特別研究報告書

均衡制約付き数理計画問題を用いた 株式市場の人気度の推定

指導教官

福嶋 雅夫 教授

山下 信雄 助手

京都大学工学部情報学科

数理工学コース
平成９年入学

吉田 宏克

平成１３年１月３１日提出

摘要

現在，投資家は株式を始めとして債券，通貨およびそれらの派生証券など多様な資産に投資を行っている．その際，投資家はできる限り資産を減らすリスクを回避し，リターンを増やすことを考える．多くの研究者は，このような投資家の投資活動に対して様々なモデルを提案している．それらのモデルの中でも，マーコビッツが提案した平均分散モデルは実務上よく用いられている．しかしながらこのモデルに従った投資比率（ポートフォリオ）と市場から観測されるポートフォリオには幾らかの開きがある．これは実際の投資家は，理論的な根拠に基づいて投資を行っているというよりは，むしろ市場の流れ，つまりある種の人気度から投資をするからである．

本報告書では，まず各資産の人気・不人気を表すパラメータを平均分散モデルに加えたモデルを提案する．このモデルは平均分散モデルと同様に凸２次計画問題として定式化される．さらにこの問題の解，つまり投資家全体のポートフォリオが分かっているときに，このモデルのパラメータを推定する逆問題を提案する．ここで Karush-Kuhn-Tucker 条件を利用することで，逆問題を均衡制約付き数理計画問題（MPEC）として定式化する．これにより，MPEC に対して提案されている既存の手法でこの逆問題は解くことができる．そして数値実験を行い，人気・不人気を表すパラメータを求め，これらの値がどのような振る舞いをしているのかを調べた．その結果，人気を集めている資産やリスクの大きい資産を推定することができた．さらに期待収益率も同時に推定することができた．

目 次

1　序論

８０年代中頃より世界的な規制緩和の中で，金融市場の国際化，オプションをはじめとした様々な派生証券の出現，そして情報システムの高度化によって，資産運用や資産取引きなどの金融ビジネスに大きな変化が訪れた．さらに，多様な資産を組み合わせることで，リスクを回避しつつ適正なリターンを確保しようとする動きは，金融ビジネスの工学化へとつながった．そのため現在では多くの企業がこの分野における複雑で高度な知識，技術を必要としている．

金融工学における重要な概念の一つに「リスク」がある．私たちは将来起こりうることをすべて事前に知っているわけではなく，また不測の事態によって損失を被る危険を完全に避けることはできない．そのためこのようなリスクを測定かつ分析し，適切な取り組みを考えることが金融工学における重要な課題の一つである [5]．マーコビッツ [1] はリスクという概念を収益率の「分散」という明確な概念を用いて定量的に把握することを考えた．彼は「収益率の期待値が一定ならば，その分散は小さいほど望ましい」という基準を考え出し，それを数理計画問題としてモデル化して解くことを試みた．このモデルは「平均分散モデル」と呼ばれ，その後に続く投資理論の出発点を与えることになった．この平均分散モデルに従って投資家全体が投資比率（ポートフォリオ）を考えるとした場合，そのポートフォリオは以下の問題の解として与えられる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \dfrac{1}{2}x^T V x \\
\text{subject to} & r^T x \geq \alpha \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

ただし，x は投資家全体のポートフォリオ，r は収益率の平均，V は共分散行列，α は投資家が望む収益率の期待値を表す.

この問題は凸２次計画問題であるため，かなり大規模な問題でも解くことができる．しかしながら平均分散モデルに従った投資家全体の理想的なポートフォリオと，実際に市場において観測されるポートフォリオは必ずしも一致しない．これは投資家は，各資産の価値の変動や企業の経営状態以外にも，ときとして人気度を考慮して資産配分を決定するからである．また意識せずに市場の人気の影響を受けて，ある資産には少なくとも１０％以上の投資をするとか，別の資産にはたかだか５％の投資しかしないというようなことを決定している場合がある．このことを考えると，上記の問題の制約条件に

$$\beta_i \leq x_i \leq \gamma_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

という式が実際には付け加えられているはずである．この β_i と γ_i は，投資家が資産 i の人気の影響を受けて β_i から γ_i の範囲でポートフォリオを考えることを意味する．しかしながら市場全体の人気度を表すパラメータ α, β および γ を知ることは困難である．

本報告書では，市場から観測されるデータに基づいて，どの資産に人気が集中しているのか (β)，またどれが不人気なのか (γ) ということを推定し，それと同時に，投資家全体はどれくらいの収益率の期待値 (α) を考えて投資を行っているのかということも推定する手法を提案する．そのためにまずマーコビッツが考えた平均分散モデルを参考に，α, β, γ をパラメータとして含む平均分散モデルを考える．一方でその問題の解が分かっているときに，それと市場から観測されるポートフォリオとの差を最小とするパラメータを求める逆問題を考える．このとき，この逆問題は平均分散モデルを下位レベルとした２段階数理計画問題 [2] として定式化ができる．そして平均分散モデルの Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件)[4,7] を考えることで，２段階数理計画問題を均衡制約付き数理計画問題 (Mathmatical Programs with Equilibrium Constraints,MPEC) として定式化し，それを MPEC の解法として提案されている分枝限定法 [3] で解くことを提案する．さらに既存のデータを用いて数値実験を行い，投資家の考えるポートフォリオとパラメータ α, β, γ を求める．

本報告書は以下のように構成されている．まず２章では本報告書で扱うパラメータ β, γ を含む平均分散モデルと MPEC について説明をする．３章ではその平均分散モデルのパラメータを推定する逆問題を MPEC として定式化をする．そして４章では実際に数値実験を行い，パラメータを求める．さらに５章ではその実験で求めたパラメータに対する考察を行う．

2　準備

この章では本報告書における議論を展開するために必要な平均分散モデルと MPEC，それから MPEC の解法について説明をする．

2.1　平均分散モデル

n 種の資産 $S_i (i = 1, \cdots, n)$ が取引きされている株式市場において，投資家がある一定の期間に資産を運用する状況を考える．

ここで記号を以下のように定義する．

x_i ：S_i への投資比率（ポートフォリオ）

R_i ：S_i の単位期間当りの収益率

r_i ：R_i の平均

σ_{ik} ：R_i と R_k の共分散

マーコビッツ [1] は，投資家の行動は「収益率の期待値 (リターン）が一定ならば，その分散（リスク）は小さいほど望ましい」という自らが考えた基準に従うはずだと考え，収益率の期待値を一定の値 α に固定したとき，分散をどこまで小さくできるかを調べるために次の問題を解くことを提案した．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}x_i x_k \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq \alpha \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, n)
\end{array}
\tag{1}
$$

この問題 (1) を平均分散モデルという．しかし，本報告書では投資家全体は資産の人気度の影響を受けてポートフォリオを決定する場合があると考える．つまり，ある資産に対しては 10 %以上の投資をするとか，また別の資産にはせいぜい 20 %までしか投資をしないという制限が与えられていると考える．従ってここでは制約条件の中に各資産の人気度を表す値として，パラメータ β, γ を用いた式 $\beta_i \leq x_i \leq \gamma_i, (i = 1, \cdots, n)$ を加えた以下のモデルを扱う．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}x_i x_k \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq \alpha \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & \beta_i \leq x_i \leq \gamma_i, \quad (i = 1, \cdots, n)
\end{array}
\tag{2}
$$

2.2 2段階数理計画問題と MPEC

2段階数理計画問題とは以下のような問題である．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_1(x,y) \\
\text{subject to} & (x,y) \in X \\
& \begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_2(x,y) \\
\text{subject to} & g_i(x,y) \le 0, \quad (i=1,\cdots,m) \\
& h_j(x,y) = 0, \quad (j=1,\cdots,n)
\end{array}
\end{array}
\tag{3}
$$

仮に下位レベルの問題が凸計画問題で最適解があるならば，問題 (3) の下位レベルの問題を解くことと，その問題の KKT 条件を満たす点を求めることとは等価である．従って問題 (3) の下位レベルの問題を KKT 条件で置き換えることにより，以下の MPEC として定式化することができる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_1(x,y) \\
\text{subject to} & (x,y) \in X \\
& \nabla f_2(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x,y) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nabla h_j(x,y) = 0 \\
& \mu_i \ge 0, \quad g_i(x,y) \le 0, \quad \mu_i g_i(x,y) = 0, \quad (i=1,\cdots,m) \\
& h_j(x,y) = 0, \quad (j=1,\cdots,n)
\end{array}
\tag{4}
$$

本報告書では α, β, γ をパラメータに持つ平均分散モデル (2) が問題 (3) の下位レベルの問題である．そしてこの問題の解が分かっているとき，そのパラメータを推定する逆問題を 2 段階数理計画問題として定式化する．

問題 (4) は Jeroslow[3] によって NP 困難であることが証明されている．しかしながら目的関数 f_1 が凸で，不等式制約 g と等式制約 h が線形関数で与えられているときには，Bard と Moore によって提案された分枝限定法 [3] を用いてこの問題を解くことができる．

2.3 MPEC の解法

この節では MPEC の解法の一つである分枝限定法について説明する．ここで扱う MPEC は，目的関数が線形で均衡制約として線形相補性条件を持つ以下の問題である．

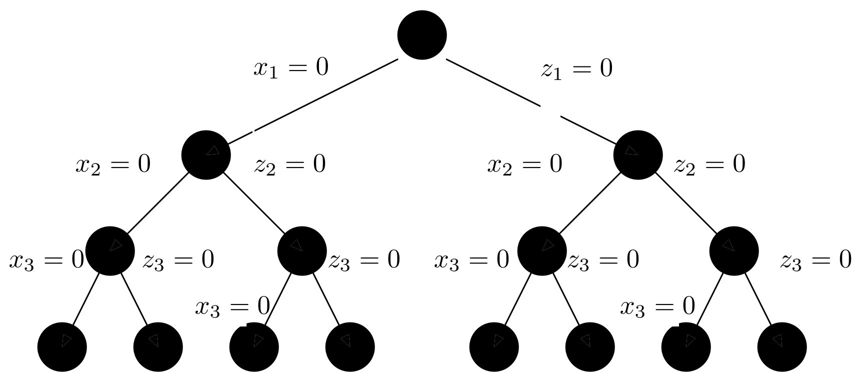
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f(x,y) = c^T x + d^T y \\
\text{subject to} & Ax + By = b, \quad y \ge 0 \\
& z = Mx + Ny + q \\
& x_i \ge 0, z_i \ge 0, x_i z_i = 0, \quad (i=1,\cdots,m)
\end{array}
\tag{5}
$$

なお，x, y, z は $x \in \Re^m, y \in \Re^n, z \in \Re^m$ であり，M, N は $M \in \Re^{m\times m}, N \in \Re^{m\times n}$ の実行列，q は $q \in \Re^m$ の実ベクトルである．また $\mathcal{F}$ を問題 (5) の実行可能集合とする．この問題は

制約の中に相補性条件 $x_iz_i = 0, (i = 1, \cdots, m)$ がなければ凸計画問題である．一方，制約条件 $x_i \geq 0, z_i \geq 0, x_iz_i = 0, (i = 1, \cdots, m)$ より，x_i, z_i のどちらかは必ず 0 になる．そのため，どちらが 0 になるか分かっていれば，この問題は容易に解くことができる．しかしながらこの組み合わせは 2^m 個あるため，すべての組み合わせに対して問題を解くことは事実上は不可能である．Bard と Moore[3] はどちらが 0 になるかを効率よく決定するアルゴリズムとして，MPEC に対する分枝限定法を提案した．

分枝限定法のアルゴリズムでは，最初に問題 (5) から相補性条件 $x_iz_i = 0,\ (i = 1, \cdots, m)$ を除いた問題を解き，求めた解が $x_iz_i = 0,\ (i = 1, \cdots, m)$ を満足していればそれを最適解とする．そうでなければ以下のようなツリーモデルを扱うことにより，全ての i に対して $x_iz_i = 0$ となるような解を探す． 問題 (5) の制約の中にある相補性条件 $x_iz_i = 0, (i = 1, \cdots, m)$ において，x_i, z_i の

図１：ツリーモデル（３変数の場合）



どちらかは必ず 0 になる．そこで $x_i = 0$ になるときと $z_i = 0$ になるときとで場合分けをし，下に２つの場合のノードを生成する．これを繰り返すことで，ノードを次々に生成していく．しかしながら次元数が増加すると場合の数が指数的に増加するので，ノードをカットしたり，枝を探索する順序を工夫することで効率的に計算を行う必要がある．ここで，各ノードにおける集合 J を $x_i = 0$ と固定する x の要素 i の集合とする．同様に，集合 L を $z_j = 0$ と固定する z の要素 j の集合とする．図 2 にその例を示す．この例では，一番左下のノードにおいて $J = \{1, 3\}, L = \{2\}$ となっている．

次に分枝限定法のアルゴリズムの準備をする．集合 η^n を $\{1, \ldots, n\}$ とし，$I \subset \eta^n$ に対して $\bar{I} := \eta^n \backslash I$ とする．ベクトル $x \in \Re^m$ に対し，$x_J \in \Re^{|J|}$ を x の第 j 要素 $(j \in J \subset \eta^n)$ からなるベクトルとする．また集合 $J \subset \eta^n$ と行列 $A \in \Re^{n \times n}$ に対し，$A^J \in \Re^{n \times |J|}$ を A の $j \in J$ 列目から構成される行列とする．次に集合 $S(M^J, I^L)$ を次のように定義する．

$$S(M^J, I^L) = \{(x, y, z) \mid Ax + By = b,\ z = Mx + Ny + q,\ x_J = 0,\ z_L = 0\}$$

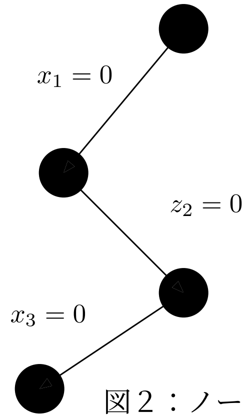


図２：ノードの説明 (3 変数の場合)

ただし，J, L は $J, L \subset \eta^m$ である．このときあきらかに $\bigcup_{J \cup L = \eta^m} S(M^J, I^L) = \mathcal{F}$ が成り立つ．さらに問題 Q, R を以下のように定める．

$$\begin{array}{lcll} Q(J, L, \xi_1, \xi_2) & : & \text{minimize} & \xi_1^T x + \xi_2^T z \\ & & \text{subject to} & (x, y, z) \in S(M^J, I^L) \\ R(J, L) & : & \text{minimize} & f(x, y) = c^T x + d^T y \\ & & \text{subject to} & (x, y, z) \in S(M^J, I^L) \end{array} \tag{6}$$

ここで問題 Q において $\xi_1 = e_i, \xi_2 = 0$ としたときは，$S(M^J, I^L)$ 上で x_i を最小化する問題となる．そのためこの問題を解くことで，$S(M^J, I^L)$ 上で x_i を 0 とすることができるかどうか，つまり $S(M^{J \cup \{i\}}, I^L)$ が実行可能かどうかのチェックをすることができる．同様に，$\xi_1 = 0, \xi_2 = e_i$ とすれば $S(M^J, I^{L \cup \{i\}})$ の実行可能性のチェックができる．また問題 Q は線形計画問題である．一方，$R(J, L)$ は $x_J = 0, z_L = 0$ と固定した MPEC の緩和問題となっている．

以下に各ノード (J, L) にて行う処理 (ア),(イ) を説明する．

(ア):実行可能性のチェック 正の値になった $x^T z$ の中から $x_a z_a$ が最も大きい添字 a を選ぶ．そして 2 つの問題 $Q(J, L, e_a, 0), Q(J, L, 0, e_a)$ を解く．目的関数値が 0 より大きければ，ノード $(J \cup \{a\}, L)$ または $(J, L \cup \{a\})$ は実行不可能であるため，そのノードをカットする．

(イ):下界値のチェック ノード (J, L) に対し，部分問題 $R(J, L)$ を解く．この $R(J, L)$ の最適値 ϕ はノード (J, L) の下に生成される部分問題の下界値である．現在の暫定最適値を θ としたとき，$\phi \geq \theta$ ならばノード (J, L) の下に最適解はないので，このノードをカットする．もし部分問題 $R(J, L)$ の解が $x^T z = 0$ を満たしており，$\phi < \theta$ ならば暫定最適値を $\theta := \phi$ とする．

分枝限定法は探索するノードがなくなれば終了である．以上をまとめたアルゴリズムを以下に記す．

MPEC に対する分枝限定法 [アルゴリズム]

Step1: $k := (\emptyset, \emptyset)$ とする．問題 $R(\emptyset, \emptyset)$ の実行可能領域が空ならば，MPEC には実行可能解が存在しないので終了する．そうでないときは，問題 $R(\emptyset, \emptyset)$ を解き，その最適解を $(\bar{x}^k, \bar{y}^k, \bar{z}^k)$，最適値を θ_k とする．また MPEC の最適値の下界値を $\theta := \theta_k$ とする．もし，$(\bar{x}^k)^T \bar{z}^k = 0$ ならば最適解が得られているので終了する．そうでなければ，現在のノード集合を $\tau := \{k\}$ とし，MPEC の暫定最適値を $\phi := \infty$ として *Step2* へ．

Step2: $\tau = \emptyset$ ならば暫定最適解を MPEC の最適解として終了する．そうでなければ

$s := \arg\min\{(\bar{x}^t)^T \bar{z}^t \mid t \in \tau\}$ を選び，$\tau := \tau \backslash \{s\}$ として *Step3* へ．

Step3: $s = (J, L)$ に対して，$\alpha = \arg\max\{\bar{x}_i^s \bar{z}_i^s \mid i \in \bar{J} \cap \bar{L}\}$ を求める．次に $Q(J_s, L_s, e_\alpha, 0)$ と $Q(J_s, L_s, 0, e_\alpha)$ を初期点 $(\bar{x}^s, \bar{y}^s, \bar{z}^s)$ として解き，それぞれの最適解を $(x^l, y^l, z^l), (l = (J \cup \{\alpha\}, L),\ (J, L \cup \{\alpha\}))$ とする．それぞれの l について $x_\alpha^l = 0$ ならば部分問題 $R(J \cup \{\alpha\}, L),\ R(J, L \cup \{\alpha\})$ を生成し，$\tau := \tau \cup \{l\}$ として *Step4* へ．

Step4: *Step3* で生成された部分問題 $R(J, L)$ に対して，以下の *(a)(b)* を実行する．ここで $l := (J, L)$ とする．

- **(a):** $(x^l)^T z^l = 0$ のとき (x^l, y^l, z^l) における $R(J, L)$ の目的関数の値 ϕ_l に対して，$\phi_l < \phi$ が成立していたら $(x^*, y^*, z^*) := (x^l, y^l, z^l), \phi := \phi_l$ と暫定最適解，暫定最適値をそれぞれ更新する．
- **(b):** 問題 $R(J, L)$ を解き，その最適解を $(\bar{x}^l, \bar{y}^l, \bar{z}^l)$，最適値を θ_l とする．

  もし $\theta_l \geq \phi$ ならば，緩和問題の下界値が暫定最適値以上であることを意味しているので，$\tau := \tau \backslash \{l\}$ としてこの部分問題を終えて *Step5* へ．

  もし $\theta_l < \phi$ のとき，$(\bar{x}^l)^T \bar{z}^l = 0$ ならば暫定最適解を $(x^*, y^*, z^*) := (\bar{x}^l, \bar{y}^l, \bar{z}^l)$，暫定最適値を $\phi = \theta_l$ としたのち $\tau := \tau \backslash \{l\}$ としてこの部分問題を終えて *Step5* へ．

Step5: 部分問題の緩和問題の下界値が暫定最適値以上となる部分問題を終える．つまり，$\tau := \tau \backslash \{t \mid \theta_t \geq \phi, t \in \tau\}$ とする．また MPEC の下界値を $\theta := \min\{\theta_t \mid t \in \tau\}$ として *Step2* へ．

3 資産運用におけるモデル化

この章では，2.1 節で考えた平均分散モデル (2) のパラメータ α, β, γ を推定する数理計画モデルを提案する．まず最初に，本報告書で提案している平均分散モデル (2) においてこの問題の解, つまり投資家の考えるポートフォリオが分かっているとする．そのときにパラメータ α, β, γ を推定

するような逆問題を2段階数理計画問題として定式化する．そしてこの逆問題をKKT条件を利用することでMPECとして定式化する．

3.1 問題の定式化

投資家全体は本報告書で提案している平均分散モデル

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}x^T V x \\ \text{subject to} & r^T x \geq \alpha \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & \beta_i \leq x_i \leq \gamma_i, \quad (i = 1, \cdots, n) \end{array} \tag{7}$$

に従ってポートフォリオを組むものとする．ただし，x, r は $x = (x_1, \cdots, x_n)^T, r = (r_1, \cdots, r_n)^T$ のベクトル，V は σ_{ik} $(i, k = 1, \cdots, n)$ を要素とする共分散行列である．本来ならばパラメータ α, β, γ が与えられたとき，投資家のポートフォリオは問題 (7) を解くことで求めることができる．一方で，投資家全体が平均分散モデル (7) に従っているので，問題 (7) の解 x と実際に市場から観測される投資家全体のポートフォリオ $\bar{x}$ は等しくなるはずである．また，各資産の人気度とは関係なしに投資家全体がマーコビッツの提案する平均分散モデル (1) に従っているとすれば，人気度を表すパラメータ β_i, γ_i の値はそれぞれ0,1としても $x \approx \bar{x}$ となるはずである．よってこれらのことを考慮すると，$c\|\bar{x} - x\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n}(1 - \gamma_i)$ を最小とするような β_i, γ_i を求めれば，それが市場から観測される人気度と考えることができる．ここで $\|\cdot\|_1$ は1ノルムを表し，c は十分大きい正の定数である．以上のことより，$\bar{x}$ が与えられたときに α, β, γ を求める逆問題は，問題 (7) を下位レベルとした次の2段階数理計画問題として定式化される．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c\|\bar{x} - x\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n}(1 - \gamma_i) \\ \text{subject to} & \beta_i \geq 0 \\ & \gamma_i \leq 1, \quad (i = 1, \cdots, n) \\ & x \text{ は問題 (7) の解} \end{array} \tag{8}$$

次節ではこの問題 (8) をMPECへと定式化する．

3.2 KKT 条件を用いた MPEC への定式化

問題 (7) に最適解が存在すると仮定すると，これは凸計画問題であることから，問題 (7) を x について解くことと，問題 (7) に対する次の KKT 条件を満たす x, μ, λ, u, v を求めることは等価である．

$$
\begin{aligned}
& Vx - \mu + \lambda - ur + ve = 0 \\
& \mu \geq 0, \quad \beta - x \leq 0, \quad \mu^T(\beta - x) = 0 \\
& \lambda \geq 0, \quad x - \gamma \leq 0, \quad \lambda^T(x - \gamma) = 0 \\
& u \geq 0, \quad \alpha - r^T x \leq 0, \quad u(\alpha - r^T x) = 0 \\
& e^T x - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ただし， μ, λ, u, v は $\mu \in \Re^n, \lambda \in \Re^n, u \in \Re^1, v \in \Re^1$ のラグランジュ乗数である．よって，2.2 節で紹介した 2 段階数理計画問題から MPEC への定式化を考えると，問題 (8) は次の問題になる．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & c \|\bar{x} - x\|_1 + \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i) \\
\text{subject to} \quad & \beta_i \geq 0 \\
& \gamma_i \leq 1, \quad (i = 1, \cdots, n) \\
& Vx - \mu + \lambda - ur + ve = 0 \\
& \mu \geq 0, \quad \beta - x \leq 0, \quad \mu^T(\beta - x) = 0 \\
& \lambda \geq 0, \quad x - \gamma \leq 0, \quad \lambda^T(x - \gamma) = 0 \\
& u \geq 0, \quad \alpha - r^T x \leq 0, \quad u(\alpha - r^T x) = 0 \\
& e^T x - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

この問題は $\|\bar{x} - x\|_1$ が微分不可能であるため扱いにくい．そこで $|\bar{x}_i - x_i| \leq t_i \ (i = 1, \cdots, n)$ を満たす t_i を導入する．このとき，

$$
\bar{x}_i - x_i \leq t_i, \quad -\bar{x}_i + x_i \leq t_i, \quad (i = 1, \cdots, n)
$$

が成立する．さらに

$$
\|\bar{x} - x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i - x_i| \leq e^T t
$$

となる．ここで $t = (t_1, \cdots, t_n)^T$ である．この t を用いて問題 (10) を再定式化すると以下の問題になる．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & ce^T t + e^T \beta - e^T \gamma + n \\
\text{subject to} \quad & \bar{x} - x \leq t \\
& -\bar{x} + x \leq t \\
& \beta_i \geq 0 \\
& \gamma_i \leq 1, \quad\quad (i = 1, \cdots, n) \\
& Vx - \mu + \lambda - ur + ve = 0 \\
& \mu \geq 0, \quad \beta - x \leq 0, \quad \mu^T(\beta - x) = 0 \\
& \lambda \geq 0, \quad x - \gamma \leq 0, \quad \lambda^T(x - \gamma) = 0 \\
& u \geq 0, \quad \alpha - r^T x \leq 0, \quad u(\alpha - r^T x) = 0 \\
& e^T x - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

この問題は目的関数が線形で，線形相補性条件を制約に持つ MPEC である．従って 2.3 節で紹介した分枝限定法で解くことができる．

4 数値実験

この章は過去の株式データを用いて，パラメータ α, β, γ を推定した数値実験の説明と結果を報告する．

4.1 実験の説明

使用したデータは，過去 1998 年 7 月から 2000 年 11 月までの 32 種の業種別の時価総額データと投資比率データである．ただし分枝限定法では大規模な問題を扱うことができないため，関連の深い業種をまとめることによって 15 種に絞った．それを表 1 に示す．

本実験では投資家全体は過去の一定の期間（ここでは 12ヶ月間とする）の株価の収益率を参考にして，収益率の平均及び分散を推定していると仮定する．例えば，投資家は 1999 年 1 月から 2000 年 1 月までの株価の変動から次の 2000 年 2 月のポートフォリオを決定するものとする．従って問題 (11) における収益率の平均のベクトル r と共分散行列 V は以下のようにして求めることができる．ある時期 t における業種 $S_i (i = 1, \ldots, 15)$ の株価の合計値を a_{it} とすると，そのときの収益率 R_{it} は

$$R_{it} = (a_{it+1} - a_{it})/a_{it} \quad (t = 1, \cdots, 12)$$

となるので，業種 S_i の収益率の平均 r_i は

$$r_i = \sum_{t=1}^{12} R_{it}/12$$

となる．さらに業種 S_i と S_k の共分散 σ_{ik} は

$$\sigma_{ik} = \sum_{t=1}^{12}(R_{it} - r_i)(R_{kt} - r_k)/12$$

として与えられる．また目的関数の重みである c の値は 1,10,100 と変化させて実験する．

本実験では一ヶ月ずつずらした１年間のデータ毎に r, V を推定し，全部で 16 個 (1999/8 ～ 2000/11) のケースについてそれぞれ問題 (11) を解き，パラメータ α, β, γ を求めた．そして 15 期間に渡るパラメータの推移の様子を調べた．

なお本実験は，サンマイクロシステムズ社の SUN ULTRA 1 上で，UNIX SunOS 5.5.1 の環境のもと，C 言語を用いてプログラミングを行い，さらに京都大学の田島潤氏提供の分枝限定法のプログラムを使用した．

表１

番号	業種	番号	業種
1	機械	9	運送 (陸運，海運，空運)
2	電機	10	卸売り (卸売り，小売り)
3	その他の製品	11	金融 (銀行，証券，保険)
4	通信	12	不動産
5	輸送機	13	建設
6	化学	14	サービス
7	医薬品	15	電気, ガス
8	食料品	–	———

4.2　実験結果

図３は実験によって求めた投資家が考える収益率の期待値 α の値と東証株価指数をグラフ化したものである．縦軸は年換算した収益率を表す．つまり求めた α に対して $\alpha := (\alpha+1)^{12} - 1$ としたものである．次にそれぞれの業種別の β の値を図４，５で表す．さらに問題 (11) のラグランジュ乗数である μ の値の一部を図６に表す．また，通信と化学を取り上げ，β, x, μ の推移の様子を図７，８にそれぞれ表した．なお γ の値は全て 1.00 となった．また c はどの値でも結果に変化はなかった．

図３：αと東証株価指数の推移

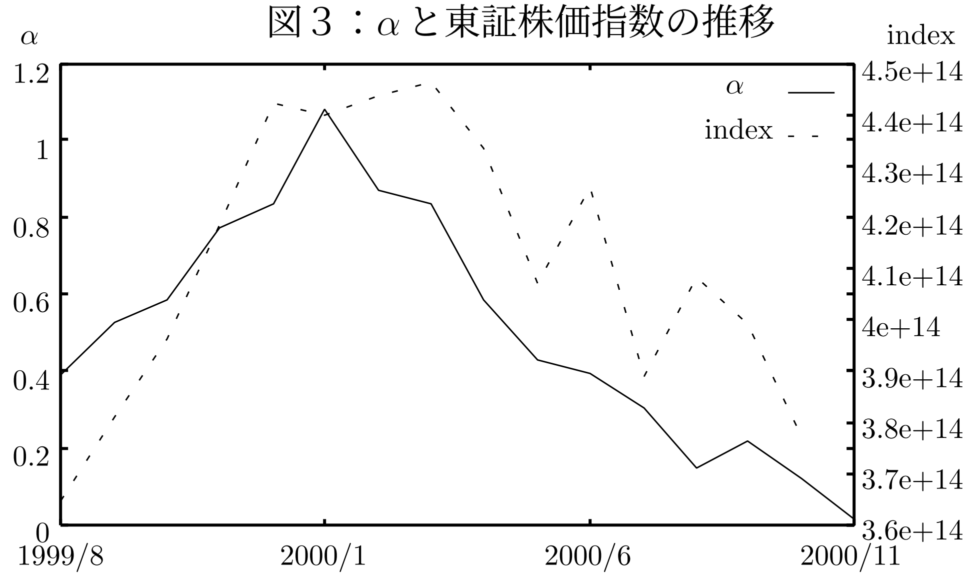


図４：βの推移１

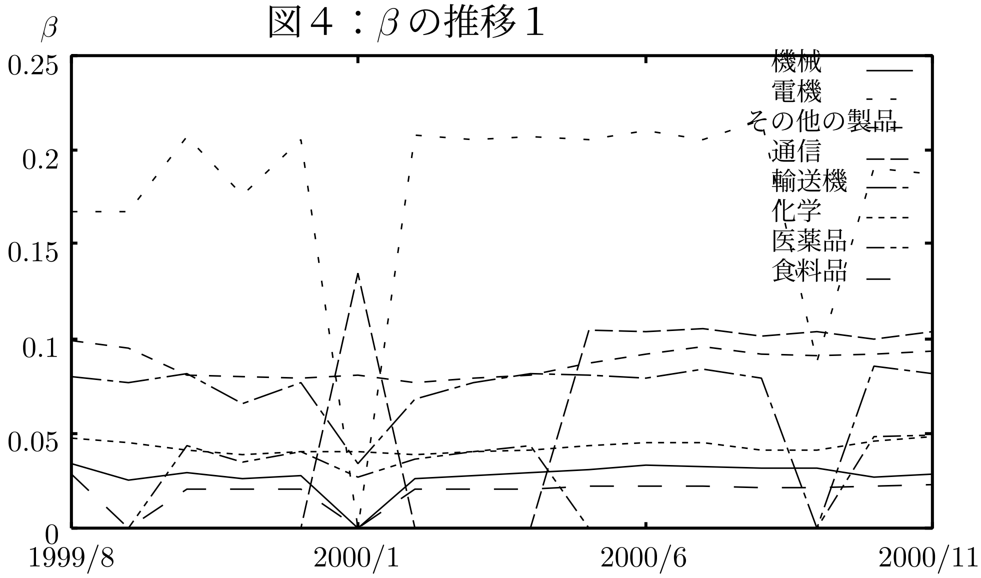


図５：βの推移２

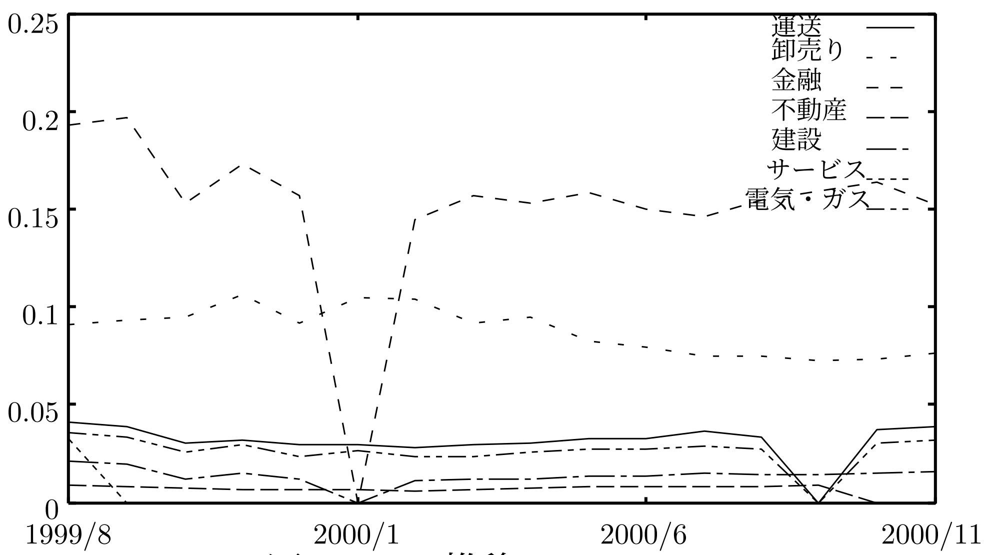


図６：μの推移

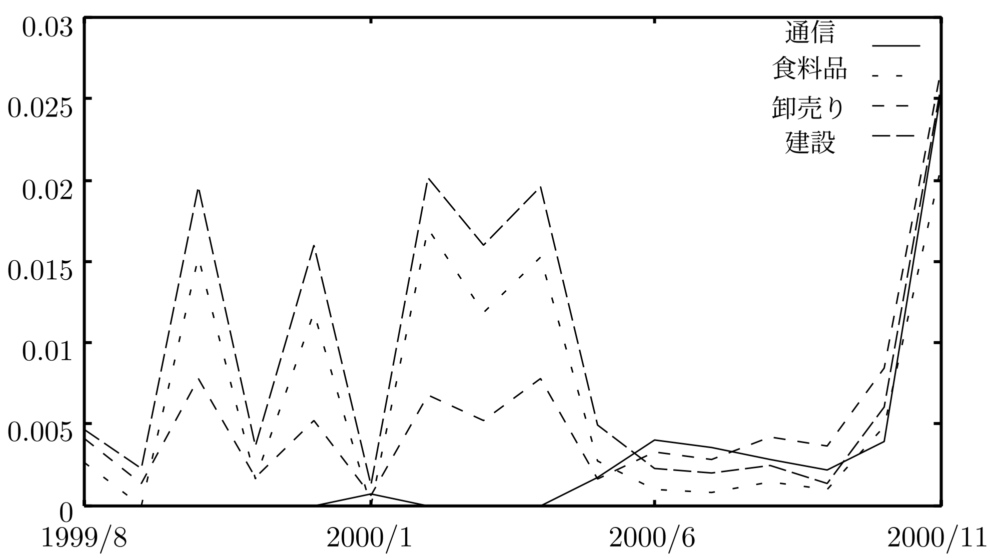


図７：通信の推移

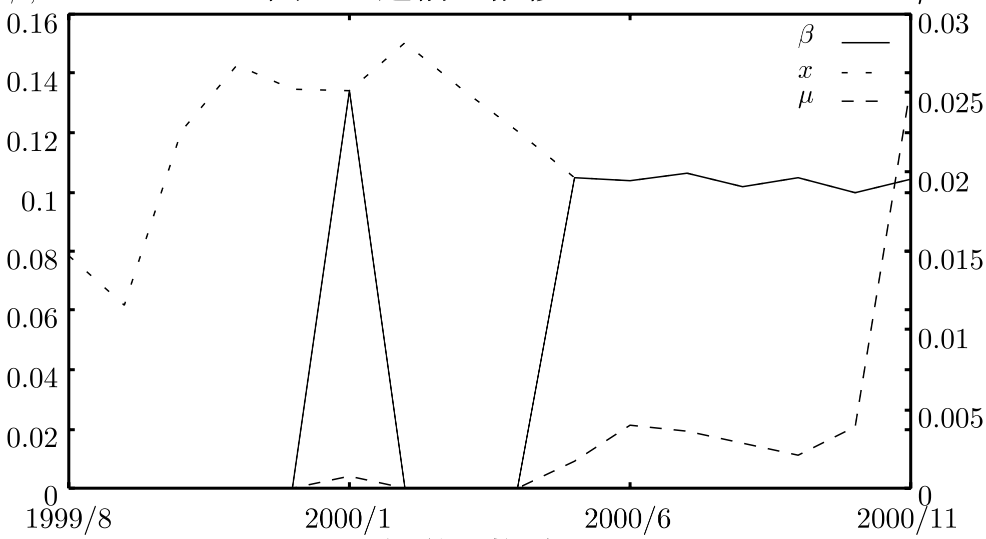
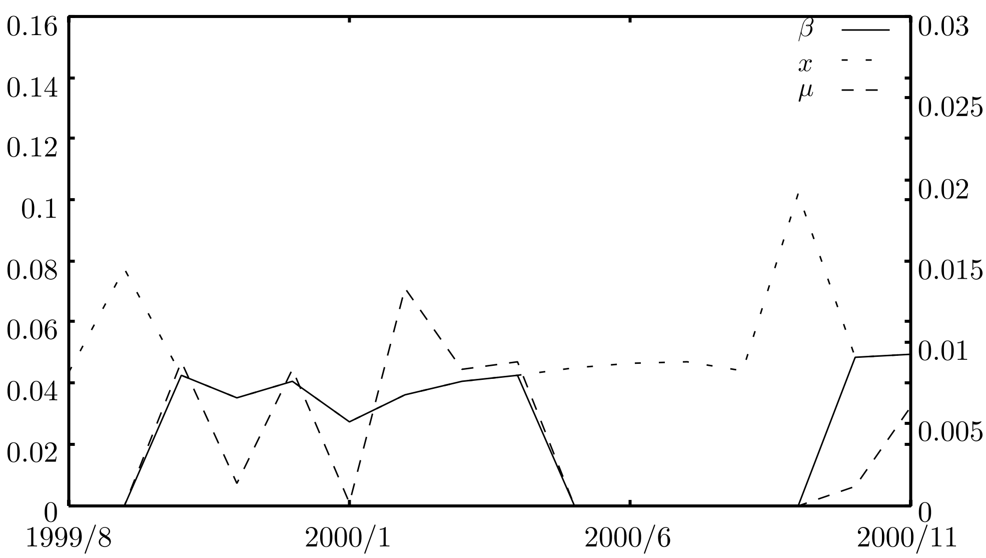


図８：化学の推移



5　考察

まず始めに投資家全体の望む収益率の期待値 α に関して考察をする．図３をみると 1999 年８月から 2000 年１月にかけて数値が上昇し，それ以降は低下している様子がわかる．株価が上昇しているときには収益率 r は正の値をとる．そのため東証株価指数が増加しているときには α もそれに伴って増加しているのは容易に理解できる．一方で株価が減少しているときは収益率 r は負の値をとるので，本来ならば α も負の値になるはずであるが，図３では徐々に低下しているだけで，負の値にはなっていない．この原因は，投資家は株価が減少しているときは株を所持しないはずだが，実際には市場から観測されるポートフォリオ $\bar{x}$ は必ず正の値をとっているためである．こ

のため，投資家全体は株式市場から正の収益率を期待している必然性がある．しかしながら株価が全体的には低下しているので，α も必然的に小さくなっている．

次に β は x か 0 に等しくなるが，それは図7，8から確認できる．$\beta = x$ の時期では，投資家はその業種に対して少なくとも β のポートフォリオを考えたことになり，このときその業種は人気していたことを意味する．例えば通信では 2000 年 5 月以降，化学では 1999 年 10 月から 2000 年 4 月までが人気していた時期である．

ラグランジュ乗数 μ は潜在価格（シャドウプライス）で，この値が大きい制約条件ほど，問題 (7) における影響度が大きいことを意味する．つまり μ の値は，目的関数である分散の値がどの程度変化するのかを示すものである．よってこの値が大きい業種はリスクの高い資産であることがわかる．図6からは例えば通信の分野は低い値をとっており，この業種はリスクの低い資産であることが分かる．また他の卸売り，食料品，建設は 1999 年 9 月から 2000 年 3 月にかけて高い数値を示しており，この時期にはリスクの高い資産であったことが分かる．さらに 2000 年 10 月にはどの業種も高い数値を示した．このとき投資家はどの業種にもリスクが大きいにもかかわらず投資をしていたことが言える．

6 結論

本報告書では，提案した問題を MPEC として定式化することで，投資家の望む収益率の期待値 (α) と各業種の人気度 (β, γ)，それからリスクの高い業種 (μ) を求めた．この結果より，投資家の間で人気している資産や，リスクの高い資産はどれなのかということを調べることができた．しかし，実際の市場で扱われている資産の数は非常に多く，さらに業種数を増やして実験を行う必要がある．そのために，より大きな次元を扱うことのできる MPEC の解法を構築する必要がある．また大規模な問題を扱うときには別の問題に定式化するといったことも考える必要がある．

それから α の導出に関しては，本来，株が値下がりをしたときには投資家は株を買うことを控えるはずだが，本実験ではこのことを考慮していない．今後はその点をふまえて実験を行う必要がある．また今回の実験では投資家は過去 12ヶ月のヒストリカルデータから投資をするものと仮定したが，実際の投資家は毎日の株価の変動に対して敏感に反応するものと考えられる．よって収益率の平均 r と分散 V の値をどのように推定するかも重要な課題である．

謝辞

日頃からご教授頂き，本研究にも適切な御指導を賜った福嶋雅夫教授，並びに本報告書を作成するに当り，細部に至るまで数多くの助言と御指導を頂いた山下信雄助手に感謝します．さらにデータを提供して下さった甲斐良隆氏や，お世話になった滝根哲哉助教授を始めとする福嶋研究室の諸先輩方に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] 今野 浩，理財工学 I，日科技連，1995.

[2] J.Fortuny and B.McCarl, "A pepresentation and economic interpretation of a two-level programming problem", Journal of operational research society vol.32, no.9 (1981), pp. 783-792.

[3] J.F.Bard and J.T.Moore, "A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem", Society for industrial and applied mathematics vol.11, no.2 (1990), pp. 281-292.

[4] 福嶋 雅夫，数理計画入門，浅倉書店，1996.

[5] 野口 悠紀雄，金融工学こんなに面白い，文春新書，2000.

[6] 今野 浩，実践数理計画法，共立出版，1997.

[7] 茨木 俊秀・福嶋 雅夫，最適化の手法，共立出版，1997.