特別研究報告書

条件付きVaRを用いた貸し出し金利の決定法

指導教官

福島　雅夫　教授
山下　信雄　助手

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成10年入学

沓名 拓郎

平成14年1月31日提出

摘要

金融機関が融資をしたり，債権を発行したりする際，融資先の信用リスクをどのように扱うかは重要な問題である．信用リスクの評価基準として，民間の格付機関が発行する「格付」があるが,「主要な少数の格付会社の影響力が大きすぎる」,「格付会社が格付の根拠を詳細には公表しない」などの問題点が挙げられている．また規模の小さな会社に対しては格付自体がつけられていないこともあり，そのような会社に融資する場合には，土地や不動産などを担保として融資が行なわれている．しかしバブルの崩壊により地価が下落し続けている今日では，それらの担保割れが起こり，不良債権の問題を引き起こしている．そこで本報告書では，企業に融資をする際に格付や担保を用いるのではなく，企業から得られる財務指標を利用してその企業の経営状態を定量的に評価し，貸出側の貸し倒れによるリスクができるだけ小さく抑えられるように貸出金利を決定することを考える．

信用リスクや倒産確率は正規分布に従わないため，分散をリスクとしてとらえる「平均・分散モデル」を用いるのは適当ではなく，‘収益率が平均値の下側にどのように分布しているか’を考える「下方リスク」のほうが適切である．本報告書では，下方リスクとして現在よく使われている VaR(Value-at-Risk) と，その修正版である条件付き VaR(Conditional Value-at-Risk, CVaR) に注目し，CVaR を用いて貸出側のリスクを評価することを考える．そして貸出側の期待収益率をある設定された値に保ちながら，CVaR を最小化するような貸出率関数を決定するモデルを提案する．具体的には，財務指標を入力として貸出率を出力する貸出率関数を求めることを考える．ここで貸出率とは，返済時に返ってくる金額を 1 としたとき，それに対する貸し出す時点での貸出金額を表す．通常の貸出金利は，この貸出率から容易に求めることができる．また CVaR の値がある設定値以下になるという条件のもとで，貸出金利をできるだけ低く設定するモデルも提案する．さらにこれらのモデルが線形計画問題に定式化できることを示す．これらのモデルに対して実データを用いた数値実験を行ない，倒産企業に対して非倒産企業よりも低い貸出率，つまり，高い金利を与える貸出率関数が得られることを確かめた．

目 次

1　序論

銀行などの金融機関が融資をしたり，債権を発行したりするときには，融資先が約束どおりに元本や利息を支払うかどうかが問題となる．この「信用」に関するリスクを「信用リスク＝債務不履行リスク」という．貸出し側はこの信用リスクを指標として，貸し出す金利や融資額を決定する．この信用リスクを判断する尺度として，一般に民間の格付機関が評価する Aaa(トリプル A)，B(シングル B) などの記号で表される「格付」が利用されている．しかしこれらの格付を指標として用いるにあたって,「主要な少数の格付会社の影響力が大きすぎる」,「格付会社が格付の根拠を詳細には公表しない」などの問題点が挙げられている [7]．また規模の小さな会社に対しては格付自体がつけられていないこともあり，実際にこのような小さな会社に融資する場合には土地や不動産などを担保として融資が行なわれている．しかしバブルの崩壊により地価は下落し，不動産の価値は下がり続けている今日では，それらを担保としていたことによる担保割れが起こり，不良債権の問題を引き起こしている．そのような欠点を克服するために，本報告書では，企業に融資をする際に格付や担保を用いるのではなく，企業から得られる財務指標を利用してその企業の経営状態を定量的に評価し，貸出側の損失ができるだけ小さく抑えられるように貸出金利を決定することを考える．その際，貸出側の損失は融資する相手企業の倒産に大きな関係があるため，企業の「倒産確率」をあらかじめ推定し，その後その倒産確率に基づいて金利を決定するのが自然である．しかし倒産確率を求めることは難しく，また求められたとしても，それを利用して金利を決定する際にモデル化の誤差が大きくなるという問題点がある．そのような問題点を改善するため，本報告書では倒産確率を直接求めることなく損失を計算する方法を提案する．

これまでに株式・保険などのリスクを数学的に扱う手法としては，Markowitz が 1950 年代に提案した「平均・分散モデル」が主に用いられてきた [4]．このモデルは，ある投資家が投資をするとき「平均的な収益率（期待値）はできるだけ大きく，収益率のバラツキ（分散）はできるだけ小さいほうがよい」とするものである．これは，投資家のリスクを測る指標として収益率の分散を用いることを意味している．しかし最近の研究では収益率の分布が必ずしも正規分布に従っているわけではないことが証明されており，リスク指標として分散よりも“収益率が平均値の下側にどのように分布しているか”を考える「下方リスク」のほうが適切であると言われている．本報告書で扱う信用リスクや企業の倒産確率も正規分布には従わないので，貸出金利を決定する際に下方リスクを考える必要がある．現在用いられている下方リスクとしては下半標準偏差，下半絶対偏差，下半歪度 [3]，VaR（Value-at-Risk），条件付き VaR（Conditional Value-at-Risk,CVaR)(他に TailVaR，MeanExcess Loss，Mean Shortfall などとも呼ばれることもある) などがあげられるが，本報告書ではそのなかでも現在最もよく使われている VaR と，その修正版である CVaR に注目する．VaR とは，ある与えられた信頼レベルにおける損失の値を考えるものである．たとえばいま仮に「99 %の確率で損失が 3 億円を超えない」ということがわかっているとすると，このとき「99 %の VaR は 3 億円」という．しかし VaR は数値的に扱うのが難しく，またその性質にも様々な問題点が挙げられている [8]．そこで VaR の考え方をふまえつつ，その問題点を改善した CVaR が提案されている．CVaR とは,「損失が VaR を超えるという条件下での損失の平均値」と定義される．VaR における定性的な問題点が，CVaR では改善されることが証明されている [8]．さらに最近，R.T. Rockafellar and S. Uryasev

により CVaR の巧妙な計算方法が提案された [5]．その手法を用いると，線形計画問題を解くことにより CVaR を計算することができる．線形計画問題はシンプレックス法や内点法などの方法を用いて解くことができる．これらの結果を利用して，本報告書では CVaR を用いて貸出側のリスクを計算することにする．そして貸出側の期待収益率をある設定された値に保ちながら，CVaR を最小化するというモデルを解くことにより，貸出金利を決定する方法を提案する．さらに，CVaR の値がある設定値以下になるという条件のもとで，貸出金利をできるだけ低くおさえるようなモデルも提案する．

本報告書では，まず第 2 節で VaR と CVaR について説明し，さらにその計算方法を述べる．次に第 3 節で，CVaR を用いて金利を決定する問題を線形計画問題に定式化する．第 4 節では，実際に提案したモデルに対して実データを用いて行った数値実験の結果を報告し，それに対する考察を与える．最後に第 5 節で結論を述べる．

2　VaR と CVaR

この節では，下方リスクの 1 つである Value-at-Risk(VaR) およびその問題点について述べ，さらに VaR の問題点を改善した CVaR の考え方とその計算方法を説明する．

2.1　VaR

2.1.1　VaR とは？

ポートフォリオをベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \subseteq \Re^n$(ここで $\boldsymbol{X}$ はある制約を満たす集合) で表し，また資産の未来の価値を確率変数 $\boldsymbol{Y}(\in \Re^m)$ で表す．このとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{Y}$ に依存して決まる損失を表す関数を $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ と書くことにする．

例えば $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ とし，資産の現時点における価値を $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$ とすれば，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) &= (x_1 m_1 + x_2 m_2) - (x_1 Y_1 + x_2 Y_2) \\ &= x_1(m_1 - Y_1) + x_2(m_2 - Y_2) \end{aligned}$$

と表すことができる．

ここで確率変数 $\boldsymbol{Y}$ が確率密度関数 $p(\boldsymbol{y})$ を持つと仮定する．(なお実際に VaR を計算する場合，$p(\boldsymbol{y})$ を解析的に求める必要はなく，$p(\boldsymbol{y})$ に従うランダムなサンプルを用意することができれば，VaR を近似的に計算することができる）．

損失関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ がある閾値 α 以下になる確率は

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \alpha) = \int_{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \alpha} p(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

で与えられる．一般に $\Psi(\boldsymbol{x}, \alpha)$ は α に関して非減少である．ここではさらに簡単のため $\Psi(\boldsymbol{x}, \alpha)$ は α に関して連続であると仮定して議論をすすめていく．$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}), p(\boldsymbol{y})$ の性質により，多くの場合この仮定は満たされることが知られている．

ある信頼レベル $\beta \in (0,1)$ が与えられたときの β-VaR は次の式で与えられる．

$$\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) = \min\{\alpha \in \Re | \Psi(\boldsymbol{x}, \alpha) \geq \beta\}$$

これはつまり「損失が α 以下となる確率が β 以上」を満たすなかでの最小の α を β-VaR とする，ということである．他の分散や標準偏差などのリスク指標と違い，VaR ではリスクが金額表示されるために直観的に理解しやすいなどの利点から現在広く用いられている．

2.1.2 VaR の問題点

VaR の問題点として次の事実があげられる [8].

1. 劣加法性を満たさない
2. 凸性を満たさない

劣加法性とは，Artzner et al.[1] で考察された性質であり,「リスク指標はポートフォリオ分散によるリスク削減効果を織り込むべき」という考え方を表現したものである．具体的には以下のように定義される．

（劣加法性の定義）
あるリスク指標 $\rho(X)$ が劣加法性を満たすとは，X_1，X_2 を確率変数とするとき，次の関係が成立することである．

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

VaR がこの性質を満たさない例として，プットやコールなどのオプションをくみあわせた場合のポートフォリオがあげられる．この場合，プット，コールそれぞれの VaR を足し合わせた値よりも，２つを組み合わせたときの VaR の方が大きくなってしまうことがあり得る．

また２つ目の凸性を満たさないという事実から，VaR の値を最小化するような最適化問題を考える場合に，その問題の最適解を求めることが難しくなる．

またこの他にも VaR の問題点として「信頼区間の外の損失を捉えられない」ということがあげられる．これは例えば,「９９％の確率で損失が３億円を上回らない」ということがわかったとしても，その外側の残り１％に非常に大きな損失が隠れているかもしれないということである．

2.2 CVaR

VaR の考え方を活かしつつ，その問題点を改善するために考え出されたのが条件付き VaR，すなわち CVaR(Conditional Value-at-Risk) である．β-CVaR($\beta \in (0,1)$) は次の式で与えられる．

$$\phi_\beta(\boldsymbol{x}) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \alpha_\beta(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

すなわち CVaR は「損失が β-VaR(すなわち$\alpha_\beta(\boldsymbol{x})$) を越えるという条件のもとでの損失の平均」を表している．定義より，明らかに

$$\phi_\beta(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_\beta(\boldsymbol{x})$$

という関係が成り立つので，β-CVaR を最小化するポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ は，β-VaR の近似最適解を与えていると考えることができる．VAR と CVaR の関係を図 1 に表す．

β-CVaR の定義より，VaR の欠点である「信頼区間の外の損失を捉えられない」という問題は解決されることがわかる．しかしながら，β-CVaR 関数 $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ をそのまま最小化しようとすると，その定義式内に VaR 関数 $\alpha_\beta(\boldsymbol{x})$ を含むので扱いが難しくなってしまう．そこで $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ を効率的に解くために考え出された方法を次の節で述べる．

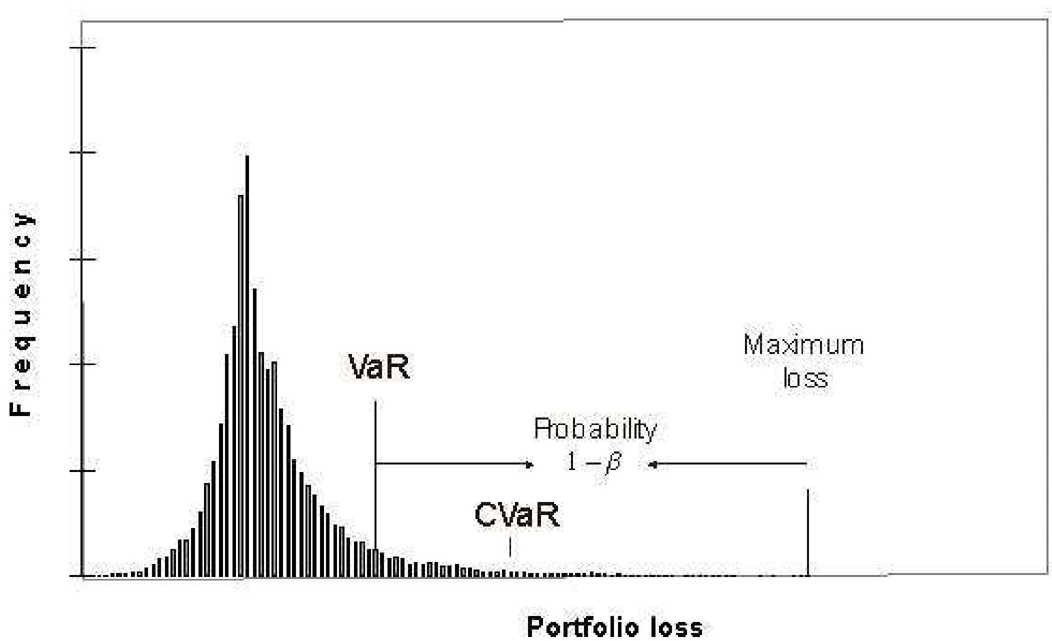

図 1: VaR と CVaR の関係

2.3 CVaR の計算方法

CVaR を求めるために次の関数 $F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ を定義する [5].

$$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1}\int_{\boldsymbol{y}\in\Re^m}[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\alpha]^+ p(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

ここで $[t]^+ = \max(0,t)$ である．$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ の持つ最大の特徴は，α に関して凸関数となることである [5]．この $F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ と β-CVaR の関係が以下のように示されている．

定理 1 *[5]* $F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ は α に関して凸かつ連続的微分可能である．任意の $\boldsymbol{x}(\in \boldsymbol{X})$ に対してその損失に関する β*-CVaR* は次の式で与えられる．

$$\phi_\beta(\boldsymbol{x}) = \min_{\alpha\in\Re} F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$$

さらに $F_\beta(\boldsymbol{x},\cdot)$ を最小にする α の集合：

$$\boldsymbol{A}_\beta(\boldsymbol{x}) = \operatorname*{argmin}_{\alpha\in\Re} F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$$

は空でない有界な閉集合となり，β*-VaR* は

$$\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) = \text{left end point of } \boldsymbol{A}_\beta(\boldsymbol{x})$$

で与えられる．特に

$$\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) \in \operatorname*{argmin}_{\alpha\in\Re} F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) \quad \text{and} \quad \phi_\beta(\boldsymbol{x}) = F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha_\beta(\boldsymbol{x}))$$

という関係を満たす $\alpha_\beta(\boldsymbol{x})$ と $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ が必ず存在する．

$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ が α に関して凸であるので，最適化の手法を用いれば $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ を得ることができる．またこの定理の優れたところは，β-VaR を計算することなく β-CVaR が計算できるところである．さらにもし β-VaR の値が必要ならば，副産物的に，しかもそれほど手間をかけずに求めることができる．また次の関係式より，$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ を用いて $\alpha_\beta(\boldsymbol{x})$ の計算と $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ の最適値を同時に計算することができる．

定理 2 *[5]* $\boldsymbol{x}$ に関して $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ を最小化することと，$(\boldsymbol{x},\alpha)$ に関して $F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ を最小化することは等価である．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}} \phi_\beta(\boldsymbol{x}) = \min_{(\boldsymbol{x},\alpha)\in\boldsymbol{X}\times\Re} F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$$

この定理より，$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ を $(\boldsymbol{x},\alpha)$ に関して最小化したときの解を $(\boldsymbol{x}^*,\alpha^*)$ とすると，$F_\beta(\boldsymbol{x}^*,\alpha^*)$ は β-CVaR の最適値を表し，$\boldsymbol{x}^*$ は最適なポートフォリオを表す．さらに α^* がそのときの β-VaR となる．

一般的に，$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ は滑らかな関数となる．また損失関数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ に関して凸ならば，$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ は $(\boldsymbol{x},\alpha)$ に関して凸な関数となるので [5]，$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ の最小化問題を解くことが可能となる．

3　金利決定問題の定式化

この節では，CVaR を用いて貸し出し金利を決定する問題の定式化を行う．

銀行などの金融機関にとって，企業に融資するときに最も重要なことは，本当にその企業が貸し出したお金をきちんと利子をつけて返済してくれるかどうかということである．融資先の企業が倒産してしまい，お金を回収できなくなるいわゆる「貸し倒れ」が起こると銀行側に損失が生じることになる．よって銀行に求められるのは，理想的に言えば「倒産する会社には融資しない」ということである．しかし実際には倒産する会社があらかじめわかっているわけではない．そこで本報告書では，企業の倒産，つまり貸し倒れが起こる確率と深い関わりを持つと思われる「財務指標」を利用し，倒産しそうな企業に対しては他の優良な企業に比べて高い金利を与えるような関数を求めるモデルを提案する．

3.1 準備

企業から得られる財務指標を確率変数 $\boldsymbol{Z}' = (Z_1, \ldots, Z_m)^\top$ で表す．さらに確率変数 Z_0 を

$$Z_0 = \begin{cases} 1 & \text{（企業が倒産のとき）} \\ 0 & \text{（企業が非倒産のとき）} \end{cases} \tag{1}$$

とする．これらを用いて $\boldsymbol{Z} = (Z_0, \boldsymbol{Z}'^\top)^\top$ と表すことにする．また $\boldsymbol{Z}$ は確率密度関数 $p(\boldsymbol{z})$ を持つと仮定する．このとき銀行側の損失を表す関数が，銀行側の設定できるパラメータ $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)^\top$ を用いて $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})$ と表せるものとすると，定理 1 より CVaR は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha) &= \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{\boldsymbol{z} \in \Re^{m+1}} [f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) - \alpha]^+ p(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} \\ \phi_\beta(\boldsymbol{x}) &= \min_{\alpha \in \Re} F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

また定理 2 より，CVaR を最小化する問題は以下のように与えられる．

$$\min_{(\boldsymbol{x}, \alpha) \in \boldsymbol{X} \times \Re} F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha)$$

ここで $\boldsymbol{X}$ とは $\boldsymbol{x}$ の満たすべきある制約条件である．以下では損失関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})$ と，$\boldsymbol{x}$ の満たすべき制約条件 $\boldsymbol{X}$ とをどのように与えればよいかということについて考える．

3.1.1 貸出率，貸出金利と損失関数

銀行がパラメータ $\boldsymbol{x}$ の値を設定し，財務指標 $\boldsymbol{Z}'$ をもつ企業に融資する場合を考える．返済時に返ってくる金額を 1 としたとき，それに対して貸し出す時点での貸し金額，すなわち貸出率を $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ と表す．そのときこの企業に対して，満期返済額が $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ となるように貸し出すものとすれば，貸出額は $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ となる．この企業が倒産したときの回収額をゼロとすれば，貸出額と返済額は次の表のようになる．

貸出	返済
$M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$	$M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$（非倒産） 0 （倒産）

ここで $1 - q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ が割引率となることに注意すると，貸出金利は

$$\text{（貸出金利）} = \frac{1 - q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')}{q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')} \tag{3}$$

で求められる．

この $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ と $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ を用いて損失関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})$ は次のように与えられる．

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}) = M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')Z_0 \tag{4}$$

これは倒産する会社に貸し出した金額が損失となることを示している．

3.1.2　制約条件

期待収益率 r を次の式で定義する．

$$r \equiv \frac{\int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{m+1}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}')(1-z_0)p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}}{\int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{m+1}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}')q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}')p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}} \tag{5}$$

式 (5) において右辺の分子は回収できる金額の期待値を表し，分母は貸出金額の平均値を表している．

式 (4) で定義した損失関数を考えると，貸出率 $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}')$ が小さければ小さいほど，損失も小さな値になることになる．しかし実際には $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}')$ が小さいほど，式 (3) で計算される貸出金利は高くなり，借り手である企業側からみれば他の金融業者から借りたほうが良いという状況が起こりうる．このような状況を防ぐために，金利が上がりすぎないようにする制約が必要になる．ここでは，銀行側からみた場合にある程度の利益を保証するという意味をもつような次の制約を与えることにする．

$$r = r_0 \quad (r_0\text{は銀行側の設定する期待収益率})$$

またこれとは別に $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') \in \boldsymbol{Q}$ という制約を考える．ここで $\boldsymbol{Q}$ の具体的な例として，式 (3) が金利としての意味を持つような制約，つまり $0 \le q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') \le 1$ や $0.5 \le q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') \le 1$ などが挙げられる．その他にも，ある特定の財務指標を持つ企業に対しては貸出率 $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}')$ が一定値以上になる，つまり貸出金利が一定値以下になるようにする制約などが考えられる．

3.2　問題の定式化 1

第 3.1 節で述べたモデルに従い、以下の問題を提案する．

$$\begin{array}{lll} \displaystyle\min_{\alpha\in\Re,\boldsymbol{x}\in\Re^{n+1}} & F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) & \\ \text{subject to} & q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') \in \boldsymbol{Q} & a.s. \\ & r = r_0 & \end{array} \tag{6}$$

以下では簡単のため，$M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') = 1$ と固定して考えることにする．

本報告書では，$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}')$ が $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}'$ に関して線形，かつ $m = n$ であると仮定し，次の式のように表せるものとする．

$$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}') = \sum_{i=1}^{n} x_i Z_i + x_0 \tag{7}$$

また確率密度関数 $p(\boldsymbol{z})$ に従うようなサンプル $\boldsymbol{z}^j$, $j = 1,\ldots,J$, を用いることにより，積分・確率密度関数を含む式 (2), 式 (5) は次のように近似的に計算することができる [6].

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{n+1}} [f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})-\alpha]^+ p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z} \quad &\approx \quad J^{-1}\sum_{j=1}^{J}[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}^j)-\alpha]^+ \\ \frac{\int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{n+1}}(1-z_0)p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}}{\int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{n+1}} q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}')p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}} \quad &\approx \quad \frac{\sum_{j=1}^{J}(1-z_0^j)}{\sum_{j=1}^{J} q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}^j)} \end{aligned}$$

ただし z_0^j は，サンプル $\boldsymbol{z}^j$ に対して式 (1) で表されるような倒産・非倒産の情報である．

また $[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) - \alpha]^+$ に関しては，適当なスラック変数を用いることによって等価な線形計画問題に変換することができる．以上の操作を行うことにより，問題 (6) は次の線形計画問題に変換することができる．

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\min_{\alpha\in\Re, \boldsymbol{x}\in\Re^{n+1}, \boldsymbol{y}\in\Re^J} & \alpha + ((1-\beta)J)^{-1}\sum_{j=1}^J y^j & \\
\text{subject to} & y^j \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) - \alpha & \\
 & y^j \geq 0 & \\
 & q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \in \boldsymbol{Q}\ , & j = 1, \ldots, J, \\
 & \sum_{j=1}^J q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) = r_0^{-1}\sum_{j=1}^J (1 - z_0^j) &
\end{array}
\tag{8}
$$

ここで $\boldsymbol{y}$ は新たに導入したスラック変数であり，$\boldsymbol{y} = (y^1, \ldots, y^J)^\top$ である．

3.3 問題の定式化２

第 3.2 節で提案したモデルは「期待収益率をある値に保ちながら CVaR が最小になるものを求める」というものであったが，それとは別に「CVaR をある値以下に抑えつつ貸出金利の平均値をできるだけ下げる」というモデルが考えられる．他の貸出業者との競争を考えたとき，ある程度のリスクを許容した上で，その中で貸出金利平均ができるだけ低くなるほうが有効であるからである．今回のモデルでは「貸出金利を下げる」ということが「$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$ の値を大きくする」ということと等価なので，この問題は次のように定式化できる．

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\in\Re^{n+1}} & \int_{\boldsymbol{z}\in\Re^{m+1}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')p(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z} & \\
\text{subject to} & \phi_\beta(\boldsymbol{x}) \leq C_\beta & \\
 & q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}') \in \boldsymbol{Q} & a.s. \\
 & r \geq \bar{r} &
\end{array}
\tag{9}
$$

ここで C_β は信頼レベル β における CVaR の制約を与える定数である．また最後の制約は期待収益率 r が，貸出側の設定する基準値 $\bar{r}$ 以上になることを保証するための制約である．また定理 1 より，１つ目の制約は

$$F(\boldsymbol{x}, \alpha) \leq C_\beta$$

という制約に置き換えることができる．以上より第 3.2 節で述べたのと同じ方法を用いると，問題 (9) は次の線形計画問題に変換することができる．

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\max_{\alpha\in\Re, \boldsymbol{x}\in\Re^{n+1}, \boldsymbol{y}\in\Re^J} & J^{-1}\sum_{j=1}^J q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \\
\text{subject to} & \alpha + ((1-\beta)J)^{-1}\sum_{j=1}^J y^j \leq C_\beta \\
 & y^j \geq f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) - \alpha
\end{array}
\tag{10}
$$

$$y^j \geq 0$$
$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \in \boldsymbol{Q}\ , \qquad j = 1, \ldots, J,$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{J} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq \bar{r}^{-1} \sum_{j=1}^{J}(1 - z_0^j)$$

4 数値実験

この節では第 3 節で提案したモデルに対して，実際のデータを用いて金利を決定する貸出率関数 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ を求めた結果を報告する．

4.1 財務指標

実験で用いたデータは，東京商工リサーチから提供された 1999 年，2000 年の建築企業 24649 社の各企業 1 期分のものであり，その中には 365 社の倒産した企業が含まれている．財務指標には様々なものがあるが，ここでは [2] を参考に，より倒産と関わりの深いと思われるものを用いた．その財務指標を表 1 に表す．実験はこれらの財務指標と，式 (1) で表される倒産・非倒産の情報を合わせたベクトル列 $\{\boldsymbol{z}^j\}$ を作成して行った．

表 1: 今回用いた財務指標

流動比率	総資本経常利益率
自己資本比率	総資本営業利益率
借入金依存度	経営資本営業利益率
キャッシュフロー対流動負債比率	自己資本当期利益率
売上高総利益率	当座比率
売上高経常利益率	総資本回転率
売上高支払利息比率	固定資産回転率

4.2 実験方法

実験の具体的な方法は以下のとおりである．まずデータの中から無作為に財務指標データ $\boldsymbol{z}^j$ を 500 個選び出す．ただし今回使用したデータ全体における倒産企業の比率は極めて低いので，無作為に 500 個を選ぶと倒産企業がほとんど含まれない場合がある．そこで選び出す 500 個のサンプル中に含まれる倒産企業の数は事前に与えられるようにした．それらを用いて問題 (8) または問題 (10) を解いてその最適解における $\boldsymbol{x}$ の値を求める．次に残りの 24149 企業のデータを検証用のサンプルとして，得られた $\boldsymbol{x}$ と式 (7) とを用いて計算される貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j)$ の値を計算し，それらがどのように分布しているかをグラフで表す．また検証用サンプルにおける実際の CVaR，収益率，貸出率の平均値，を求める（ただし検証用サンプルにおいて，$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) > 1$ のときは $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) = 1$，$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) < 0$ のときは $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) = 0$ として計算を行った）．

問題 (8) と問題 (10) の中にあらわれる $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \in \boldsymbol{Q}$ という制約は，ある定数 $l \in [0,1]$ を用いて

$$l \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$$

と表すことにする．また β の値は固定値 99%とする．

4.3 実験結果

本実験は Sun Microsystems 社の SUN ULTRA 60 上で，UNIX SunOS 5.7 の環境のもとで行った．また線形計画問題を解くにあたり，MATLAB の Optimization Toolbox が提供する linprog 関数を用いた．

貸出率関数を求めるために使用するデータとして，異なる 500 企業を集めた 3 種類のデータを用意し，それぞれ Data1, Data2, Data3 とする．その中に含まれる倒産企業の数はそれぞれ 10, 13, 16 個である．

まずはじめに期待収益率 r_0 と貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j)$ の下界値 l の値を変化させてモデル (8) を解いた．その結果を表 2 にまとめる．ただし T は問題を解くために用いたサンプル 500 個中に含まれる倒産企業の数であり，$E[q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')]$ は $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j), j = 1, \ldots, J,$ の平均値を表す．モデル (8) に対しては

$$E[q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')] = (r_0 J)^{-1} \sum_{j=1}^{J} (1 - z_0^j)$$

で求めた．また Tmean・Hmean はそれぞれ倒産企業・非倒産企業に対する貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j)$ の平均値である．表 2 のモデル (8) 欄における CVaR は，モデル (8) の最適解における目的関数の値である．

次に $\bar{r} = 1, l = 0$ と固定し，C_β の値を変化させてモデル (10) を解いた．その結果を表 3 にまとめる．ただし表 3 のモデル (10) 欄における $E[q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')]$ は，モデル (10) の最適解 $(\alpha^*, \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ における目的関数の値である．また r は最適解に対して

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{J} q(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^j)}{\sum_{j=1}^{J} 1 - z_0^j}$$

で計算される値であり，CVaR は最適解に対して

$$\mathrm{C}VaR = \alpha^* + ((1-\beta)J)^{-1} \sum_{j=1}^{J} y^{*j}$$

で計算される値である．ただし y^{*j} はベクトル $\boldsymbol{y}*$ の第 j 要素を表す．

4.4 考察

まずモデル (8) の検証結果のグラフである図 2〜図 13 を見ると，どのグラフにおいても非倒産企業の貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ の分布に比べ，倒産企業の貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ の方が全体的に左寄りに分布していることがわかる．これは非倒産企業に比べ倒産企業のほうが貸出率が小さい，つまり金利が高く与えられているということを表している．このことは，表 2 の

表 2: モデル (8) の実験結果

Data	T	モデル (8)				検証結果					
		r_0	l	$E[q(\mathrm{x}, \mathbf{Z})]$	CVaR	r	$E[q(\mathrm{x}, \mathbf{Z})]$	Tmean	Hmean	CVaR	グラフ
1	10	1.1	0	0.8909	0.8375	1.1006	0.8953	0.8453	0.8959	0.8977	図 2
		1.1	0.8	0.8909	0.8624	1.1073	0.8898	0.8744	0.8900	0.9021	図 3
		1.01	0	0.9703	0.9532	1.0140	0.9717	0.9533	0.9719	0.9786	図 4
		1.01	0.8	0.9703	0.9569	1.0159	0.9699	0.9553	0.9701	0.9709	図 5
2	13	1.1	0	0.8855	0.8454	1.1121	0.8859	0.7569	0.8877	0.8511	図 6
		1.1	0.8	0.8855	0.8599	1.1153	0.8836	0.8480	0.8840	0.8704	図 7
		1.01	0	0.9644	0.9519	1.0221	0.9641	0.9188	0.9647	0.9536	図 8
		1.01	0.8	0.9644	0.9530	1.0221	0.9641	0.9293	0.9646	0.9547	図 9
3	16	1.1	0	0.8800	0.8591	1.1186	0.8811	0.8468	0.8815	0.8664	図 10
		1.1	0.8	0.8800	0.8700	1.1200	0.8799	0.8683	0.8800	0.8856	図 11
		1.01	0	0.9584	0.9512	1.0282	0.9585	0.9432	0.9587	0.9537	図 12
		1.01	0.8	0.9584	0.9517	1.0283	0.9585	0.9436	0.9586	0.9552	図 13

表 3: モデル (10) の実験結果

Data	T	モデル (10)				検証結果					
		C_β	$E[q(\mathrm{x}, \mathbf{Z})]$	r	CVaR	$E[q(\mathrm{x}, \mathbf{Z})]$	r	Tmean	Hmean	CVaR	グラフ
1	10	0.8	0.8633	1.1352	0.8000	0.8674	1.1359	0.8096	0.8682	0.8670	図 14
		0.85	0.9001	1.0888	0.8500	0.9046	1.0892	0.8575	0.9052	0.9088	図 15
		0.9	0.9363	1.0466	0.9000	0.9413	1.0468	0.9047	0.9417	0.9517	図 16
		0.95	0.9682	1.0121	0.9500	0.9699	1.0159	0.9504	0.9701	0.9771	図 17
2	13	0.8	0.8502	1.1456	0.8000	0.8509	1.1580	0.7163	0.8529	0.8092	図 18
		0.85	0.8889	1.0958	0.8500	0.8892	1.1082	0.7616	0.8910	0.8552	図 19
		0.9	0.9259	1.0519	0.9000	0.9258	1.0641	0.8373	0.9271	0.9038	図 20
		0.95	0.9630	1.0114	0.9500	0.9627	1.0233	0.9158	0.9634	0.9519	図 21
3	16	0.8	0.8239	1.1679	0.8000	0.8304	1.1869	0.7806	0.8310	0.8086	図 22
		0.85	0.8722	1.1098	0.8500	0.8734	1.1284	0.8372	0.8739	0.8578	図 23
		0.9	0.9148	1.0581	0.9000	0.9154	1.0766	0.8896	0.9157	0.9052	図 24
		0.95	0.9574	1.0111	0.9500	0.9575	1.0293	0.9419	0.9577	0.9526	図 25

Hmean (非倒産企業の貸出率の平均) に比べ，Tmean (倒産企業の貸出率の平均) の方が小さくなっていることからもわかる．しかし図 2, 6, 10 を比べてみると，貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ の分布は，モデルを解くのに使用したサンプルによって大きく異なることが見てとれる．

ここで表 2 を見ると，Data1 を使った場合には r_0，l の設定によらずモデル (8) の最適解における CVaR の値よりも検証結果における CVaR の値のほうが大きくなっている．それに比べて Data2, Data3 を使った場合では，検証結果における CVaR の値がモデルを解いたときの CVaR の値に近いものとなっている．このため，貸出率関数を求める際に使用するサンプル数を増やすことで，より良い結果が得られるようになると考えられる．

また表 2 のその他の値を見てみると，どのデータを使用した場合にも，検証結果における期待収益率 r の値は，モデルを解くときに設定した期待収益率 r_0 の値に近いものが得られている．さらに $E[q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})]$ の値も，解と検証結果とにおいて近いものが得られた．

図 2, 図 3 や図 6, 図 7 を見ると，l を 0 から 0.8 に変えることによって貸出率の分布がおおきく変化し，l が 0.8 の場合は貸出率の分布が 0.8 と 1 の間におさえられていることがわかる．しかし Data3 を用いた場合の図 10, 図 11 では，l を変化させても貸出率の分布にはそれほど変化が見られなかった．またどのデータを用いた場合でも r_0 を 1.01 としたときには，l を変化させたことによる貸出率の分布の変化はあまりみられなかった．これは r_0 の値を小さくしたことにより，貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$ の値が全体的に 1 に近いものとなるため，貸出率の値が 0.8 よりも大きいものがほとんどになり，l の設定を 0 から 0.8 に変化させてもあまり変化は現れないからである．

次に，モデル (10) を解いた結果を表したグラフである図 18〜図 25 を見てみる．このグラフを見ると，C_β の値を大きくするにつれて貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$ の分布が右側に移動していく様子がわかる．モデル (10) では，CVaR の値が C_β 以下になるものの中で，貸出率の平均ができるだけ大きくなるようなものを解として求めているため，C_β の値を大きくすればするほど貸出率は全体的に 1 に近い値となっていく．これは言い換えれば，許容するリスクの値を大きくする分だけ，貸出金利の全体平均をさげることができるということを表している．

表 3 の Tmean (倒産企業の貸出率の平均) と Hmean (非倒産企業の貸出率の平均) を比べると，倒産企業に対して非倒産企業よりも低い貸出率，つまり高い金利を与えていることがわかる．

またモデル (8) の結果と同様に，Data1 を用いた場合はモデル (10) を解いて得られる CVaR よりも検証結果での CVaR の方が大きくなっている．しかし Data2, Data3 を用いた場合には C_β の設定によらず，モデルの解と検証結果とで CVaR は近い値が得られた．また $E[q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z})]$ と r は，解と検証結果において非常に近い値が得られた．この結果，使用するサンプル数を増やすことで，より良い結果が得られるようになると考えられる．

表 3 のモデル (10) 欄において，CVaR の値が C_β と等しくなっていることは，最適解においてモデル (10) の 1 つ目の制約が効いている（等号が成り立っている）ことを表している．また表 3 のモデル (10) 欄において，r の値が設定した値 $\bar{r} = 1$ よりも大きくなっている．このことより，最適解においてモデル (10) の最後の制約は効いていないことがわかる．

モデル (8)，モデル (10) ともに，倒産企業に対して非倒産企業よりも平均して高い金利を与える貸出率関数を求められることが確かめられた．期待収益率をある値に設定する場合には，モデル (8) において r_0 の値を与えればよく，許容できるリスクの値があらかじめ与えられているならば，モデル (10) において C_β の値をその値に設定すればよい．一般に l は 0.8 よりも 0 とした方が倒産・非倒産の差別化ができるので，$l = 0$ としておいて，貸出率 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ がある値 (たとえば 0.7 や 0.8 など) を下回る企業に対しては融資を行わない，という方法が考えられる．またモデルを解く際に用いるサンプル数を増やすことにより，より精度の高い貸出率関数 $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ が求まるものと期待される．

5 結論

本報告書では金融機関が融資を行う際に，企業の財務指標から得られる信用リスクに応じて金利を決定する手法を提案した．その際リスク指標として，下方リスクの 1 つである CVaR を用いた．そして実データを用いた数値実験により，本手法を用いれば倒産企業に対して非倒産企業よりも高い金利を与えられることを示した．

提案したモデルでは，使用するサンプル数が増えるにつれて問題のサイズが大きくなる．サンプル数を増やすと線形計画問題を解くのに非常に時間がかかる．よって今後はサンプル数を増やしても問題のサイズがあまり大きくならないようなモデルを考える必要がある．また本報告書では，満期返済額 $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ の値を 1 に固定して定式化したが，実際には取引相手の規模によって取引金額の大きさは異なるはずである．そのため，$M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}')$ をどのように与えるかを考えなければならない．さらに今回のモデルでは倒産企業からの回収額は 0 であるとしたが，企業が倒産したとしても担保などによってある程度の金額が回収できる場合もある．そのため，損失関数を考える場合に倒産する・しないだけを考えるのではなく，倒産したときの回収額も組み込んで損失関数を定義するべきである．そのほか金利決定の際に，どの財務指標がどの程度の影響力を持っているのかを調べることも重要である．

また本報告書で提案した手法は保険の分野にも応用できる．自動車保険を例にあげると，保険会社は保険契約者が事故を起こした場合に保険金を払うことになり，損失が生じることになる．このとき，契約者の持つ様々な情報（例えば年齢や事故歴など）がその契約者が事故を起こす確率と非常に深い関係があるとして，その情報を用いて契約者の保険料を決定する問題が考えられる．このような問題に対しても，本報告書で提案した手法を適用することにより，保険料を決定する関数を求めることができる．

謝辞

日頃から御教授頂き，本研究に対しても御指導を賜った福嶋雅夫教授，ならびに本報告書を作成するにあたり細部に至るまで貴重な御指摘と御指導を頂いた山下信雄助手に深く感謝の意を表します．また，大変お世話になった滝根哲哉助教授をはじめとする福島研究室の皆様に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] Artzner, P., F.Delbaen, and D.Heath : *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 203-228, 1999.

[2] 石川明男, 金崎芳輔 : 企業倒産の判断分析と倒産確率の推定，証券アナリストジャーナル, Vol. 38, 87-101, 2000.

[3] 今野　浩: 理財工学，日科技連，2000.

[4] Markowitz, H.M. : *Portfolio Selection*, J.Finance 7, 77-91, 1952.

[5] Rockafellar, R.T. and S.Uryasev : *Optimization of Conditional Value-At-Risk*, The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, 21-41, 2000.

[6] Uryasev, S : *Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications*, Financial Engineering News, No. 14, February, 1-5, 2000.

[7] 渡辺賢一郎, 須藤浩, 田中将之 : 主要格付会社の特徴と評価 (1999 年版) –日本及びアジアの格付を中心に–，国際金融情報センター，1999.

[8] 吉羽要直, 山井康浩 : リスク指標の性質に関する理論的整理–VaR と期待ショートフォールの比較分析–，IMES Discussion Paper, No. 2001-J-21，2001.

A　実験結果のグラフによる表示

A.1　モデル (8) の検証用サンプルにおける貸出率の分布

A.1.1　（Data1）

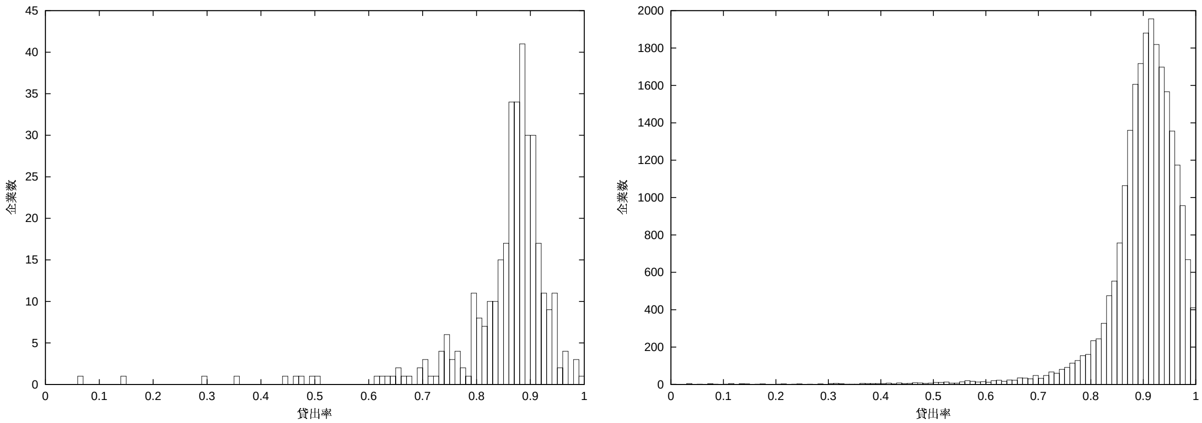

図 2: $r_0 = 1.1$, $0 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

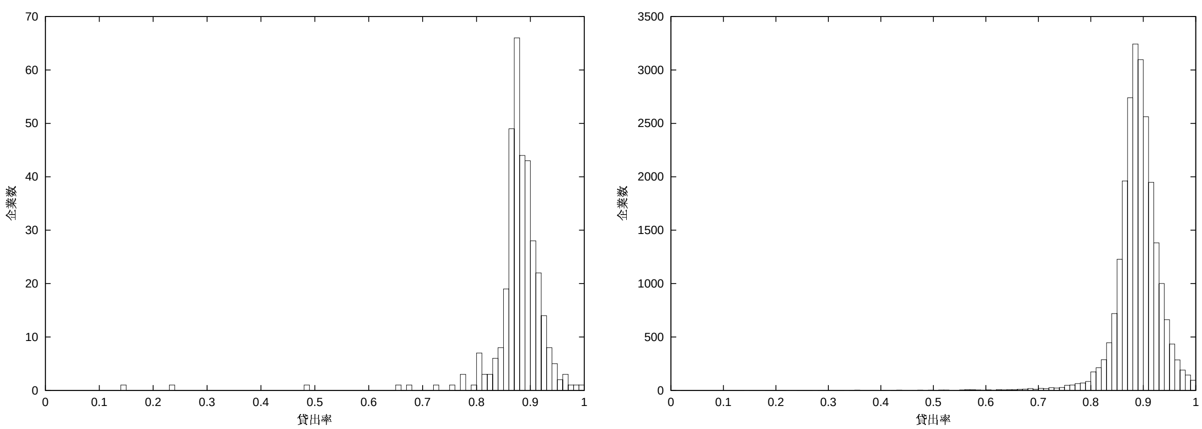

図 3: $r_0 = 1.1$, $0.8 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

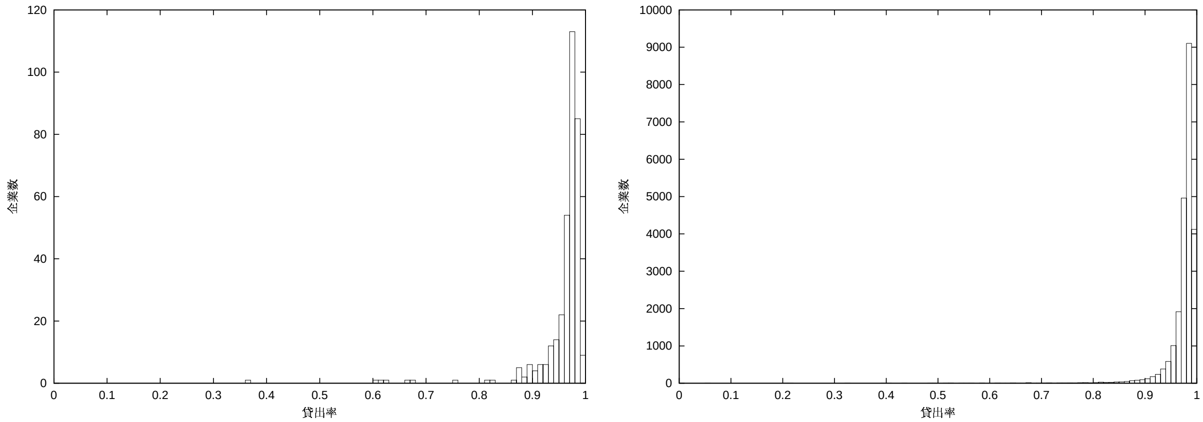

図 4: $r_0 = 1.01,\ 0 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

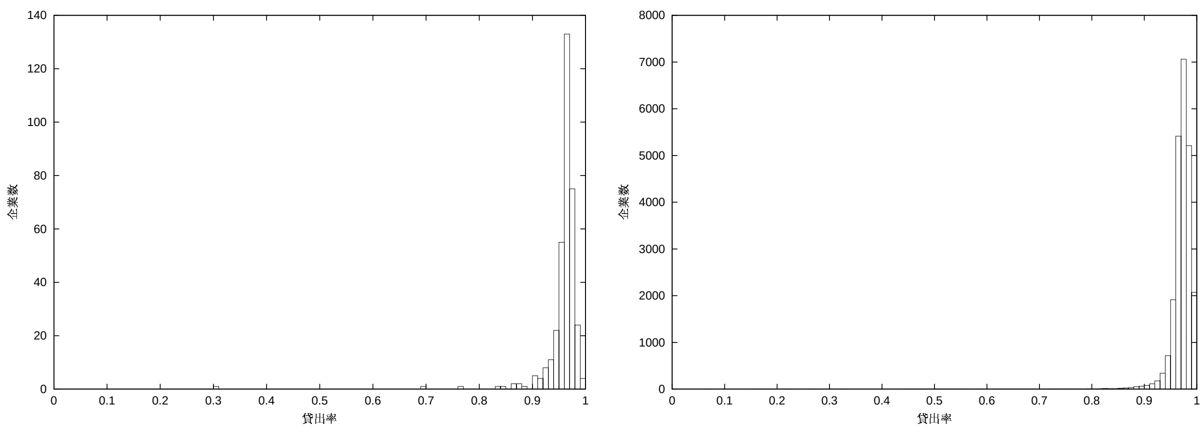

図 5: $r_0 = 1.01,\ 0.8 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

A.1.2 （Data2）

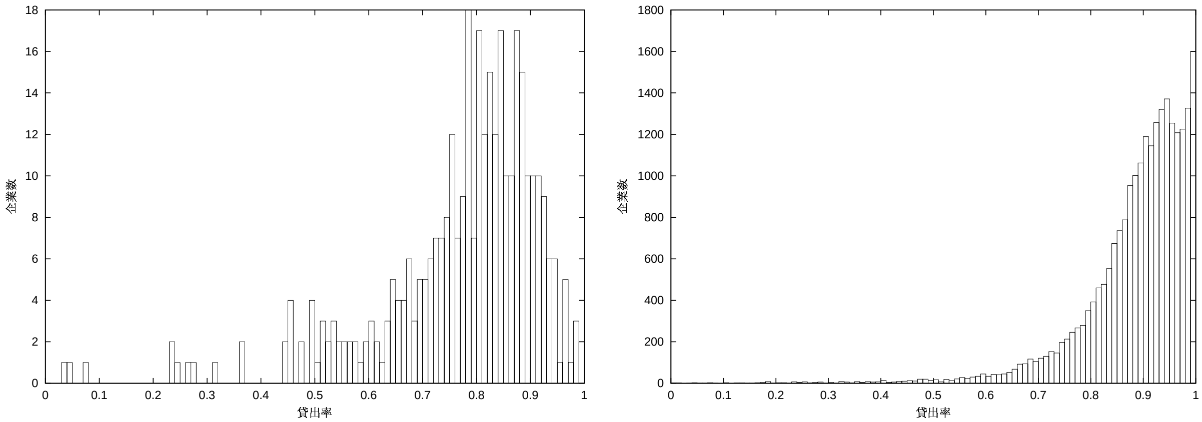

図 6: $r_0 = 1.1,\ 0 \le q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \le 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

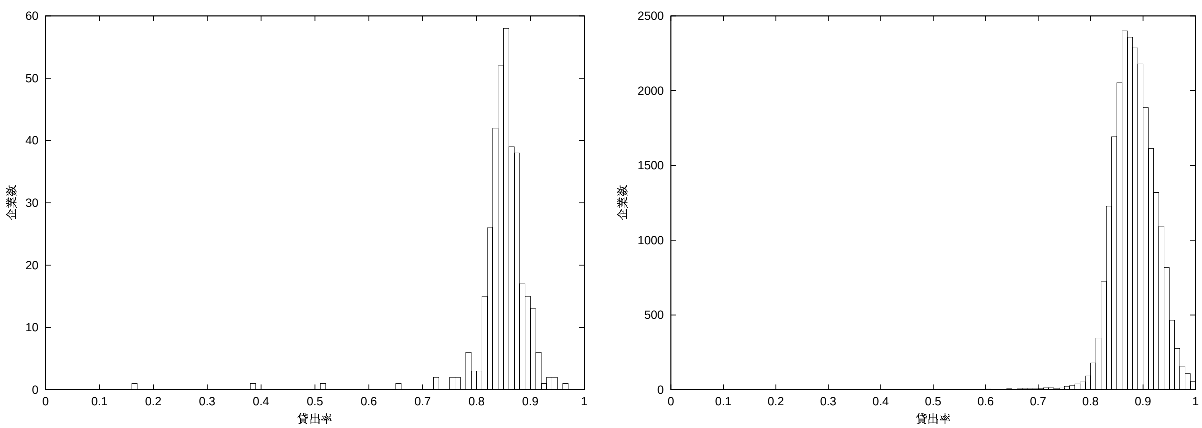

図 7: $r_0 = 1.1,\ 0.8 \le q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \le 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

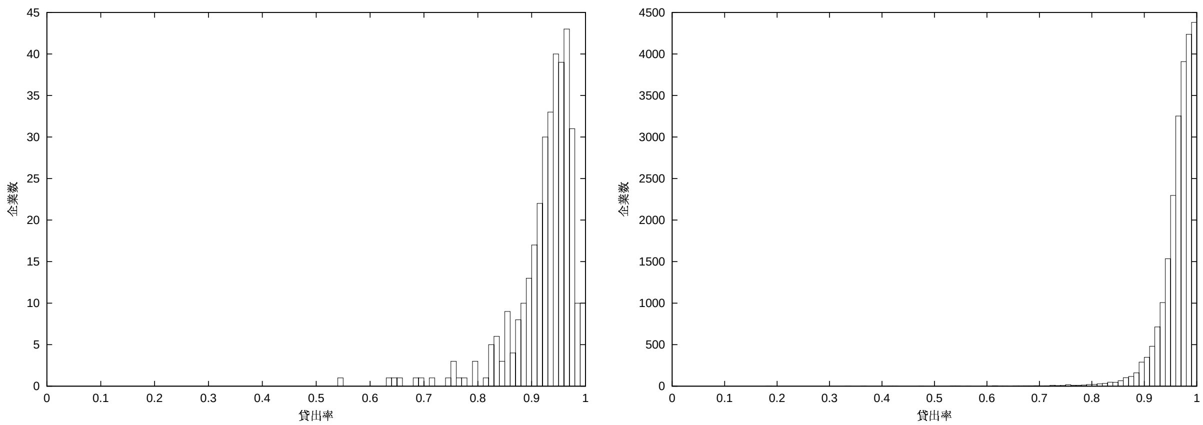

図 8: $r_0 = 1.01,\ 0 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

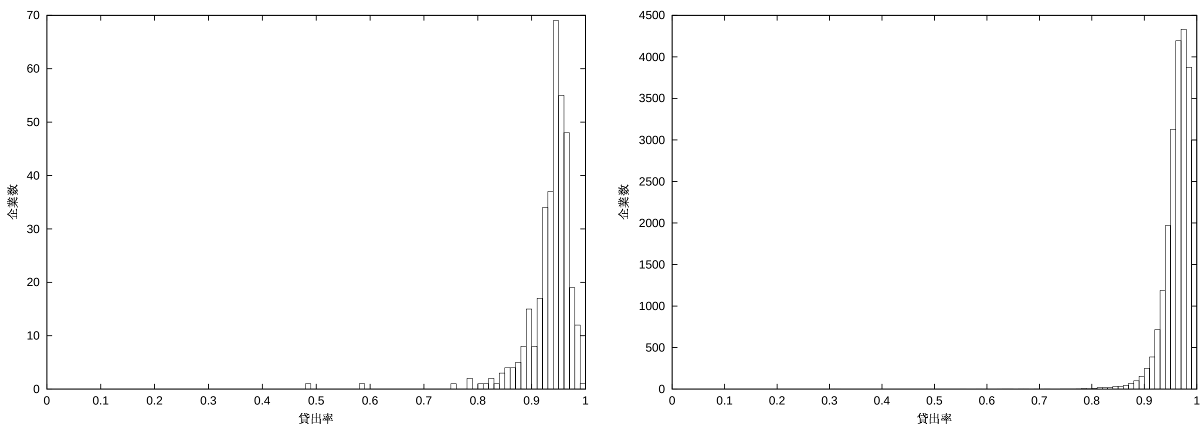

図 9: $r_0 = 1.01,\ 0.8 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

A.1.3 （Data3）

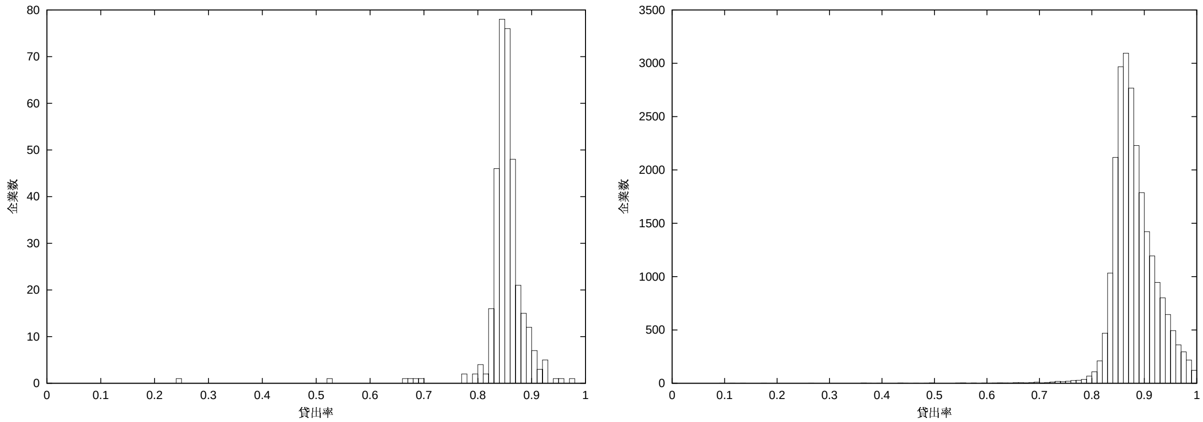

図 10: $r_0 = 1.1,\ 0 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

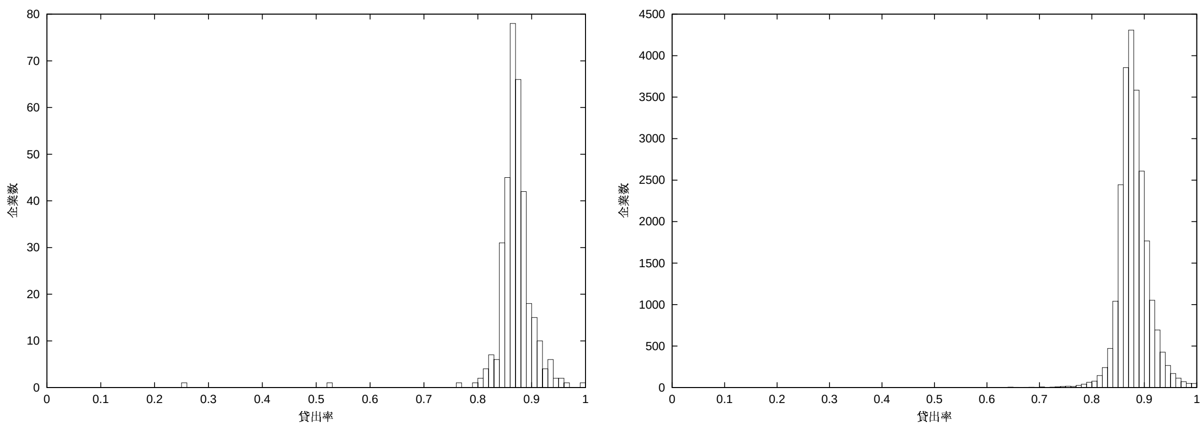

図 11: $r_0 = 1.1,\ 0.8 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

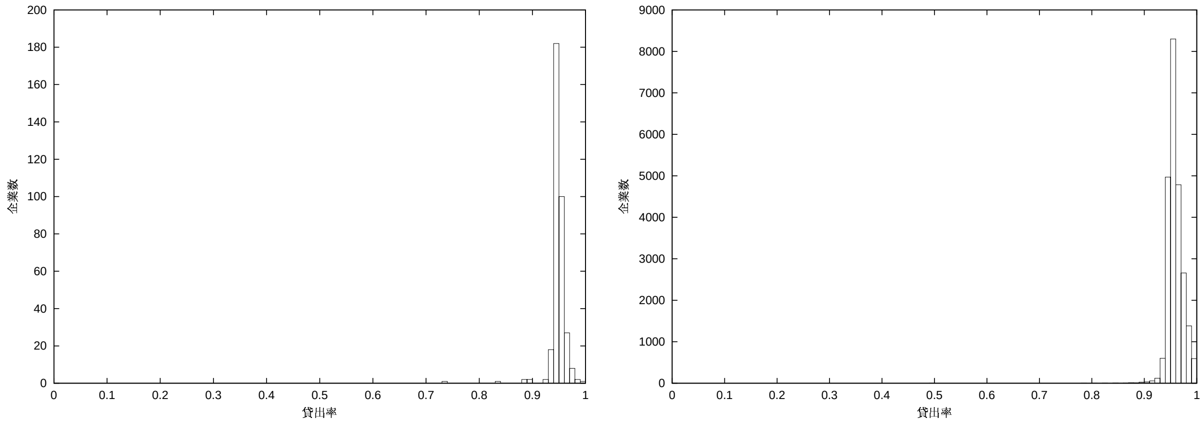

図 12: $r_0 = 1.01,\ 0 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

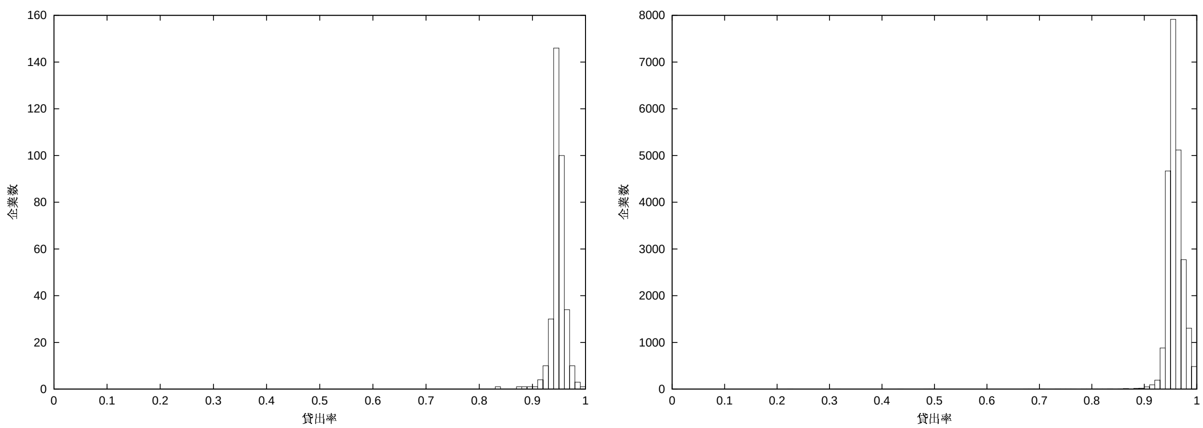

図 13: $r_0 = 1.01,\ 0.8 \leq q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^j) \leq 1$，倒産 (左)，非倒産 (右)

A.2 モデル (10) の検証用サンプルにおける貸出率の分布

A.2.1 （Data1）

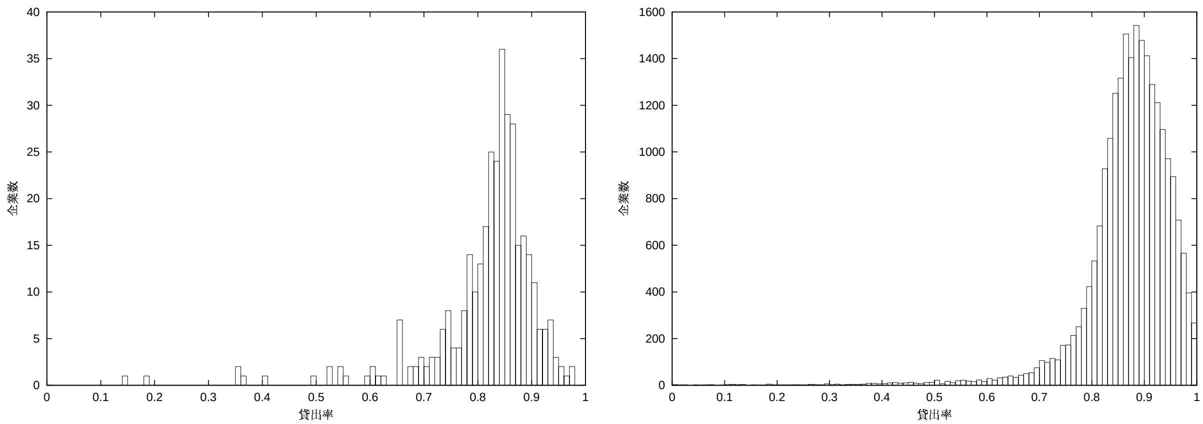

図 14: $C_\beta = 0.8$，倒産 (左)，非倒産 (右)

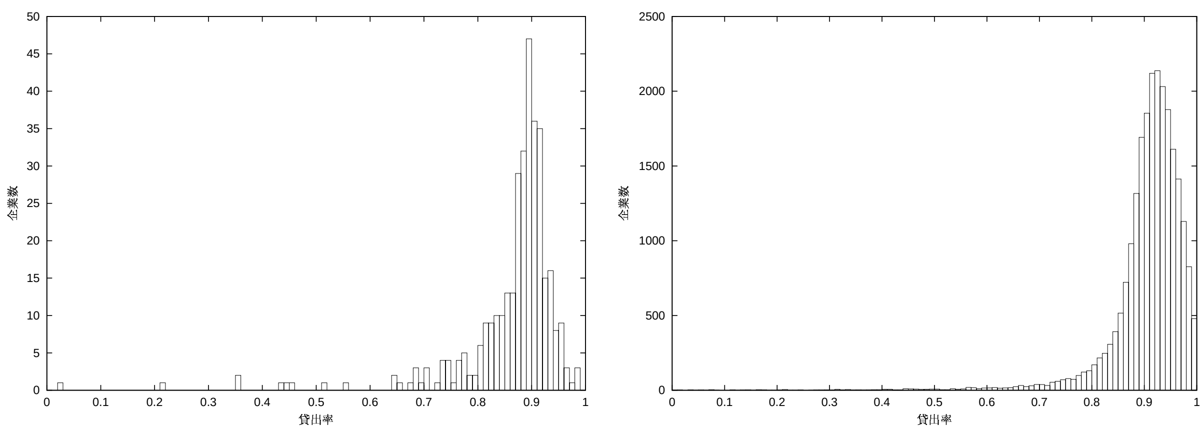

図 15: $C_\beta = 0.85$，倒産 (左)，非倒産 (右)

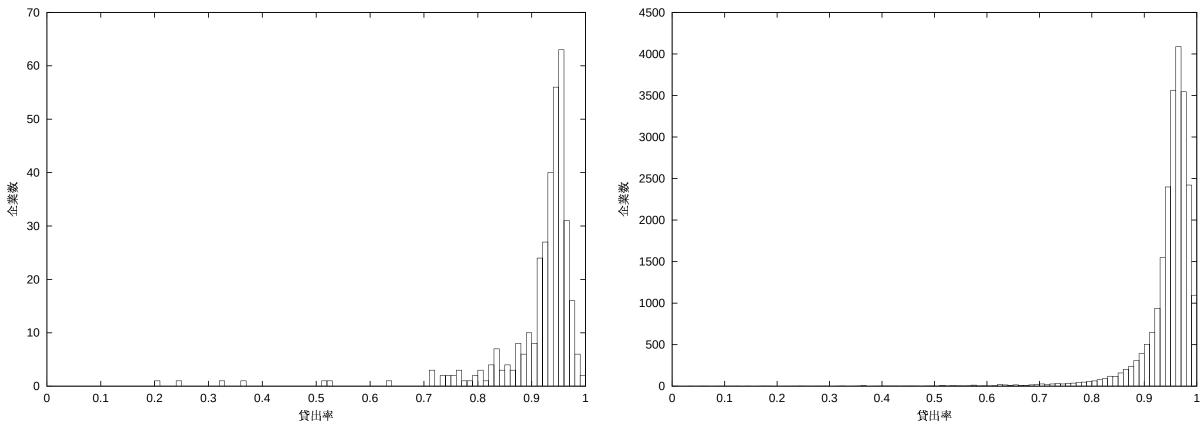

図 16: $C_\beta = 0.9$，倒産 (左)，非倒産 (右)

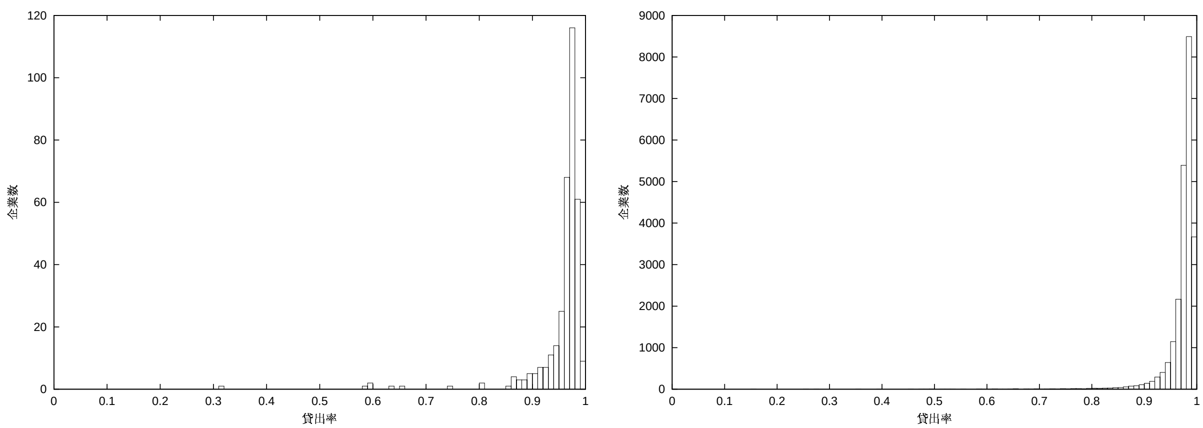

図 17: $C_\beta = 0.95$，倒産 (左)，非倒産 (右)

A.2.2 （Data2）

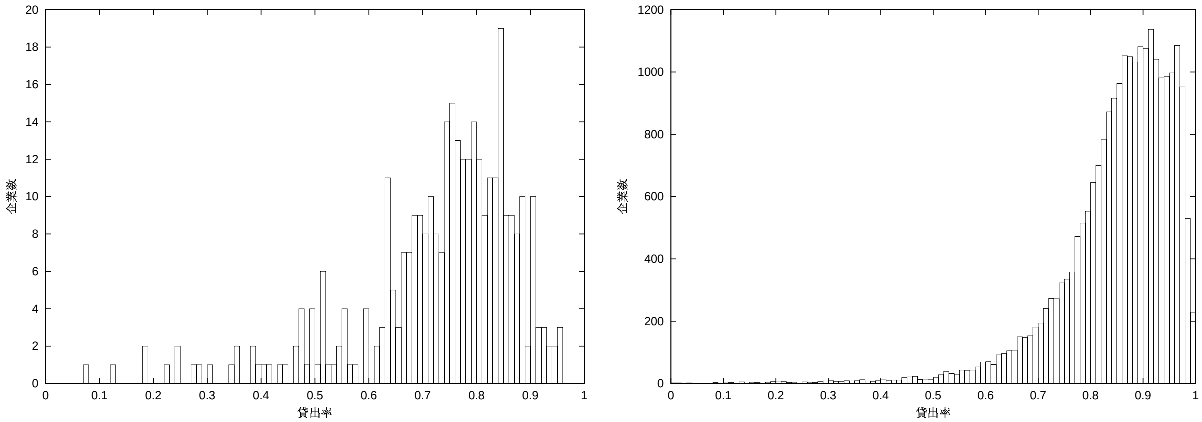

図 18: $C_\beta = 0.8$，倒産 (左)，非倒産 (右)

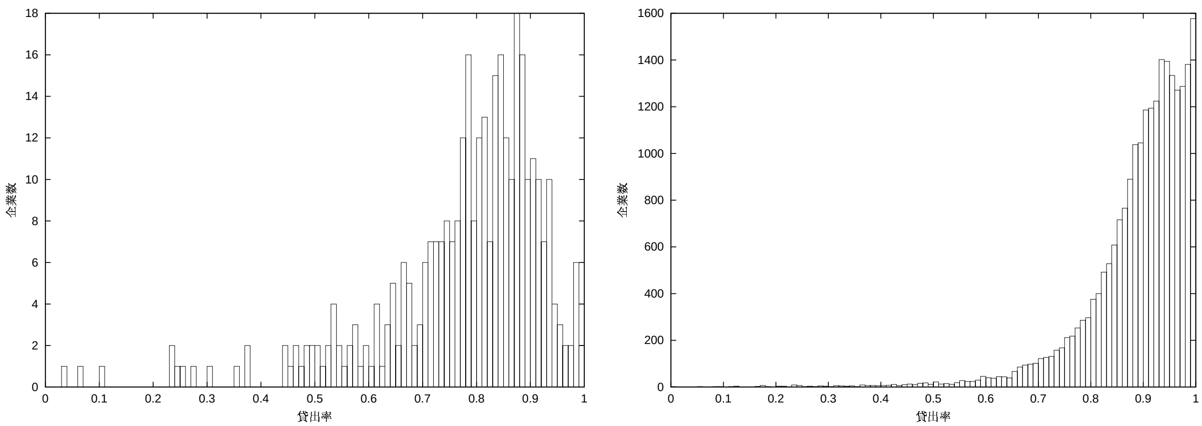

図 19: $C_\beta = 0.85$，倒産 (左)，非倒産 (右)

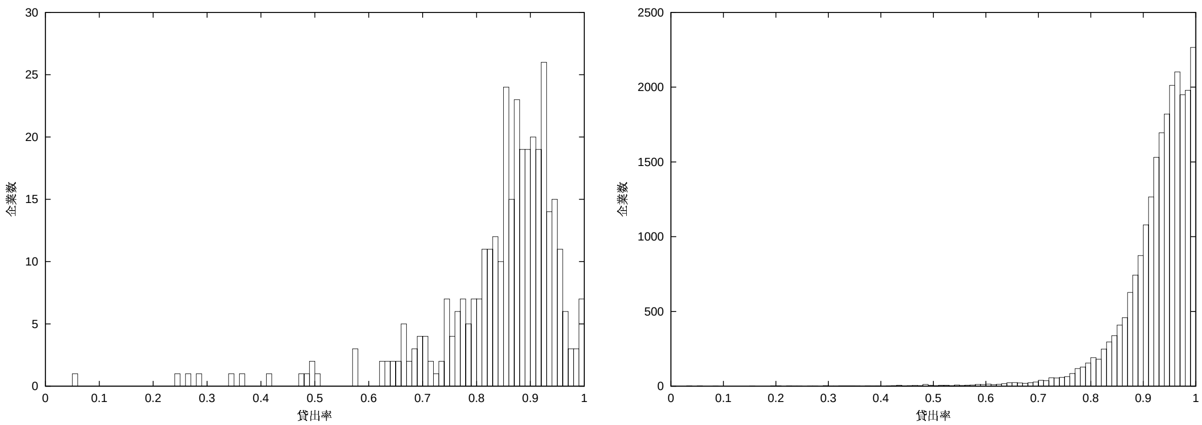

図 20: $C_\beta = 0.9$，倒産 (左)，非倒産 (右)

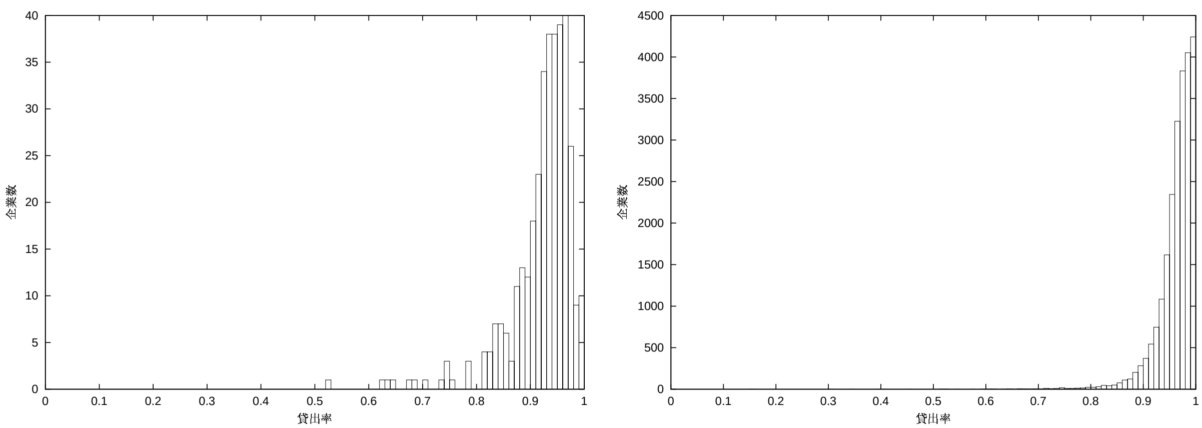

図 21: $C_\beta = 0.95$，倒産 (左)，非倒産 (右)

A.2.3 （Data3）

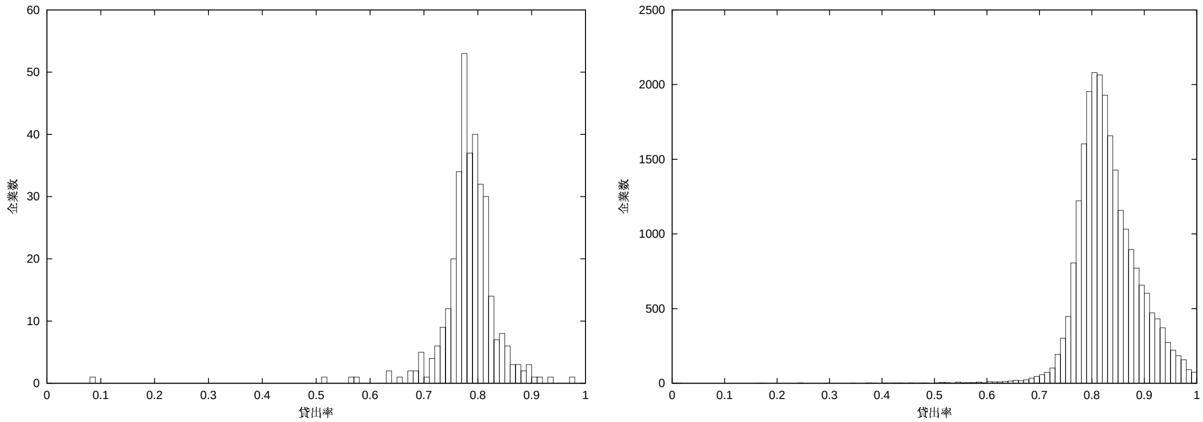

図 22: $C_\beta = 0.8$，倒産 (左)，非倒産 (右)

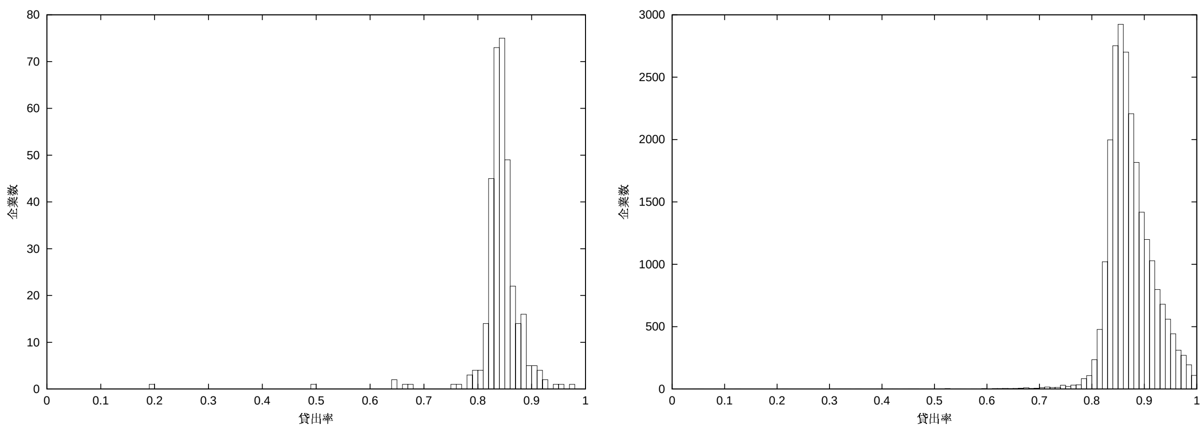

図 23: $C_\beta = 0.85$，倒産 (左)，非倒産 (右)

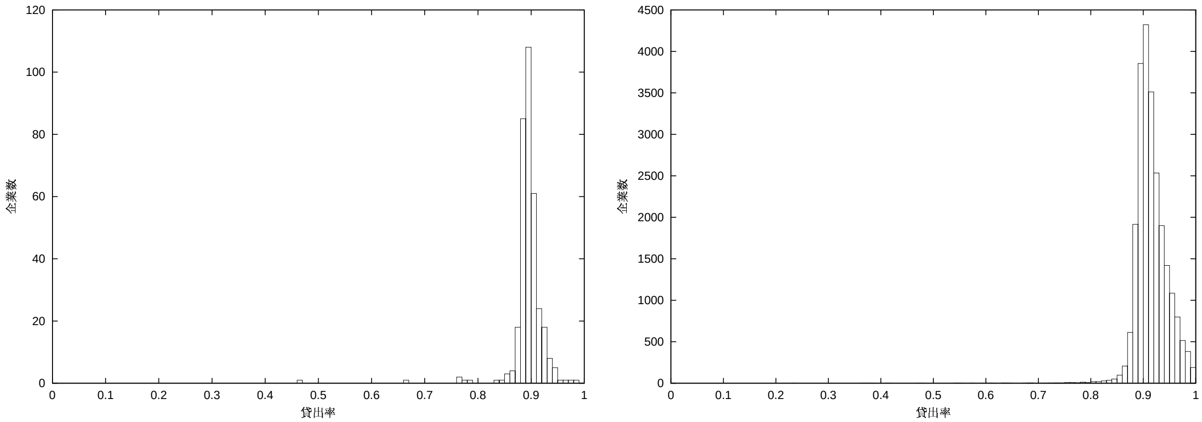

図 24: $C_\beta = 0.9$，倒産 (左)，非倒産 (右)

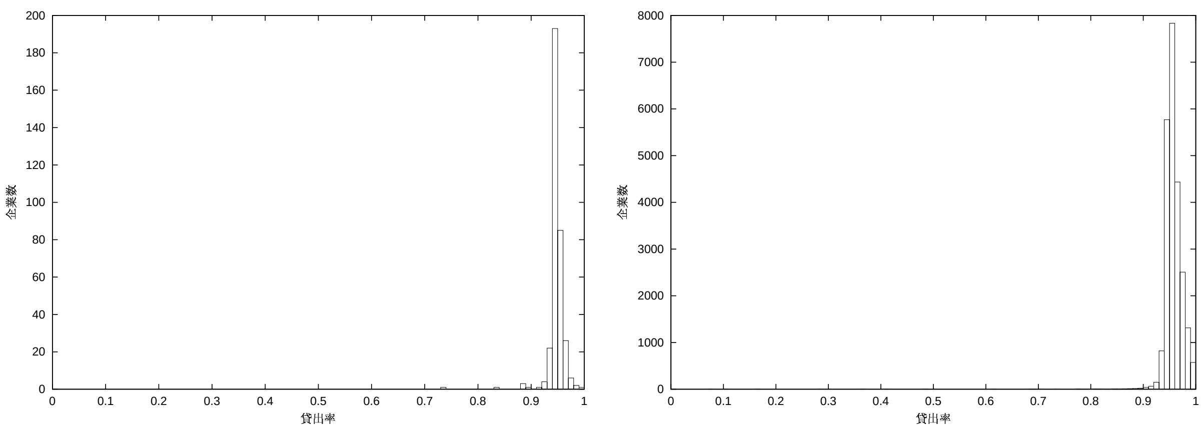

図 25: $C_\beta = 0.95$，倒産 (左)，非倒産 (右)