=1}^c i \frac{\lambda_i}{\mu_i} \\ &= \sum_{i=1}^c i \lambda^* \\ &= \frac{c(c+1)}{2} \lambda^* \end{aligned}$$

となり、

$$\lambda^* = \frac{2\rho}{c(c+1)} = \frac{2}{c+1} \frac{\rho}{c}$$

となる。よって、 ρ_c の値は、

$$\rho_c = \frac{\lambda_c}{\mu_c} = \lambda^* = \frac{2}{c+1} \frac{\rho}{c}$$

となる。よって ρ/c の値を固定すると、 ρ_c の値は c を大きくするほど小さくなる。よってクラス 1 の待ち時間は、 c を大きくするほど小さくなる。実際には客数は 3 人以上になる確率は ρ/c の増加に伴って、微少とは言えなくなるほど大きくなるので、クラス 1 の客が待ち行列に並ぶのはクラス c がサービス中の時だけではないが、システムの大まかな性質としては以上のような事が言える。そして、 c を大きくしたときにクラス 1, 2 の客の待ち時間を大きくする作用と小さくする作用の大小関係が、 $\rho/c = 0.4$ あたりで入れ替わるため、システムがこのような挙動を示すと考えられる。

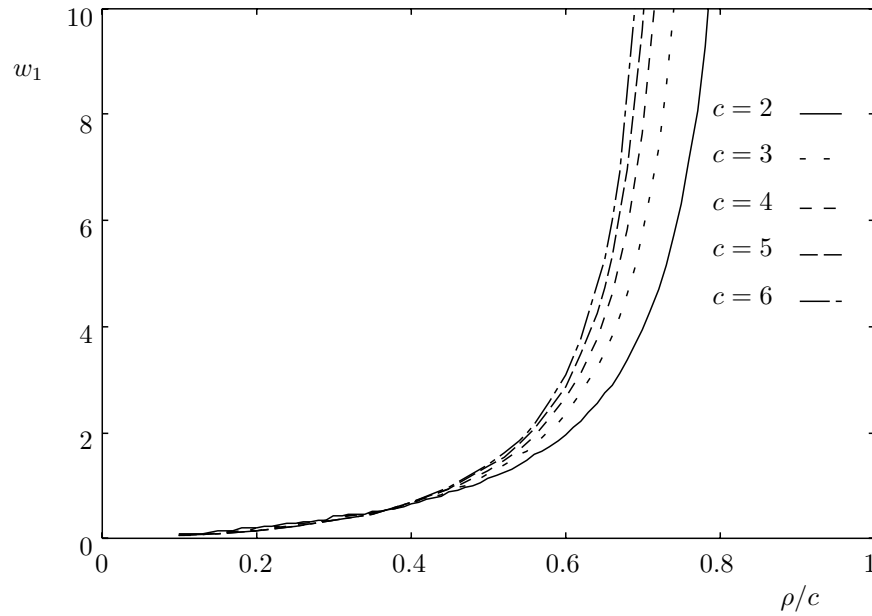


図 2: ρ/c を変化させたときのクラス 1 の客の待ち時間 ($\lambda_i = \lambda^*$, $\mu_i = 1$ ($i = 1, \dots, c$)).

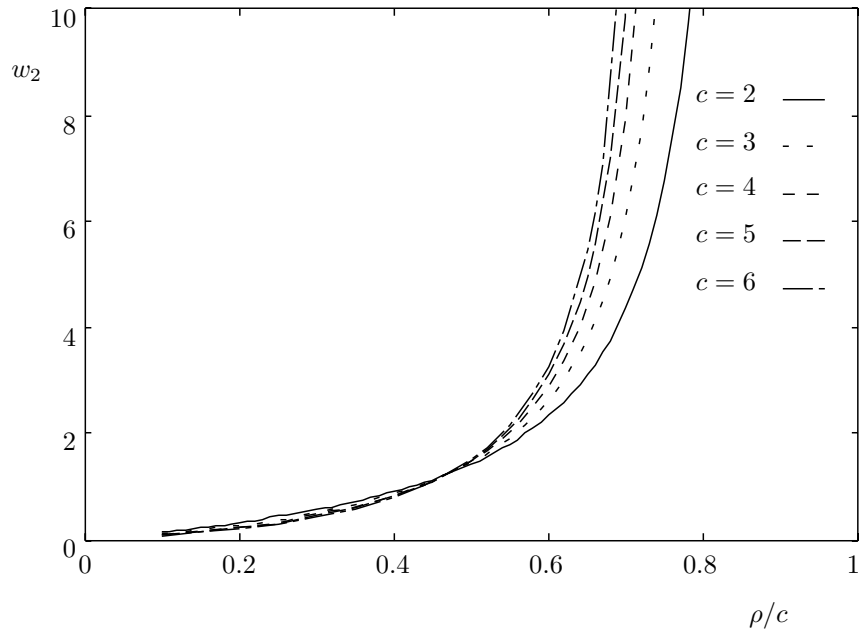


図 3: ρ/c を変化させたときのクラス 2 の客の待ち時間 ($\lambda_i = \lambda^*, \mu_i = 1 (i = 1, \dots, c)$).

4.2 実験 2

次に、各クラスの客が単位時間にシステムに持ち込む仕事量を固定したとき、特定のクラスの客の特性の変化が、各クラスの客の平均待ち時間に対して与える影響に関して考察を行った結果を以下に示す。

まず $c = 2$ の場合の結果を図 4 ~ 図 8 に示す。図 4 は、基準となる到着率とサービス率を $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1, \mu_1 = \mu_2 = 1$ とし、 ρ_1 の値を一定に保ちながら μ_1 の値を 1 から 20 まで変化させていったときの、クラス 1、クラス 2 の客それぞれの平均待ち時間を示したものである。縦軸にクラス 1、2 の客の平均待ち時間、横軸に μ_1 の値をとっている。これを見ると、 λ_1, μ_1 の値を大きくする程クラス 1、クラス 2 両方の客の待ち時間が改善されていくのがわかる。

これに対して図 5 は、基準値を $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1, \mu_1 = \mu_2 = 1$ とし、 ρ_2 の値を一定に保ちながら μ_2 の値を 1 から 20 まで変化させていったときの、クラス 1、クラス 2 の客それぞれの平均待ち時間を示したものである。縦軸にはクラス 1、2 の客の平均待ち時間、横軸には μ_2 の値をとっている。興味深い結果として、クラス 1 の客の平均待ち時間が初めは μ_2 を増やすに連れて減少していたのが、 μ_2 が 4 を越えたあたりから増加に転じているのが分かる。システムがこのような挙動を示す理由は次のように考えられる。

ρ_2 の値を一定に保ちながら μ_2 の値を増加させると、クラス 2 の客のサービス時間のばらつきが小さくなり、通常クラス 1 の客もクラス 2 の客も待ち時間は小さくなると考えられる。しかし集団待ち行列システムにおいては、クラス 2 の客の到着が増えると連続するクラス 1 の客の到着の間にクラス 2 の客の到着が割り込みやすくなり、クラス 1 の客が二人同時にサービスを受けるのが困難になると考えられる。その結果クラス 1 の客の待ち時間を大きくする作用があると考えられる。この待ち時間を大きくする作用と小さくする作用の大小関係が、 $\mu_2 = 4$ のあたりで入れ替わるため、クラス 1 の客の待ち時間がこのような挙動を示すと考えられる。

次に、同様の実験を基準値を変えて行ってみた。図 6 は基準値を $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2, \mu_1 = \mu_2 = 1$ 、図 7 は基準値を $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.3, \mu_1 = \mu_2 = 1$ 、図 8 は基準値を $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.4, \mu_1 = \mu_2 = 1$ にして同様の実験を行っ

た結果である。縦軸には平均待ち時間をとり、横軸には μ_2 の値をとった。やはりいずれの場合でも、クラス 1 の客の平均待ち時間は一度減少し、その後上昇している事が分かる。これらから、 $c = 2$ のときクラス 2 の客の ρ_2 の値を一定に保ちながら μ_2 の値を増加させると、クラス 1 の客の平均待ち時間が一度減少してその後増加する事が、集団待ち行列システム特有の性質である事が明らかになった。

また図 8 を見ると、クラス 1 の客の待ち時間の増加に連れてクラス 2 の客の待ち時間も増加しているのが分かる。この理由としては、クラス 1 の客が二人同時にサービスを受けるのを妨害する事によって、クラス 1 の客がサービスを受ける効率が悪化した影響が、今度はクラス 2 の客の待ち時間にも悪影響を及ぼしていると考えられる。

もう一つ興味深いのが、クラス 1 の客の待ち時間が増加に転じる μ_2 の値である。図 5 ~ 図 8 を見ると、システムにかかる負荷を大きくするほど、クラス 1 の客の待ち時間が早く増加に転じているのが分かる。これは、システムにかかる負荷が大きくなるほどクラス 1 の客が二人同時にサービスを受ける状態が起こりやすくなり、クラス 2 の客の到着を増やした時にクラス 1 の客のサービスを妨害する作用が強くなるためだと考えられる。

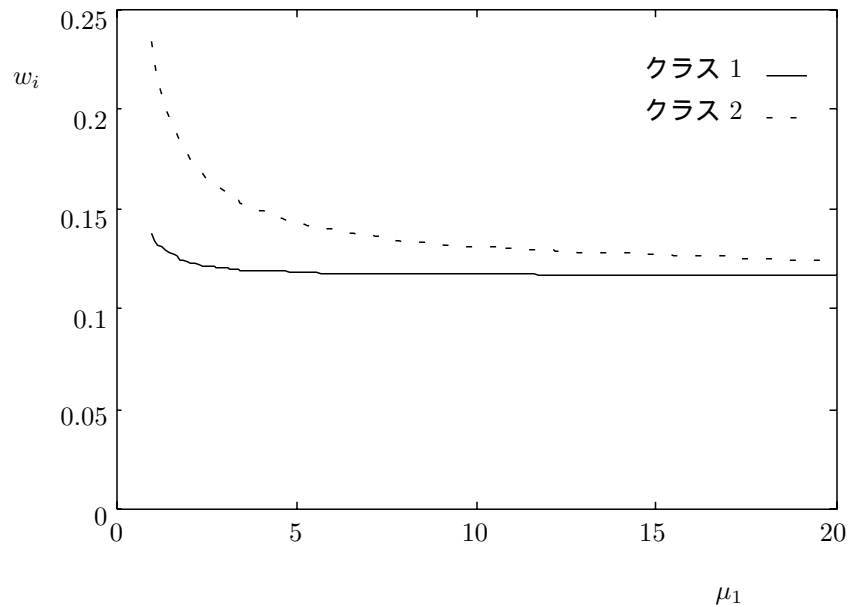


図 4: クラス 1 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 2, \rho_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.1, \mu_2 = 1$).

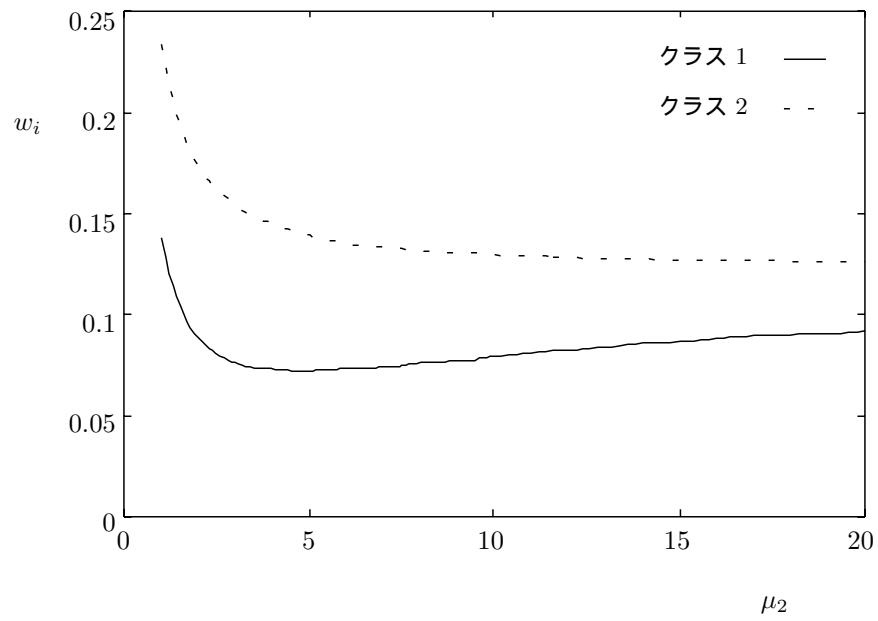


図 5: クラス 2 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 2, \rho_2 = 0.1, \lambda_1 = 0.1, \mu_1 = 1$).

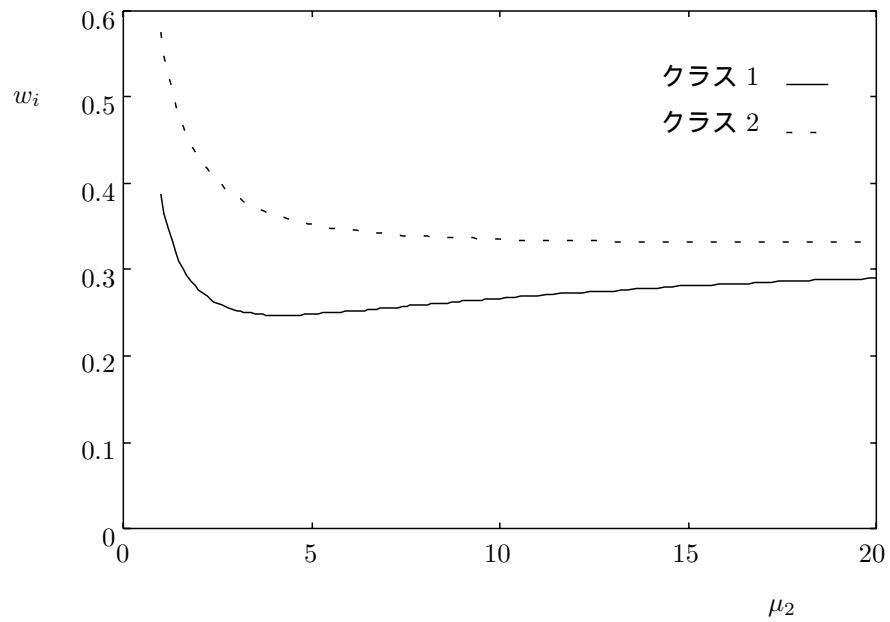


図 6: クラス 2 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 2, \rho_2 = 0.2, \lambda_1 = 0.2, \mu_1 = 1$).

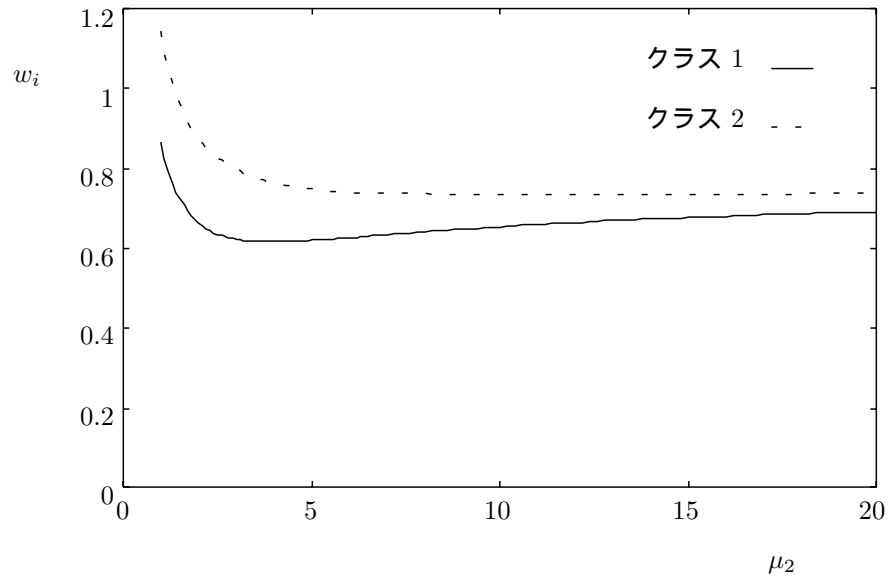


図 7: クラス 2 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 2, \rho_2 = 0.3, \lambda_1 = 0.3, \mu_1 = 1$).

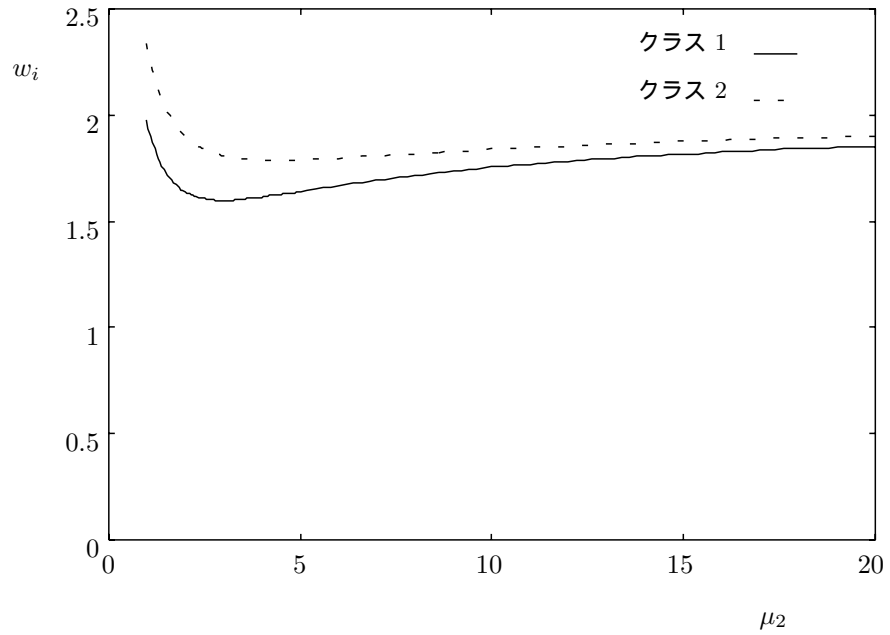


図 8: クラス 2 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 2, \rho_2 = 0.4, \lambda_1 = 0.4, \mu_1 = 1$).

次に $c = 3$ の場合の結果を図 9 ~ 図 1 1 に示す。基準値は $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ に設定して、図 9 は ρ_1 、図 1 0 は ρ_2 、図 1 1 は ρ_3 を一定に保って同様の実験を行った結果である。図 9 は横軸に μ_1 を、図 1 0 は横軸に μ_2 を、図 1 1 は横軸に μ_3 をとり、縦軸には平均待ち時間をとった。

すると、クラス 3 の客のパラメタを変化させた時に、クラス 1 とクラス 2 の客の平均待ち時間が、 μ_3 の増加に伴って一旦減少した後、再び増加するという現象が見られる。またグラフからは伺いにくいですが、クラス 2 の客のパラメタを変化させたときに、クラス 1 の客の平均待ち時間も同様の現象を示している。これらの事から集団待ち行列システムは、あるクラス i の客の ρ_i の値を一定に保って μ_i の値を増加させた場合、クラス $1, \dots, i-1$ の客の待ち時間は、 μ_i の増加に伴って、一旦減少した後再び増加に転ずる、という性質を持つ事が明らかになった。

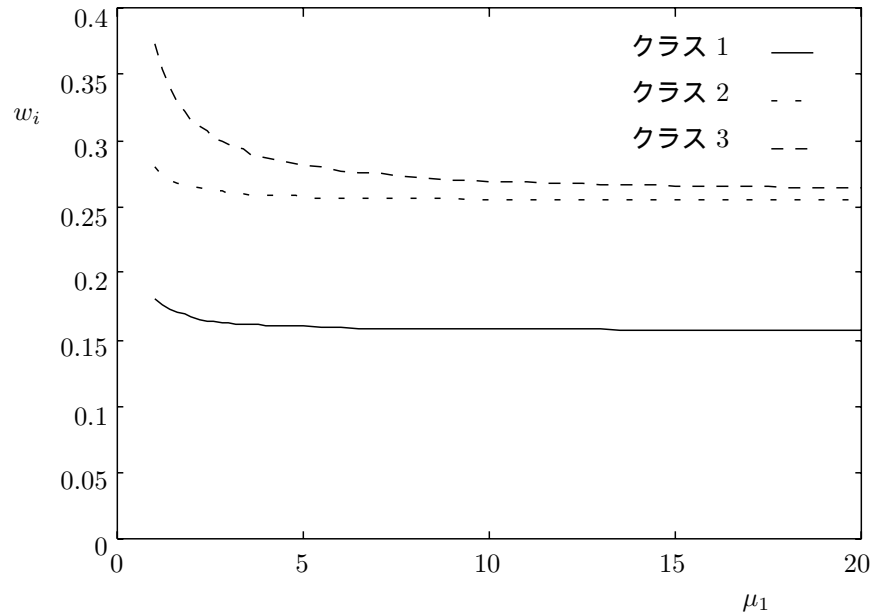


図 9: クラス 1 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 3, \rho_1 = 0.2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.2, \mu_2 = \mu_3 = 1$).

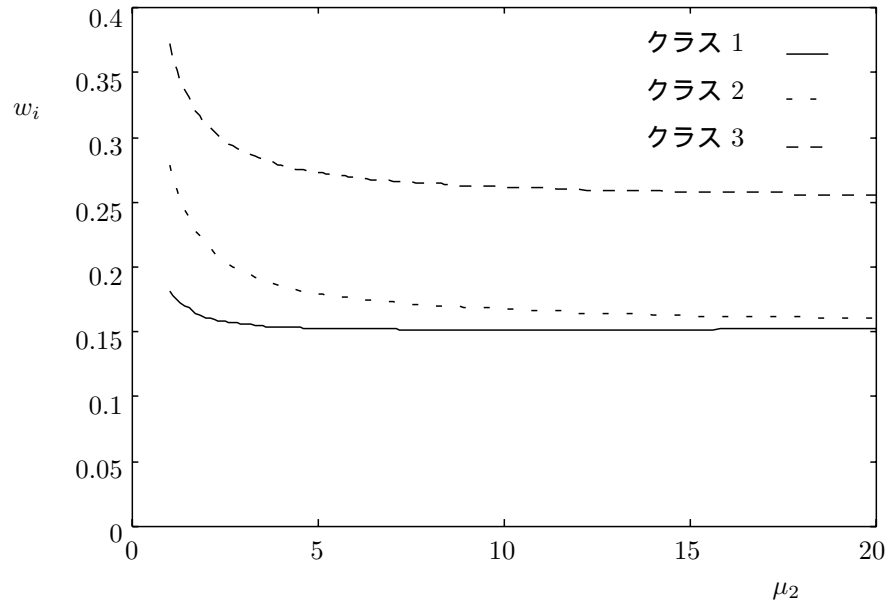


図 10: クラス 2 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 3, \rho_2 = 0.2, \lambda_1 = \lambda_3 = 0.2, \mu_1 = \mu_3 = 1$).

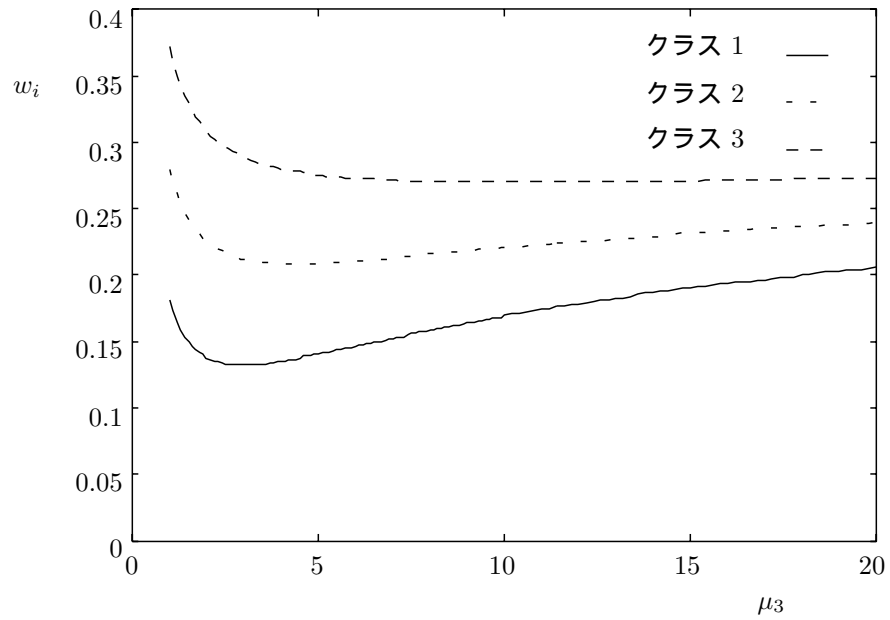


図 11: クラス 3 の客のパラメタを変化させた時の平均待ち時間 ($c = 3, \rho_3 = 0.2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.2, \mu_1 = \mu_2 = 1$).

5 結論

本報告書では、集団待ち行列システムをマルコフ連鎖行列によって記述し、定常状態確率分布を計算する計算手法を提案した。また、システムを記述するパラメタの値を変化させた時のクラスごとの客の待ち時間の変化について数値実験を行った。その結果、あるクラス i の客の ρ_i の値を一定に保ちながら μ_i の値を増やしていくと、客のクラスによって影響の受け方に違いがある事が分かった。特にパラメタを変化させたクラスより小さいクラスの客は、単調に待ち時間が減少するわけではなく、ある点を境に待ち時間は増大していくことが分かった。

集団待ち行列システムにおいては、サーバ数を増やすと状態数が爆発的に増大する。またシステムが不安定に近づくと、 G や R_a の収束が遅くなり、定常状態確率を求める計算時間が増大する。本報告書ではサーバ数が6までの計算を行っているが、今後の課題として、より多数のサーバに対しても定常状態確率が計算できるように、計算手法をさらに改善していく必要がある。

謝辞

日頃から御教授いただき、本研究にも御指導を賜った福嶋雅夫教授、並びに細部にわたり熱心に御指導して頂いた滝根哲哉助教授に心より感謝いたします。また、様々な面でお世話になりました福嶋研究室の諸先輩方に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] I. Kino, "A Batch-arrival Batch-service Queueing System," Proceedings of ITC 13, pp.671–676, Copenhagen, Denmark, June 19-26, 1991.
- [2] G. Latouche, P. A. Jacobs and D. P. Gaver, "Finite Markov Chain Models Skip-Free in One Direction," *Naval Res. Logist. Quart.*, vol.31, pp.571–588, 1984.
- [3] G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Methods in Stochastic Modeling*, ASA and SIAM, 1999.
- [4] 滝根 哲哉, "構造化されたマルコフ連鎖と待ち行列," システム / 制御 / 情報, vol.43, no.3, pp.135–140, 1999年3月.
- [5] 滝根 哲哉, "有限状態マルコフ連鎖の数値解法とその応用," preprint.