

目次

1	序論	1
2	統計的性質の同定	2
3	モデルの定式化	2
3.1	2 状態マルコフ変調ポアソン過程	2
3.2	モデルの構築	5
3.3	自己共分散関数の適合	5
3.4	度数分布の適合	8
4	数値実験	10
4.1	実験方法	10
4.2	パケット到着数の相関の影響	10
4.3	パケット数の度数分布の影響	13
4.4	時間スケールの影響	16
5	結論	18
A	度数分布の計算手順	i
B	2 点分布によるポワソン流の度数分布の計算手順	ii
C	数値結果	iv

1 序論

インターネットの目覚ましい発展に伴い IP トラヒックは複雑化の一途をたどっている。IP トラヒックには従来のトラヒックではあまり見られなかった自己相似性 (self-similar) や長い時間を経た後でも相関が失われないといった性質 (long-range dependence) が見られ、これらはシステムの性能に対して大きな影響を与えることが知られている。

本報告書ではインターネットの性能評価を行うため、パケットの到着時刻とパケット長の組からなる測定データに基づいて、IP トラヒックの数学モデルを構築する手法について考察する。現在このような数学モデルは数多く提案されており、それに関する研究も非常に多く行われている。しかし従来の研究ではパケットの到着時点のみを対象としており、パケット長に関する情報を取り込んだモデル化は行われていない。本研究では IP 網で典型的に見られるパケット長分布を考察の対象に含めるという点で従来の研究と異なる。

本報告書ではパケット長の情報をモデルに組み込むために、まず発生頻度の高いパケット長に注目しパケット長毎にクラス分けを行った。今回用いたデータでは送達確認のパケット (ACK:52 バイト)、最大パケット長のパケット (MTU:1500 バイト) とそれ以外のパケットの三つのクラスに分けた。ここで送達確認のパケットは、受信したパケットに対しての送達確認であるため、一方向のトラヒックにのみ注目すれば他の送信パケットとは独立なトラヒックであると考えられる。また送達確認のパケットでも最大長のパケットでもないパケットの中には、最大長を持つパケットと独立なパケットと負の相関を持つパケットが混在していると考えられる。なぜなら複数個の最大パケット長を持つパケットに引続き伝送されたパケットは、元来単一のデータであったものが最大パケット長制約の基で分割されて生じたものだと考えられるからである。本報告書では手続きを簡略化するためこの負の相関はモデル化には組み込まずに、三つのクラスをそれぞれ独立な到着流と見なしてモデル化を試みる。負の相関があるものを独立であると思ふことで最終的に得られる性能指標が安全側に評価されるものと期待される。以上今回は三つのクラスに分けて考えるが、パケットのクラス分けはデータによって様々であり、先の二種類以外にも発生頻度の高いパケット長があれば別のクラスに分類して解析することが可能である。

さてルータにおいて統計多重されるパケットがそのルータにおいて被る遅延やパケット損を決める大きな要因は二つある。一つは単位時間当りに到着するパケット数の分布である。もう一つは時間軸に沿った到着パケット数の相関である。両者の関係としては、単位時間当りの到着数の変動が小さい場合は相関は性能に影響を与えないと考えられ、逆に単位時間当りの到着数の変動が大きい場合には、相関が性能に大きな影響を与えると考えられる。従って本研究では各クラスの到着流のモデル化に当り、単位時間当りのパケットの到着数分布と時間軸に沿った到着パケット数の相関を特徴づける統計量をデータから抽出してモデルへ反映させることを試みる。具体的には数学モデルとしてマルコフ変調ポワソン過程を用い、単位時間当りのパケット到着数の度数分布、時間軸に沿ったパケット到着数の相関を表わす自己共分散関数に注目し二つの指標に合うようにモデルのパラメタを決定していく。

決定されたモデルの妥当性の考察には、有限バッファ単一サーバ待ち行列モデルにおけるパケット損率と伝送遅延を性能指標として採用した。具体的な比較の方法は、測定データを用いてシミュレーションにより得られたパケット損率および伝送遅延と、構築したモデルを用いて生成したデータを用いてシミュレーションにより得られた先の二つの指標を比較することにより行った。

本報告書の構成は以下の通りである。まず 2 章でモデルの構築に用いる統計量の定義および整理を行う。続いて 3 章でモデルの定式化を行い、上で述べた度数分布と自己共分散関数に注目することによりモデルのパラメタを決定する。そして 4 章で決定されたモデルを用いて生成したデータおよび測定データを用いてシミュレーションを行い、得られたパケット損率および伝送遅延を比較する。最後に 5 章で本報告書の結論を述べる。

2 統計的性質の同定

ここではモデルの構築に用いる統計量の定義および整理を行う．まずパケットをパケット長によって分類する．具体的にはクラス 1 (ACK のパケット, 52 バイト), クラス 2 (MTU のパケット, 1500 バイト), とそれ以外のクラス 0 の三つのクラスに分類する．以下では下添字 k ($k = 0, 1, 2$) でクラスを表す．

データの測定に当り各クラスごとに単位時間を定める．クラス k の単位時間を Δt_k とし, Λ_k を単位時間 Δt_k 当りの平均到着個数とする．本報告書では $\Delta t_k = 0.001$ ($k = 0, 1, 2$) とする．

$X_k(n)$ ($k = 0, \dots, K, n = 1, 2, \dots$) を時間区間 $((n-1)\Delta t_k, n\Delta t_k]$ に発生したクラス k のパケット数とする．そして m ブロック毎の標本平均を

$$X_k^{(m)}(n) = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=(n-1)m+1}^{nm} X_k(i) \right]$$

で表す．ここで m ブロックは Δt_k が m 個集まったもの, つまり時間を $m\Delta t_k$ で区切ったものを表す．この平均も Λ_k となることに注意する．以下肩添字 (m) で時間スケールを表す．

クラス k ($k = 0, 1, \dots, K$) の到着をモデル化するのに用いる統計量を挙げる．以下では, $M_k^{(m)}$ をクラス k の時間スケール m におけるデータ数, s をデータの測定時間とする．このとき, $M_k^{(m)} = s/m\Delta t_k$ が成り立つ．また $1_{\{A\}}$ は事象 A が起こった時 1, それ以外は 0 の値を取る指示関数である．単位時間当たりの平均到着率を Λ_k とし, 時間スケール m での分散, 自己共分散, 発生パケットの度数分布をそれぞれ $V_k^{(m)}$, $\phi_k^{(m)}(j)$, $q_k^{(m)}(i)$ と置けばそれぞれ以下のようなになる．

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= \frac{\sum_{n=1}^{M_k^{(m)}} X_k^{(m)}(n)}{M_k^{(m)}} \\ V_k^{(m)} &= \frac{\sum_{n=1}^{M_k^{(m)}} \left(X_k^{(m)}(n) - \Lambda_k \right)^2}{M_k^{(m)} - 1} \\ \phi_k^{(m)}(j) &= \frac{\sum_{n=1}^{M_k^{(m)}} \left(X_k^{(m)}(n) - \Lambda_k \right) \left(X_k^{(m)}(n+j) - \Lambda_k \right)}{M_k^{(m)} V_k^{(m)}} \\ q_k^{(m)}(i) &= \frac{\sum_{n=1}^{M_k^{(m)}} 1_{\{X_k^{(m)}(n)=i\}}}{M_k^{(m)}} \end{aligned}$$

3 モデルの定式化

3.1 2 状態マルコフ変調ポアソン過程

まず 2 状態マルコフ変調ポアソン過程 (Markov Modulated Poisson Process, 以下 MMPP) について説明する．2 状態 MMPP は以下のように定義される．連続時間マルコフ連鎖は二つの状態 1 と 2 を持ち,

状態 1 の滞在時間は率 α の指数分布に従い，状態 2 の滞在時間は率 β の指数分布に従う．マルコフ連鎖が状態 i ($i = 1, 2$) にいるとき，パケットは率 λ_i のポアソン過程に従い到着する．ここで 2 状態マルコフ連鎖の無限小作用素 \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

と表わされる．

いま，マルコフ連鎖が状態 1 にあるとする．このとき二つの事象が同時に走っている．一つはパケットの到着（率 λ_1 ）であり，もう一つは状態の遷移（率 α ）である．従って状態 1 にいるとき，率 α で遷移が起これば，パケットの到着はなく，状態は 2 に変化する．一方，率 λ_1 で到着が起これば，パケットが到着し到着後の状態遷移は状態 1 のままである（図 1 参照）．これより，2 状態マルコフ変調ポアソン過程は \mathbf{C}, \mathbf{D} を 2×2 行列として

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\alpha - \lambda_1 & \alpha \\ \beta & -\beta - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

で特徴づけられる．ここで $\mathbf{C} = \mathbf{R} - \mathbf{D}$ に注意する．特に $\lambda_2 = 0$ のとき，この 2 状態マルコフ変調ポアソン過程は 2 状態断続ポアソン過程 (Interrupted Poisson Process, 以下 IPP) と呼ばれる（図 2 参照）．さらに \mathbf{C}, \mathbf{D} は \mathbf{e} をすべての要素が 1 の列ベクトルとしたとき，

$$(\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

を満たし， $\boldsymbol{\pi}$ をこのマルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルとすれば，

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = 1 \quad (1)$$

を満たす．

続いて MMPP の平均，分散，自己共分散をそれぞれ計算する．今 N_t を区間 $(0, t]$ に到着するパケット数とする．さらに S_t を時刻 t におけるマルコフ連鎖の状態とする．さらに $\mathbf{N}(n, t)$ を $M \times M$ 行列とし，その (j, k) 要素は $Pr(N_t = n, S_t = k | S_0 = j)$ で与えられるとする．このとき $\mathbf{N}(n, t)$ は次式を満たす．

$$\mathbf{N}(n, t + \Delta t) = \mathbf{N}(n, t)(\mathbf{I} + \mathbf{C}\Delta t) + \mathbf{N}(n-1, t)\mathbf{D}\Delta t + o(\Delta t)$$

ただし， $\mathbf{N}(0, 0) = \mathbf{I}$ ， $\mathbf{N}(-1, t) = \mathbf{0}$ であり， \mathbf{I} は単位行列を表す．これより $\mathbf{N}(n, t)$ に対する Chapman-Kolmogorov の前進方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{N}(n, t) = \mathbf{N}(n, t)\mathbf{C} + \mathbf{N}(n-1, t)\mathbf{D}, \quad n \geq 0, t \geq 0 \quad (2)$$

を得る． $\mathbf{N}^*(z, t)$ を $\mathbf{N}(n, t)$ の行列母関数とすると

$$\mathbf{N}^*(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{N}(n, t)z^n$$

と表わされる．このとき式 (2) より，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{N}^*(z, t) = \mathbf{N}^*(z, t)(\mathbf{C} + z\mathbf{D})$$

となり

$$\mathbf{N}^*(z, t) = \exp[(\mathbf{C} + z\mathbf{D})t] \quad (3)$$

を得る．よって平均を $E(N_t)$ ，分散を $V(N_t)$ とし，時間区間 $((j-1)\Delta t, j\Delta t)$ の到着数を $X(j)$ としたとき幅 Δt で時間間隔 $(j-1)$ の自己共分散を $\text{Cov}(X(1), X(j))$ とすればそれぞれ

$$\begin{aligned}
 E(N_t) &= \pi \left. \frac{\partial \mathbf{N}^*(z, t)}{\partial z} \right|_{z=1} \mathbf{e} \\
 &= \pi \Lambda e t = \frac{\beta \lambda_1 + \alpha \lambda_2}{\alpha + \beta} t \\
 V(N_t) &= \pi \left. \frac{\partial^2 \mathbf{N}^*(z, t)}{\partial z^2} \right|_{z=1} \mathbf{e} + E(N_t) - \{E(N_t)\}^2 \\
 &= \frac{\beta \lambda_1 + \alpha \lambda_2}{\alpha + \beta} t + \frac{2\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\alpha + \beta)^3} t - \frac{2\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\alpha + \beta)^4} (1 - \exp[-(\alpha + \beta)t]) \\
 \text{Cov}(X(1), X(j)) &= \pi \left. \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_j} \mathbf{N}^*(z_1, z_j) \right|_{(z_1, z_j)=(1,1)} \mathbf{e} - E(X(1))E(X(j)) \\
 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \alpha \beta \exp[-(\alpha + \beta)(j-1)\Delta t]}{(\alpha + \beta)^4} (1 - 2\exp[-(\alpha + \beta)\Delta t] + \exp[-2(\alpha + \beta)\Delta t])
 \end{aligned}$$

と計算される．

次に N 個の独立な 2 状態 MMPP の重畳を考える．ここで図 2 において $\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2$ ， $\lambda_4 = \lambda_2$ と置けば，ポワソン流の重畳はまたポワソン流となることから (図 3 参照)，図 1 の MMPP と図 2 の IPP とポワソン流の重畳とは等価であることが分かる．従って以下では一つのポワソン流 a_0 と n ($n = 1, 2, \dots, N$) 個の IPP の重畳を考える． n ($n = 1, 2, \dots, N$) 番目の IPP の支流を

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} -\alpha_n & \alpha_n \\ \beta_n & -\beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N$$

とすれば，それぞれの重畳過程は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_c &= \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}_N \\
 \mathbf{Q}_c &= \mathbf{Q}_1 \oplus \mathbf{Q}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}_N \oplus a_0
 \end{aligned}$$

となる \mathbf{R}_c および \mathbf{Q}_c で定められる．ここで \oplus はクロネッカー和である．

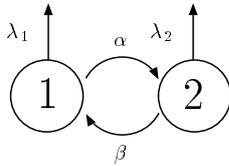


図 1: MMPP モデル

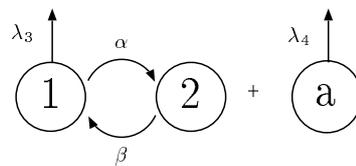


図 2: IPP モデル

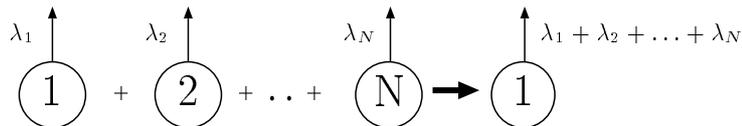


図 3: ポワソン流の重畳

3.2 モデルの構築

クラス k ($k = 0, 1, 2$) について率 $a_{k,0}$ をもつポワソン流と

$$\mathbf{R}_{k,n} = \begin{pmatrix} -\alpha_{k,n} & \alpha_{k,n} \\ \beta_{k,n} & -\beta_{k,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{k,n} = \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N_k \quad (4)$$

で定められる N_k 個の独立な IPP 流の重畳を用いてモデルを構築する．上記で定めたように，IPP は 3 つのパラメタ $(\alpha_{k,n}, \beta_{k,n}, \lambda_{k,n})$ で特徴付けられるが，

$$a_{k,n} = \frac{\beta_{k,n}\lambda_{k,n}}{\alpha_{k,n} + \beta_{k,n}}, \quad \tau_{k,n} = \alpha_{k,n} + \beta_{k,n}, \quad \gamma_{k,n} = \frac{\alpha_{k,n}}{\beta_{k,n}}$$

と置くと，3 つの組 $(a_{k,n}, \tau_{k,n}, \gamma_{k,n})$ と元のパラメタ群 $(\alpha_{k,n}, \beta_{k,n}, \lambda_{k,n})$ は 1 対 1 に対応している．よって，以下では $(a_{k,n}, \tau_{k,n}, \gamma_{k,n})$ を決定することを考える．

$Y_{k,n}^{(m)}(j)$ を式 (4) で与えられる定常な IPP 流 ($n = 0$ の場合は率 $a_{k,0}$ のポワソン流) から時間間隔 $((j-1)m\Delta t_k, jm\Delta t_k]$ の間に発生するパケット数とする．また $N_k + 1$ 個の到着流の重畳における $((j-1)m\Delta t_k, jm\Delta t_k]$ の間に発生するパケット数を $Y_k^{(m)}(j)$ とする．このとき分散および自己共分散関数は上記のパラメタを用いて以下のように表わされる．

$$\begin{aligned} V_k^{(m)}(j) &= \text{Var} \left(\sum_{t=1}^j Y_k^{(m)}(t)/m \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N_k} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^j Y_{k,n}^{(m)}(t)/m \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N_k} \frac{a_{k,n}}{m} j \Delta t_k + 2 \sum_{n=1}^{N_k} \frac{a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}}{m \tau_{k,n}} j \Delta t_k - 2 \sum_{n=1}^{N_k} \frac{a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}}{m^2} [1 - \exp(-\tau_{k,n} j m \Delta t_k)] \\ C_k^{(m)}(j) &= \text{Cov} \left(Y_k^{(m)}(1)/m, Y_k^{(m)}(j)/m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N_k} \text{Cov} \left(Y_{k,n}^{(m)}(1)/m, Y_{k,n}^{(m)}(j)/m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N_k} \frac{a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}}{m^2 \tau_{k,n}^2} \exp[-(j-1)\tau_{k,n} m \Delta t_k] (1 - \exp[-\tau_{k,n} m \Delta t_k])^2 \end{aligned} \quad (5)$$

分散 $V_k^{(m)}(j)$ に現れる最初の項 $\sum_{n=0}^{N_k} a_{k,n} j m \Delta t_k$ は時間間隔 $j m \Delta t_k$ の間に到着する平均パケット数であり，これを推定量 $j m \Delta_k$ に等しいと置くならば，分散 $V_k^{(m)}(j)$ と自己共分散関数 $C_k^{(m)}(j)$ は，共に $\tau_{k,n}$ と $\zeta_{k,n} = a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}$ の関数と見ることができる．この意味で，分散 $V_k^{(m)}(j)$ の適合と自己共分散関数 $C_k^{(m)}(j)$ の適合は等価である．

一般に，自己共分散関数 $C_k^{(m)}(j)$ に比べて，分散 $V_k^{(m)}(j)$ の方が推定量の分散が小さいと考えられるため，分散を対象とする方がより良いモデルが得られると考えられるが，手続きを簡略化するため，以下では自己共分散関数を適合の対象とする．ただし自己共分散関数は $(-\infty, +\infty)$ の値をとり，そのまま扱うのが困難なので自己共分散関数を分散で割って正規化した自己相関関数を適合の対象とする．このようにすれば，自己相関関数は $(-1, 1)$ の値をとるので，適合が容易となる．

3.3 自己共分散関数の適合

まず，式 (5) の自己共分散関数にある項 $(1 - \exp[-\tau_{k,n} m \Delta t_k])^2$ を展開すると

$$(1 - \exp[-\tau_{k,n} m \Delta t_k])^2 = (\tau_{k,n} m \Delta t_k)^2 + o((\tau_{k,n} m \Delta t_k)^2)$$

となるので

$$C_k^{(m)}(j) = \sum_{n=1}^{N_k} a_{k,n}^2 \gamma_{k,n} (\Delta t_k)^2 \exp[-(j-1)\tau_{k,n} m \Delta t_k] + o((\tau_{k,n} m \Delta t_k)^2)$$

を得る．よって特に $\tau_{k,n} m \Delta t_k \ll 1$ の場合

$$C_k^{(m)}(j) \approx \sum_{n=1}^{N_k} a_{k,n}^2 \gamma_{k,n} (\Delta t_k)^2 \exp[-(j-1)\tau_{k,n} m \Delta t_k] \quad (6)$$

と書くことができる．

さらにデータから得られた分散 $V_k^{(m)}$ および自己相関関数 $\phi_k^{(m)}(j)$ と、モデルの自己共分散関数 $C_k^{(m)}(j)$ の対応関係は次の通りである

$$V_k^{(m)} \phi_k^{(m)}(j) \Leftrightarrow C_k^{(m)}(j+1)$$

そこで適当な m を選び、データから得られた自己相関関数 $\phi_k^{(m)}(j)$ を N_k 個の指数関数の重みつき和で近似することを試みる．具体的にはまず $\phi_k^{(m)}(j)$ を j に関する連続な関数とみなし、最小自乗法を用いてパレート分布の補分布で近似する．そして得られた近似関数に対して適合を行う．パレート分布での近似は以下の手順で行う．

パレート分布は

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + z_2 x} \right)^{z_1}$$

と表わされる．よって補分布は

$$\hat{f}(x) = \left(\frac{1}{1 + z_2 x} \right)^{z_1}$$

となる．以上から考えるべき問題は、クラス k の時間スケール m における自己相関関数のデータ数を $M_k^{(m)}$ として

$$\min \sum_{j=0}^{M_k^{(m)}} | \phi_k^{(m)}(j) - \hat{f}(j) |^2$$

となるような z_1 および z_2 を決定することになる．ここで得られた関数を $f_k^{(m)}(x)$ とする．

次に得られた近似関数 $f_k^{(m)}(x)$ から [1] のアルゴリズムを用いて

$$f_k^{(m)}(x) \approx \sum_{j=1}^{N_k} p_{k,n} \exp[-\tau_{k,n} m \Delta t_k x]$$

なるパラメタ $p_{k,n}, \tau_{k,n}$ を決定する． $V_k^{(m)} f_k^{(m)}(j m \Delta t_k) \approx C_k^{(m)}(j+1)$ であるので、式 (6) を参照すれば、 $p_{k,n}$ と他のパラメタの関係は以下のようになることに注意する．

$$p_{k,n} = \frac{a_{k,n}^2 \gamma_{k,n} (\Delta t_k)^2}{V_k^{(m)}}$$

よって

$$\gamma_{k,n} = \frac{V_k^{(m)} p_{k,n}}{a_{k,n}^2 (\Delta t_k)^2}$$

を得る．従って自己共分散関数の適合によって定まるパラメタは、 $\tau_{k,n}$ と $a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}$ の値である．

ここで先に述べた $p_{k,n}$ と $\tau_{k,n}$ を決定する [1] のアルゴリズムについて説明する．今 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_k}$ であるとする．このとき τ_2 が τ_1 よりも十分に大きければ、十分大きな x に対して、 $\sum_{n=2}^{N_k} p_{k,n} \exp(-\tau_{k,n} x)$

は $p_{k,1} \exp(-\tau_{k,1}x)$ に比べて無視することができる．よって，他のパラメータに影響を与えずに $p_{k,1}, \tau_{k,1}$ を決定することができる．同様にして， τ_3 が τ_2 よりも十分に大きければ，十分大きな x に対して，他のパラメータに影響を与えずに $p_{k,2}, \tau_{k,2}$ を決定できる．以下同様に $p_{k,N_k-1}, \tau_{k,N_k-1}$ までのパラメータを他のパラメータとは独立に決定することができる．最後の p_{k,N_k}, τ_{k,N_k} は他のパラメータより一意に決定される．

具体的な手順は以下の通りである．まず $0 < c_{N_k} < c_{N_k-1} < \dots < c_1$ (c_n/c_{n+1} は十分に大きい) を考える．例えば， $c_n = c_1 10^{-(n-1)}$ 等である．さらに $1 < b < c_n/c_{n+1}$ なる b を定めれば， $x = 1, b$ の2点について次の方程式を解くことにより， $p_{k,n}, \tau_{k,n}$ ($n = 1, 2, \dots, N_k - 1$) を決定できる．

$$p_{k,n} \exp(-\tau_{k,n} x c_n) = f_k^{(m)}(x c_n)$$

これを実際にとくと

$$\tau_{k,n} = \frac{1}{(b-1)c_n} \ln \left(\frac{f_k^{(m)}(c_n)}{f_k^{(m)}(bc_n)} \right), \quad p_{k,n} = f_k^{(m)}(c_n) \exp(\tau_{k,n} c_n)$$

が得られる．

最後に p_{k,N_k} は

$$p_{k,N_k} = 1 - \sum_{n=1}^{N_k-1} p_{k,n}$$

と決定され， τ_{k,N_k} は

$$p_{k,N_k} \exp(-\tau_{k,N_k} x c_{N_k}) = f_k^{(m)}(x c_{N_k})$$

を解くことにより，

$$\tau_{k,N_k} = \frac{1}{c_{N_k}} \ln \left(\frac{p_{k,N_k}}{f_k^{(m)}(c_{N_k})} \right)$$

と決定される．先の議論より $t \geq c_j$ となる t に関して

$$\sum_{n=j}^{N_k} p_{k,n} \exp(-\tau_{k,n} t) = p_{k,n} \exp(-\tau_{k,n} t)$$

が成り立っている．

実際にクラス2の $m = 100$ の場合に $N_2 = 4$ で適合を行った例が図4である．

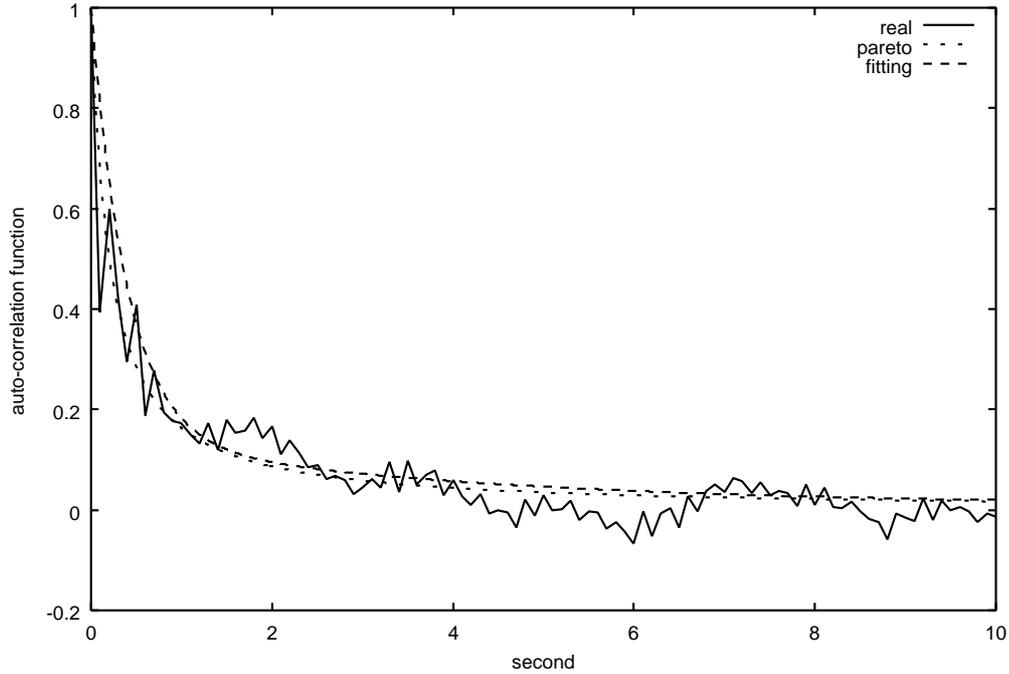


図 4: 自己共分散関数の適合例 (クラス 2, $m = 100$, $N_2 = 4$)

3.4 度数分布の適合

自己共分散関数の適合で決定されるパラメタは, $\tau_{k,n}$ と $a_{k,n}^2 \gamma_{k,n}$ の値である. よってパラメタ $(a_{k,n}, \tau_{k,n}, \gamma_{k,n})$ はまだ一意には定まらず自由度を残している. ここではパラメタ $a_{k,n}$ ($n = 0, 1, \dots, N_k$) を

$$\sum_{n=0}^{N_k} a_{k,n} = \Lambda_k, \quad a_{k,n} > 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N_k)$$

の制約の下で, データから得られた度数分布 $q_k^{(m')}(i)$ になるべく近づくように定めることを考える. ここでの時間スケール m' は一般には自己共分散関数に用いた m と異なっていても良いことに注意する. 以下では $q_k^{(m')}(i)$ が 0 でない最大の整数 i を $I_k^{(m')}$ とする.

率 $a_{k,0}$ のポワソン流と N_k 個の IPP 流の重畳過程における発生パケット数の度数分布は陽に書き下すことは出来ないが, 全てのパラメタが与えられれば, 数値的に計算することは可能である (アルゴリズムは付録 A を参照). そこで, 以下では $\mathbf{a}_k = (a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,N_k})$ が与えられたとき, 重畳過程から時間間隔 $T_k = m' \Delta t_k$ の間に発生するパケット数の度数分布を $q_k^{(m')}(i | \mathbf{a}_k)$ とし,

$$\min \max_{i \geq 0} |q_k^{(m')}(i) - q_k^{(m')}(i | \mathbf{a}_k)| \quad s.t. \quad \mathbf{a}_k > \mathbf{0}, \quad \sum_{n=0}^{N_k} a_{k,n} = \Lambda_k$$

となるような \mathbf{a}_k を発見的な手法により見いだすことを考える. $a_{k,n}$ の和が Λ_k であるので, 実際には $a_{k,n}$ ($n = 0, 1, \dots, N_k$) の内, N_k 個のパラメタを決定すれば良い.

このような最適化問題の解法は様々なものが提案されているが, 今回は, [4] に記述されている Nelder-Mead の手法 [2] の改良版を用いることにする (C によるプログラムが [3] にある). ただし, このアルゴ

リズムは制約がない最小化問題を解くものであるので、決定変数は $(a_{k,1}, \dots, a_{k,N_k})$ とし、 $a_{k,0}$ は

$$a_{k,0} = \Lambda_k - \sum_{n=1}^{N_k} a_{k,n}$$

によって定められるものとした上で、ペナルティ法を適用して、目的関数 $f_k(\mathbf{a}_k)$ を

$$f_k(\mathbf{a}_k) = \begin{cases} \max_{i \geq 0} \left| \frac{q_k^{(m')}(i) - q_k^{(m')}(i | \mathbf{a}_k)}{q_k^{(m')}(i)} \right|, & \mathbf{a}_k > \mathbf{0} \\ \frac{1}{q_k^{(m')}(I_k^{(m')})} \exp \left(\sum_{n=0}^{N_k} |a_{k,n}| 1_{\{a_{k,n} \leq 0\}} \right), & \text{その他} \end{cases}$$

と置くことにする。

実際にクラス 0 の $m' = 10$ の場合に $N_0 = 3$ で適合を行った例が図 5 である。

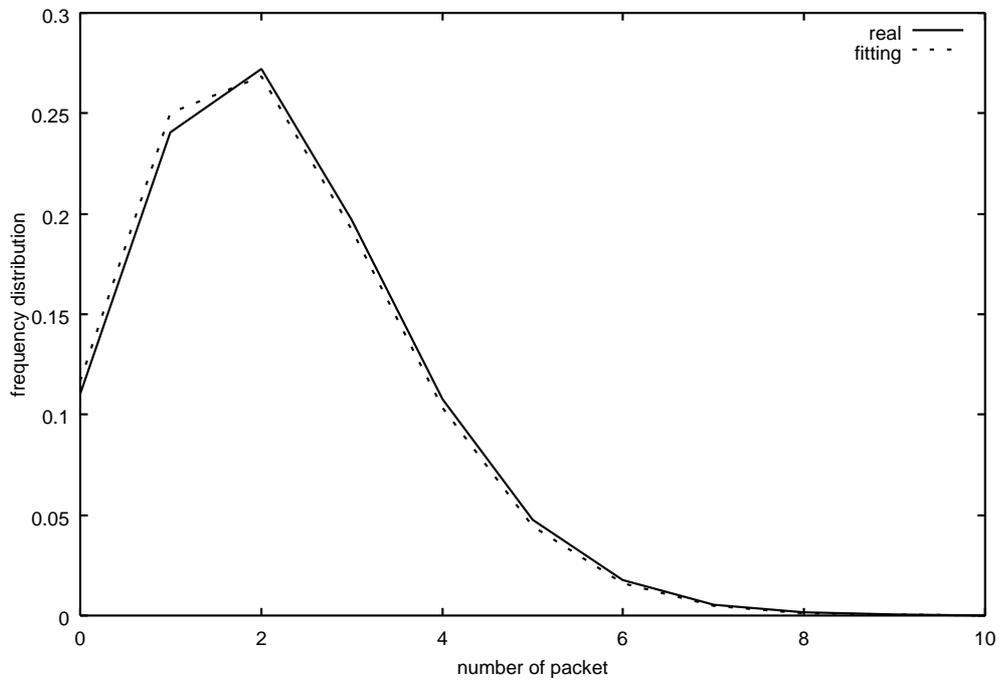


図 5: 度数分布の適合例 (クラス 0, $m' = 10$, $N_0 = 3$)

4 数値実験

本節では到着時間とパケットサイズからなる測定データならびにモデル化によって得られた 2 状態マルコフ変調ポワソン過程を入力とする，有限バッファ単一サーバ待ち行列モデルのパケット損率および伝送遅延をシミュレーションにより求める．そして両者の比較を通して構築したモデルの妥当性を見る．シミュレーション時間は 3600 秒である．

4.1 実験方法

まず前節で構築されたモデルから疑似乱数を用いて到着時間とパケットサイズからなるデータを生成する方法について述べる．疑似乱数を生成するルーチンは [3] の 209 ページにある `ran2` を用いた．

それぞれのクラスの各 IPP の支流において，到着および遷移はそれぞれパラメタ $\lambda_{k,n}$, $\alpha_{k,n}$, $\beta_{k,n}$ の指数分布に従って起こる．よって状態 1，状態 2 の平均滞在時間はそれぞれ $1/\alpha_{k,n}$, $1/\beta_{k,n}$ となり，状態 1 にいるときは確率 $\alpha_{k,n}/(\alpha_{k,n} + \lambda_{k,n})$ で状態 2 に遷移し，確率 $\lambda_{k,n}/(\alpha_{k,n} + \lambda_{k,n})$ でパケットが到着する．これらの確率に従い疑似乱数を用いて，到着時間とパケットサイズのデータを生成する．一つのポワソン流 $a_{k,0}$ についても同様にし，各 IPP の支流から生成されたデータと重ね合わせることでそれぞれのクラスについてのデータが生成できる．最後に全てのクラスのデータを重ね合わせてデータが完成する．またクラス 0 に対しては，測定データのパケットサイズ分布に従い，生成するパケットサイズを決定する．

ここで以下の点に注意する．各 IPP の支流のパラメタにおいて，各状態の平均滞在時間 $1/\alpha_{k,n}$ あるいは $1/\beta_{k,n}$ がシミュレーション時間を越えるもしくはそれと同オーダーの値をとる場合には，どちらかの状態に滞在したまま遷移が起こらないことが考えられる．これを避ける方法を述べる．どちらの状態からシミュレーションが始まるかは確率的に与えられる． $\beta_{k,n}/(\alpha_{k,n} + \beta_{k,n})$ の確率で状態 1 から $\alpha_{k,n}/(\alpha_{k,n} + \beta_{k,n})$ の確率で状態 2 から始まる．よってこれらの平均をとることにより求めることにする．具体的には以下のようにする．まずパケット損率，伝送遅延を L, D と置く．先に述べた事柄が発生した各 IPP の支流に順に $1, 2, \dots, l$ と番号をつけておき，各パラメタを α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, l$) と置く．その上で i 番目の支流がどの状態からシミュレーションが始まるかという事象を下添字 j_i ($j_i = 1, 2$) で書くことにすれば，条件付きのパケット損率および伝送遅延は L_{j_1, j_2, \dots, j_l} , D_{j_1, j_2, \dots, j_l} と表わされる．以上よりパケット損率，伝送遅延は $\sigma_i = \beta_i/(\alpha_i + \beta_i)$ ($i = 1, 2, \dots, l$) と置いてそれぞれ

$$L = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l L_{1,1,\dots,1} + (1 - \sigma_1) \sigma_2 \dots \sigma_l L_{2,1,\dots,1} + \dots + (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \dots (1 - \sigma_l) L_{2,2,\dots,2}$$

$$D = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l D_{1,1,\dots,1} + (1 - \sigma_1) \sigma_2 \dots \sigma_l D_{2,1,\dots,1} + \dots + (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \dots (1 - \sigma_l) D_{2,2,\dots,2}$$

となる．

4.2 パケット到着数の相関の影響

ここでは時間スケールの選び方によって生じる自己共分散関数の適合の問題点について考える．3.3 節の手順によりクラス 1 の $m = 10$ の場合の自己相関関数をパレートの補分布で近似した関数の一例が図 6 の曲線 f2 である．さらに 3 章の手順で構築したモデルを用いて得られたパケット損率および伝送遅延はそれぞれ図 7 の l2 と図 8 の d2 である．これをみれば分かる通りパケット損率，伝送遅延の双方で望ましい結果が得られていない．この原因として図 6 の測定データから得られる自己相関関数において 0 秒からおよそ 1 秒までに表れる局所的に強い相関が示す部分の影響を無視していることが挙げられる．よってこの部分の影響をモデルに反映させるため，本節では自己相関関数の局所的に表われる相関の強い部分に重みを

置いて自己相関関数をパレートの補分布で近似することにより，その部分が構築したモデルと測定データから得られる性能指標の類似度に与える影響を見る．そして重みづけを行わない場合との類似度への影響の違いを比較する．

以下はパレートの補分布での近似の際の重みづけの一例である．先に述べたように図 6 において自己相関関数が局所的に強い相関を示す部分をモデルに反映させるため，その部分に重みをつけることにする．実際には自己相関関数がある値 h_1 以上になる場合に重みづけを行う．ただし時刻 0 から大きな傾きで減少して行く部分では自己相関関数が h_1 以上の値をとることがあるが，今注目している部分とは性質が異なるためこの部分に対しての重みづけは行わない．具体的にはある定数を h_2 として自己相関関数の時刻 0 から h_2 までの部分に関しては重みづけを行わないことにする．さらに $h_3(j), (j = 0, 1, \dots, M_k^{(m)})$ で重みづけを行うことで以下の問題を考える．

$$\min \sum_{j=0}^{M_k^{(m)}} h_3(j) 1_{\{\phi_j^{(m)} \geq h_1, j \geq h_2\}} |\phi_k^{(m)}(j) - \hat{f}(j)|^2$$

図 6 の例の場合は $h_1 = 0.1, h_2 = 15, h_3(j) = j$ とした．

図 6 はクラス 1 の $m = 10$ の場合の自己相関関数をパレートの補分布で近似する際に，局所的に強い相関を表す部分に重みづけを行った場合と，重みづけを行わない場合および実際の自己共分散関数を示したものである．それぞれの決定されたパラメタは表 1 から表 6 である．また図 7，図 8 が回線利用率 0.8 のときの，測定データおよびそれぞれの場合について構築したモデルから得られるパケット損率および伝送遅延の計算結果を比較したグラフである．

二つの結果を比較すれば分かる通り，重みをつけた方が測定データから計算したものに近いものが得られる．これは重みづけを行うことで，相関をうまくモデルに反映することができたからだと考えられる．従って自己共分散関数の適合に関しては，自己共分散値がある程度大きい部分を捉えることが重要であるとわかる．逆に自己相関関数が時間の経過に伴い，0 からの変化が小さくなる部分は測定データおよびモデルから得られる性能指標の類似度に与える影響は小さいと考えられる．

このように相関が性能に対して大きな影響を持っていることが分かるが，自己共分散関数の適合が時間スケールによっては測定データの性質に大きく依存してしまうことも分かる．これは自己共分散関数の推定量の分散が大きいことに起因すると考えられる．従って相関を捉える指標としてより推定量の分散が小さいものを用いることは価値があると考えられる．

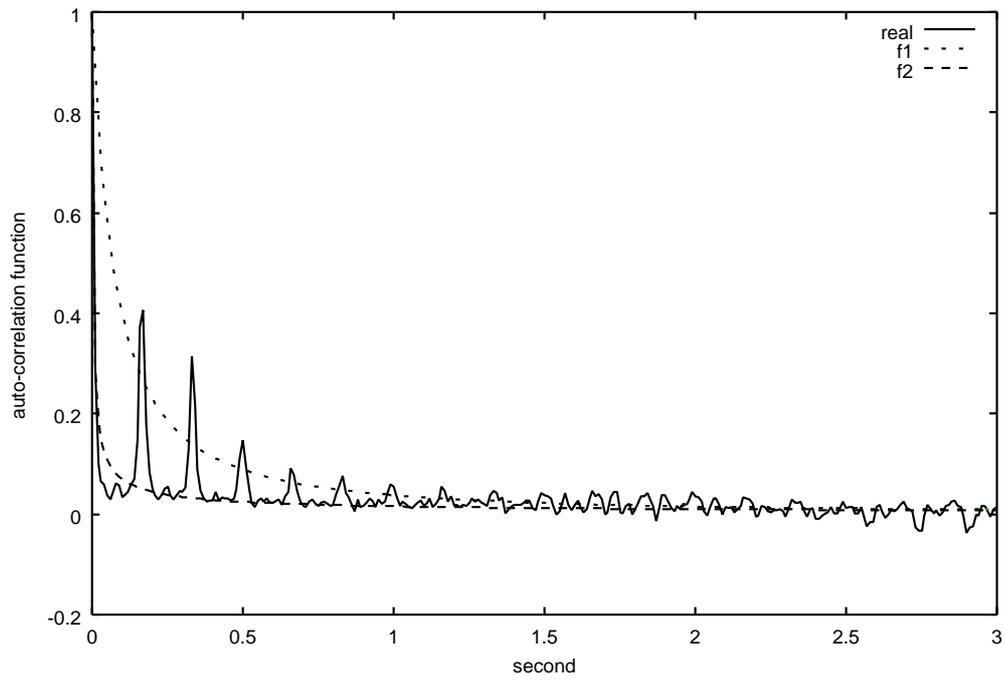


図 6: 自己共分散関数の近似関数の例 クラス 1, $m = 10$, (f1:重みづけをした場合, f2:しない場合)

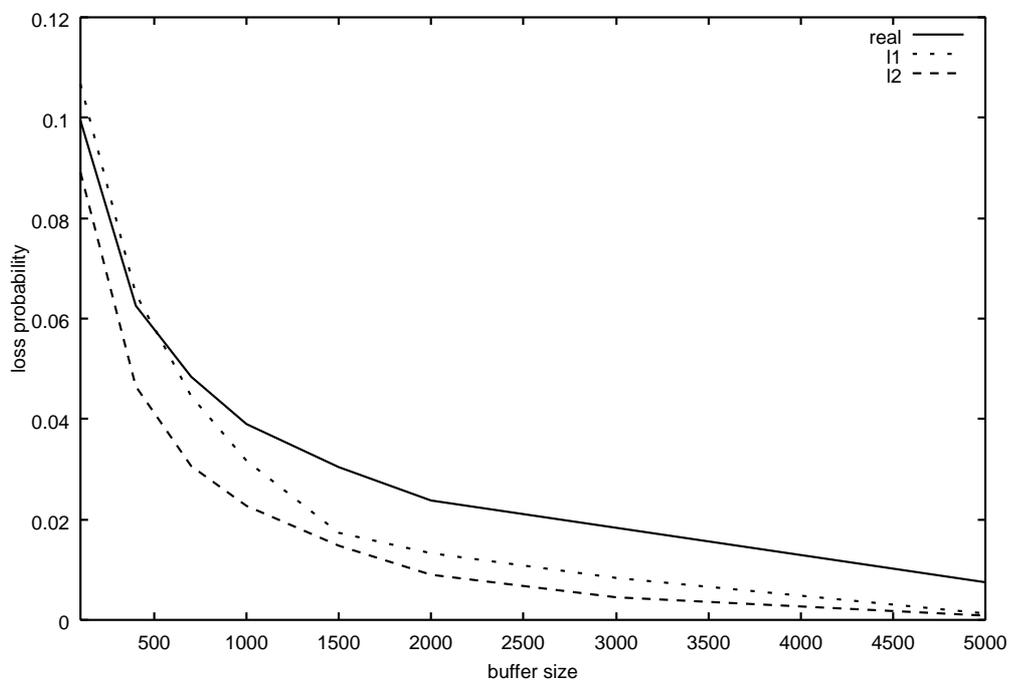


図 7: パケット損率の比較 $m = 10$, $m' = 10$ (l1:重みづけをした場合, l2: しない場合)

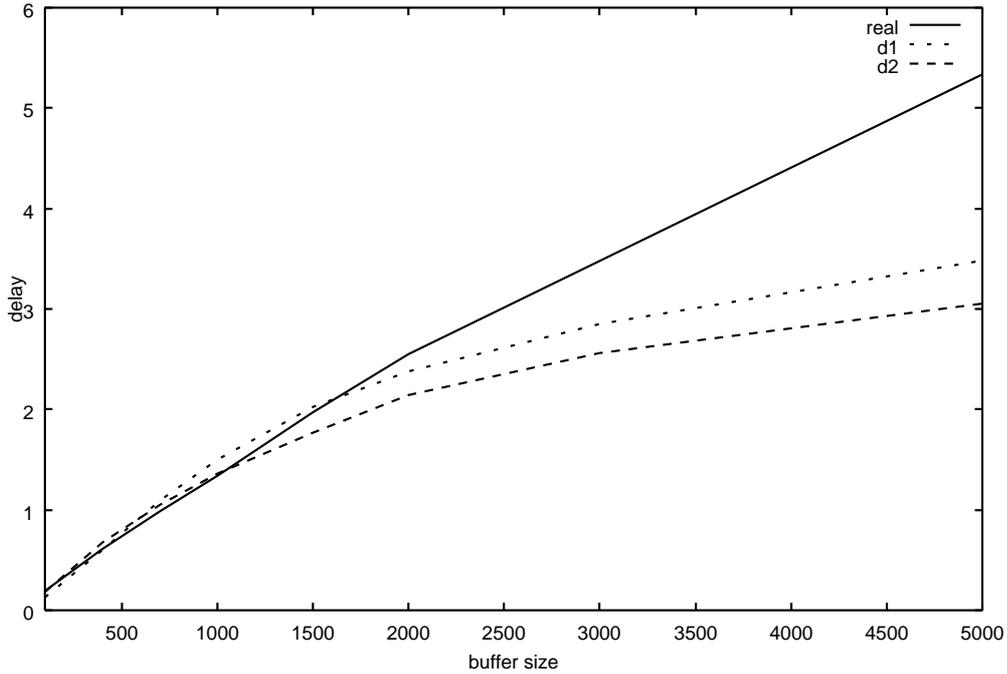


図 8: 伝送遅延の比較 $m = 10$, $m' = 10$ (d1:重みづけをした場合, d2:しない場合)

4.3 パケット数の度数分布の影響

ここでは度数分布の適合の際の問題点について考える．3.4 節の手順によりクラス 2 の $m = 10$, $m' = 100$ の場合の度数分布の適合例が図 9 の f4 である．この様に度数分布の形状によっては 3.4 節の手順では精度の良い近似解を得られない場合がある．この状況を改善するため到着流の拡張を試みる．

具体的な手順は各クラスにおけるポワソン流から，到着率 $a_{k,0}$ で二つ以上のパケットが到着することを許すことにし，実際には 2 点分布を用いることにする．到着個数を $d_{k,1}$, $d_{k,2}$ ($d_{k,1} \leq d_{k,2}$) と置くととき，到着数が $d_{k,1}$ である確率を r_k とすると， $d_{k,2}$ である確率は $1 - r_k$ となる．従って 3.4 節の問題に決定変数として r_k が加わり，ペナルティー関数は以下ようになる（度数分布の計算方法は B 参照）．

$$f_k(\mathbf{a}_k, r_k) = \begin{cases} \max_{i \geq 0} \left| \frac{q_k^{(m')}(i) - q_k^{(m')}(i | \mathbf{a}_k, r_k)}{q_k^{(m')}(i)} \right|, & \mathbf{a}_k > \mathbf{0}, 0 < r_k < 1 \\ \frac{1}{q_k^{(m')}(I_k^{(m')})} \exp \left(\sum_{n=0}^{N_k} |a_{k,n}| 1_{\{a_{k,n} \leq 0\}} + |r_k| 1_{\{r_k \leq 0, r_k \geq 1\}} \right), & \text{その他} \end{cases}$$

図 9 は測定データから得られる度数分布と到着流に拡張を施した場合と施さない場合の度数分布の適合例を比較したものであり，表 7 から表 9 がポワソン流に拡張を施さない場合の決定されたパラメタであり，表 13 から表 15 がポワソン流に拡張を施した場合の決定されたパラメタである．また図 10，図 11 は回線利用率 0.8 の場合の，測定データおよびそれぞれの場合について構築したモデルから得られるパケット損失率，伝送遅延の計算結果を比較したグラフである．

二つの結果を比較すれば分かる通り，度数分布の適合の段階で精度の良い近似解が得られている方が，最終的な計算結果も測定データから計算されたものに近いものが得られている．このことから，パケット到

着数の度数分布をモデルに取り込むことが重要であるとわかる。

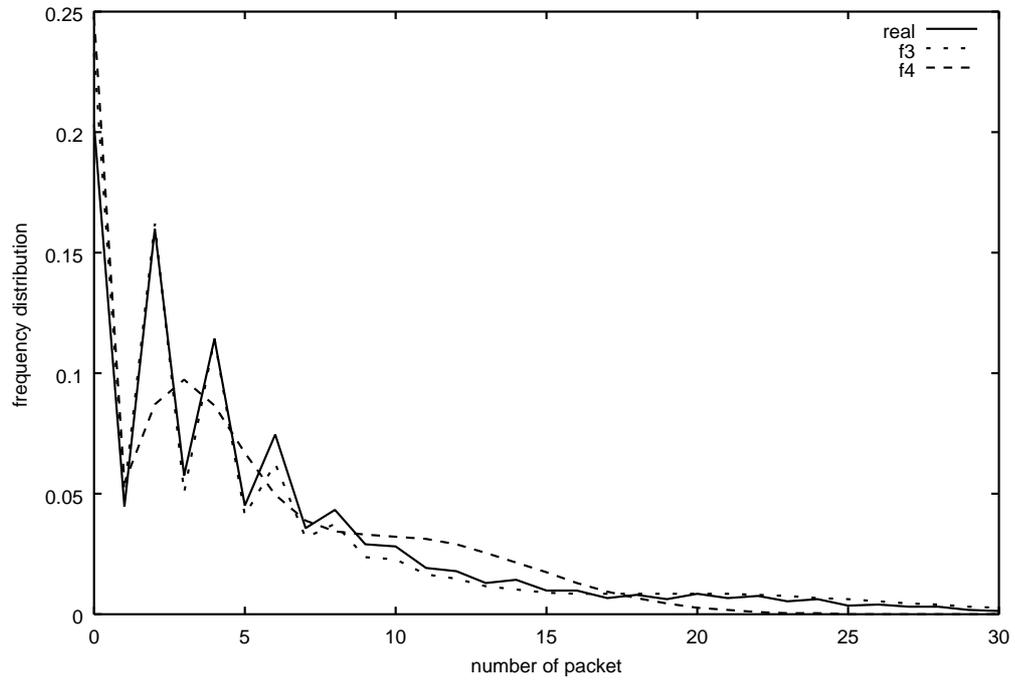


図 9: 度数分布の適合例 クラス 1, $m = 10$, $m' = 100$, (f3:拡張した場合, f4:拡張しない場合)

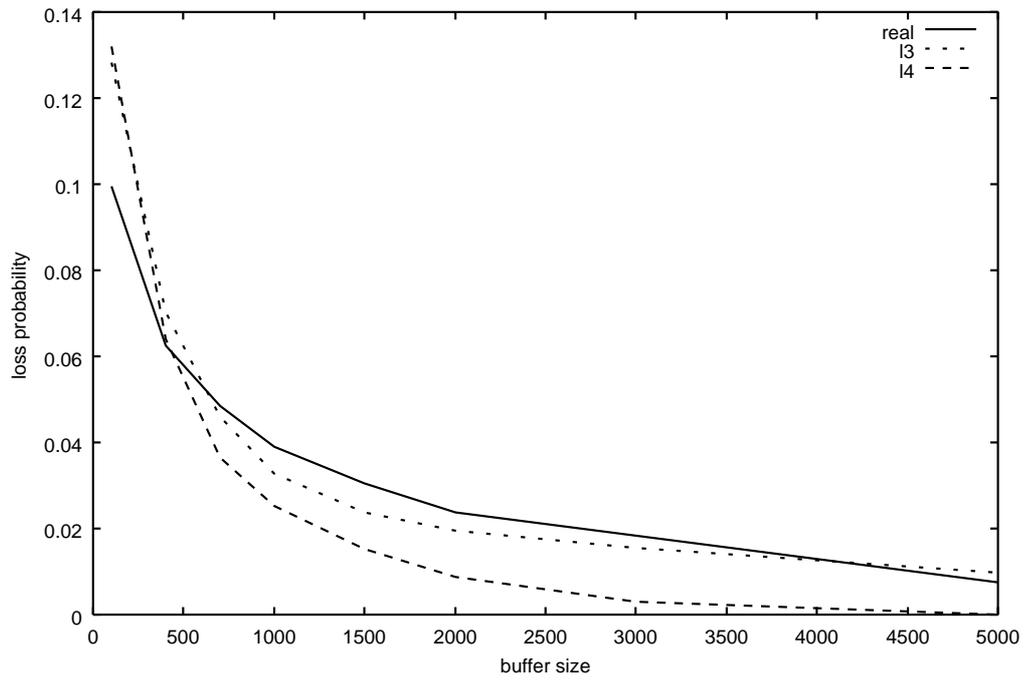


図 10: パケット損率の比較, $m = 10$, $m' = 100$ (l3:拡張した場合, l4:拡張しない場合)

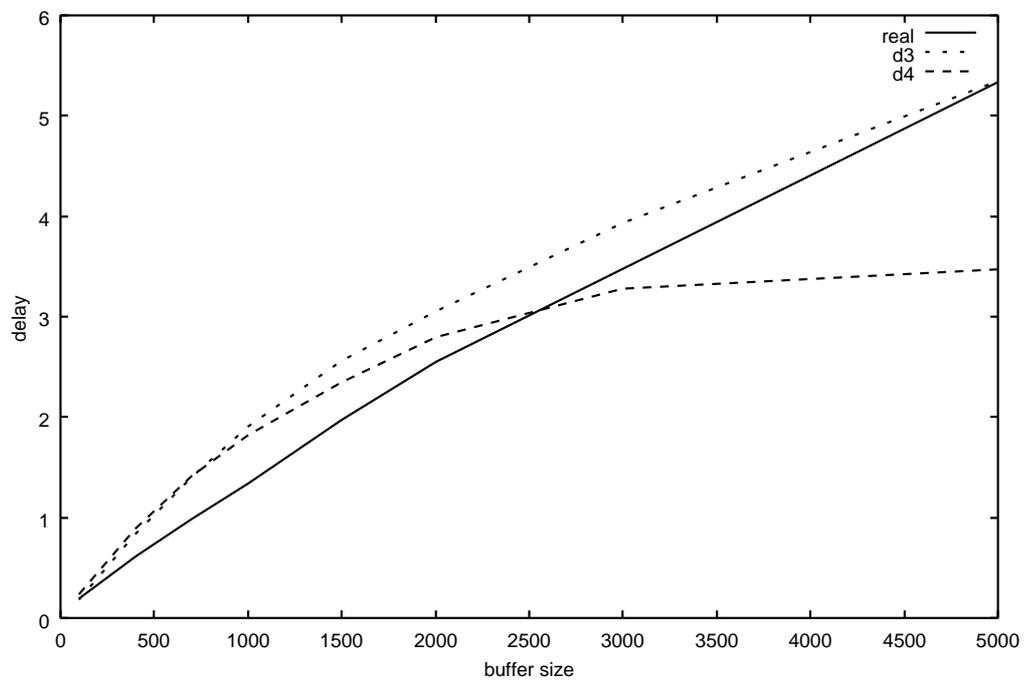


図 11: 伝送遅延の比較, $m = 10$, $m' = 100$ (l3:拡張した場合, l4:拡張しない場合)

4.4 時間スケールの影響

ここでは自己共分散関数および度数分布の適合を行う際の時間スケールを変化させて、時間スケールの変化が、測定データおよびそれぞれの場合に構築したモデルから得られる性能指標の類似度に与える影響について試みる。用いる時間スケールは $m = 10, 100$, $m' = 10, 100$ である。 m および m' の組合わせを変えて4通りの実験を行った。決定されたパラメタは表 10 から表 21 である。また図 12, 13 が回線使用率 0.8 の場合の、測定データおよびそれぞれの場合について構築したモデルから得られるパケット損率および伝送遅延を比較したグラフである。

結果を見るとバッファサイズの大きいところに関しては、 $m = 10$, $m' = 100$ の時間スケールの場合に、測定データからの結果に最も近いものが得られていることが分かる。これを $m = 100$, $m' = 10$ の時間スケールの場合と比較すると、結果に大きな違いが表われている。このことから自己共分散関数ならびに度数分布の特性をモデルに組み込む際の時間スケールが、測定データおよびそれぞれの場合に構築したモデルから得られる性能指標の類似度に対して非常に大きな影響を持っていることが分かる。従ってそれぞれの指標について最適な時間スケールを見つけ出すことが重要になる。ただし最適な時間スケールは指標毎に存在するのではなく、双方の組み合わせによる最適な時間スケールが存在すると考えられる。従って時間スケールが性能に与える影響を議論する際には、その組み合わせに注目する必要がある。

一方バッファサイズの小さいところではバッファサイズの大きいところと異なる挙動を示している。これはバッファサイズによって先に述べた最適な時間スケールの組み合わせが異なっているためだと考えられる。原因の一つとしてはバッファサイズが大きい場合はパケットが強い相関を持っていなければパケット損は起こりづらいが、バッファサイズが小さければパケットがそれほど強い相関を持っていなくても十分にパケット損は起こり得るということが挙げられる。このようにバッファのサイズによって、測定データおよびモデルから得られる性能指標の類似度に影響を与える指標および時間スケールが異なっていると考えられ、やはり時間スケールの選び方は非常に重要であると分かる。

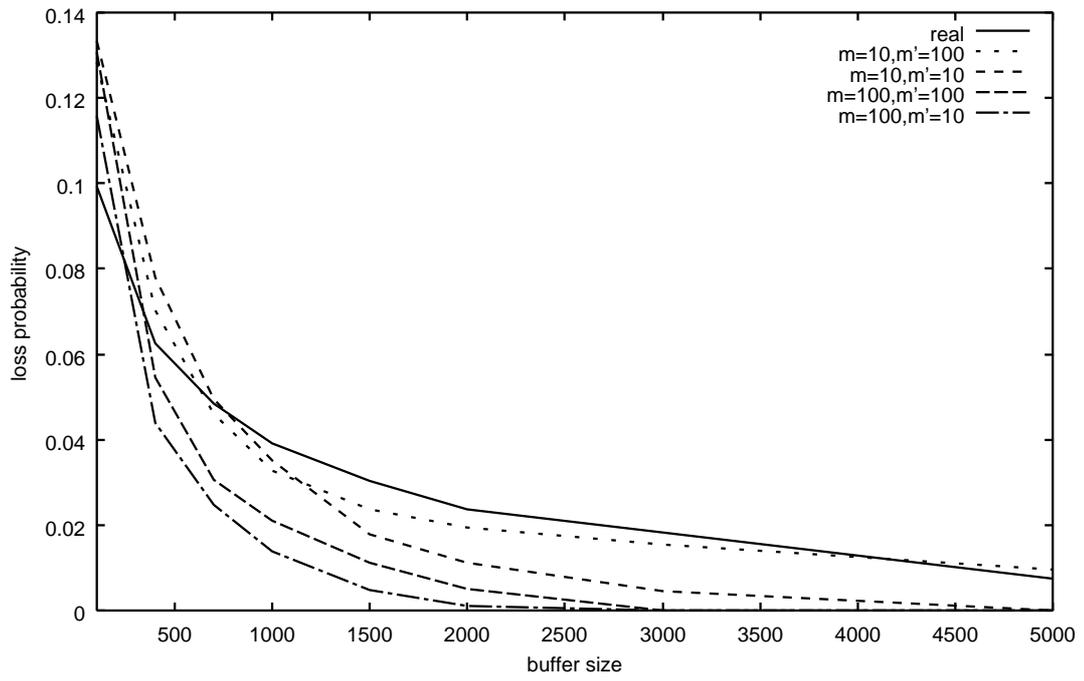


図 12: パケット損率の比較

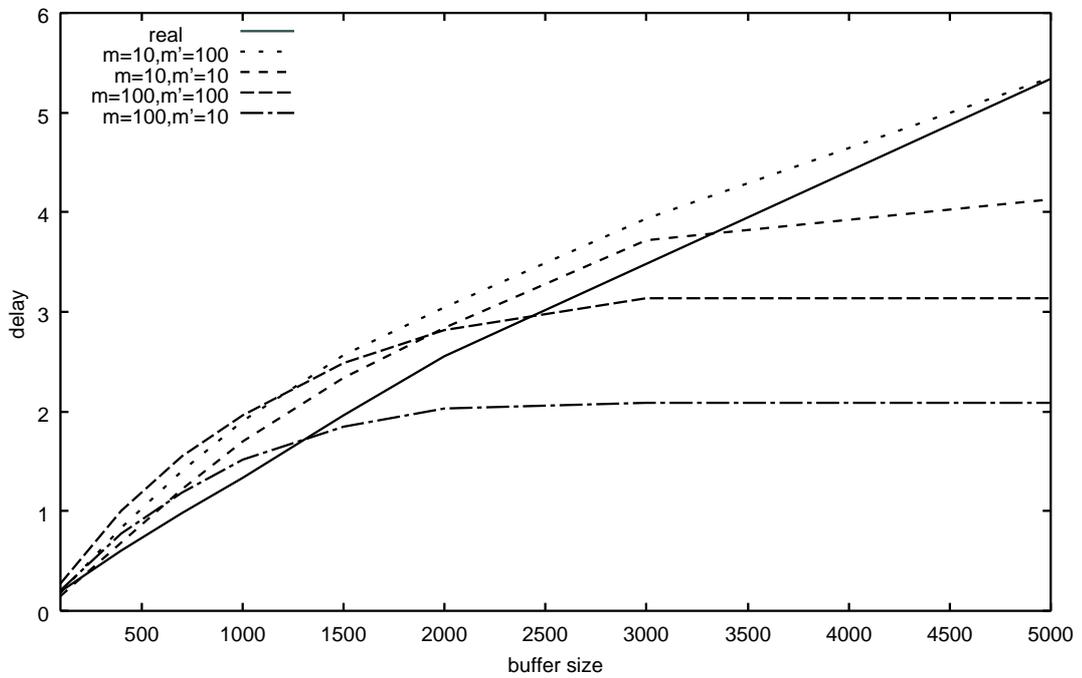


図 13: 伝送遅延の比較

5 結論

本報告書では IP トラフィックの数学モデルを構築する際に、単位時間当りに到着するパケット数の度数分布と時間軸に沿った到着パケット数の相関を表す自己共分散関数に注目した。そして、時間軸に沿ったパケット到着数の相関をモデルに取り入れる際の適合手順の違いによる影響、パケット数の度数分布の適合の精度の違いによる影響、およびそれぞれの指標からモデルのパラメタを決定する際の時間スケールの違いによる影響を調べるために数値実験を行った。

数値実験によりパケット到着数の相関が、測定データおよび構築したモデルから得られる性能指標の類似度により大きな影響を与えることが分かった。従って、相関に関する統計量を正確に抽出することが極めて重要となる。今回は相関を捉える統計量として自己共分散関数を用いたが、先にも述べた通り推定量の分散が小さい指標を用いることは価値がある。また与えられたデータ毎に相関を捉える指標を変化させ、抽出した指標がそれぞれ性能に与える影響を比較してみることも価値があると考えられる。

また、パケット数の度数分布も性能指標の類似度に大きな影響を持っていることが分かった。従って、パケット到着数の相関だけでなくパケット数の度数分布についても精度の高い適合が必要となる。

さらにそれぞれの指標からモデルのパラメタを決定する際に注目する時間スケールが性能指標の類似度に大きく影響することが分かった。従って、さらに時間スケールを変化させて数値実験を行うことは価値があると考えられる。最終的には、測定データの統計量を与えられたとき、測定データを観察して最適な時間スケールを与えられるようになることが望ましい。

本報告書では回線使用率が 0.8 の場合の数値実験を行った。回線使用率が 0.8 というのは回線状況としては混み合った状態である。図 14, 図 15 を比較すれば、回線使用率が 0.4 の場合との違いが良く分かる。本報告書で構築したモデルでは、回線使用率が 0.4 の場合には望ましい結果が得られていない。つまり回線が空いている場合には測定データおよび構築したモデルから得られる性能指標を類似させることができている。図 14 をみれば利用率が 0.4 の場合は、相関が強く表れている部分での到着が性能に与える影響の大半を占めていることが分かる。これは回線が空いている場合は回線が混んでいる場合よりも厳密に相関を捉え、モデルに反映しなければならぬということである。このことが回線が混んでいる場合よりもモデル化を複雑にしている原因であると考えられる。本報告書では度数分布の適合の際に、モデルによる度数分布を測定データに近づけるためにポワソン流 $a_{k,0}$ からの到着に拡張を施した。しかしポワソン流 $a_{k,0}$ からの到着は相関とは無関係の量であるため、ポワソン流 $a_{k,0}$ からの到着が増加することは望ましくない。従って、相関を含んだ量である各 IPP の支流からの到着に拡張を施すことに価値があると考えられる。このようにすれば自己共分散関数の適合により取り込んだ相関をモデルにうまく反映させることができ、より良い結果が得られると考えられる。

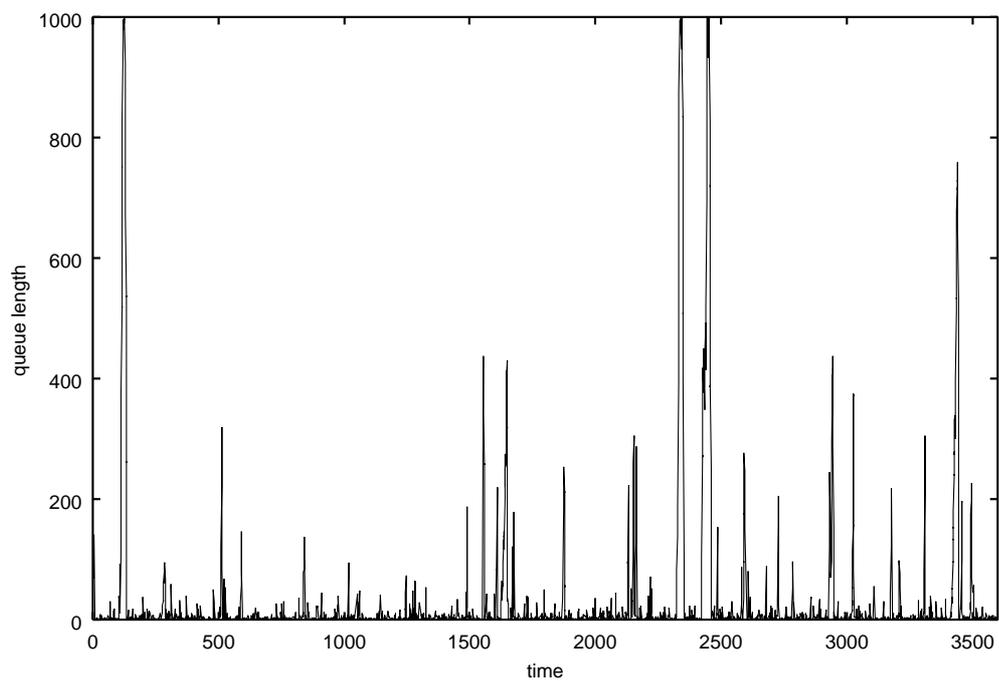


図 14: 測定データを用いたシミュレーションのスナップショット (利用率 0.4)

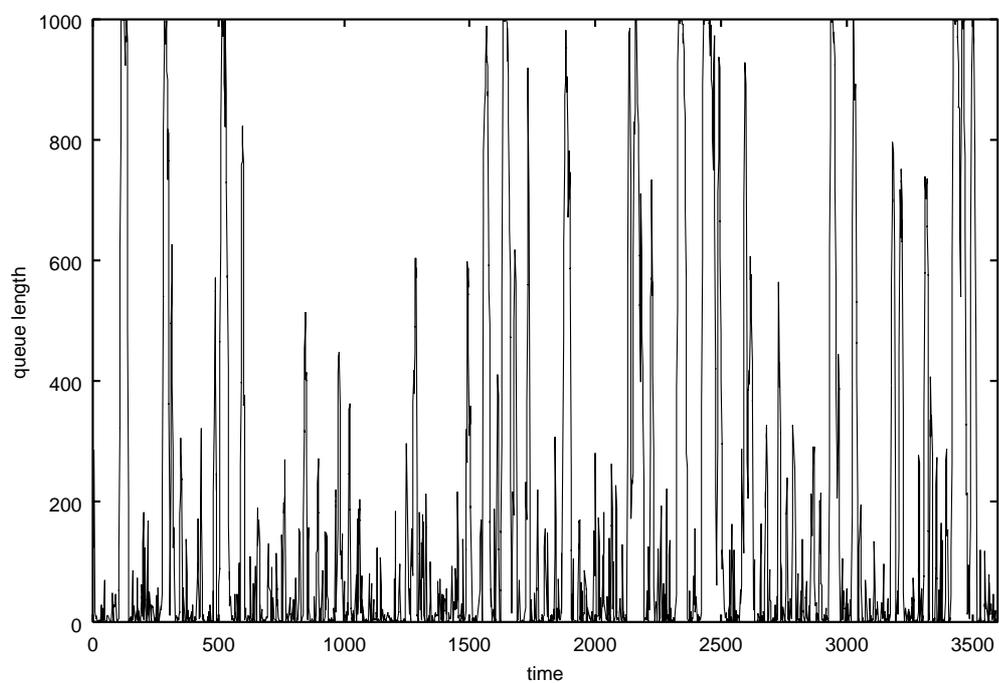


図 15: 測定データを用いたシミュレーションのスナップショット (利用率 0.8)

謝辞

日頃からご教授頂き、本研究に対しても熱心なご指導を賜った福島雅夫教授、ならびに本報告書作成に
当り細部に至るまで貴重なご指摘とご指導を頂いた滝根哲哉助教授に心より感謝いたします。また、様々
な面でお世話になりました山下信雄助手をはじめとする福島研究室の方々に厚く御礼申し上げます。最後
にテストベッドでの測定データを提供していただいた KDDI 研究所に深謝いたします。

参考文献

- [1] A. Feldmann and W. Whitt (1998) Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to
analyze network performance models. *Performance Evaluation*, vol.31, pp.245–279.
- [2] J. A. Nelder and R. Mead (1965) A simplex method for function minimization. *Computer Journal*,
vol.7, pp.308–313,
- [3] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery (1988) *Numerical Recipes in
C*, Cambridge Univ. Press, New York.
(邦訳：丹慶勝市，奥村晴彦，佐藤俊郎，小林誠 (1993) ニューメリカルレシピ・イン・シー，C 言語
による数値計算のレシピ，技術評論社)
- [4] M. H. Wright (1996) Direct search methods: Once scorned, now respectable. *Numerical Analysis
1995*, D. F. Griffiths and G. A. Watson (Eds.), Addison Wesley, pp.191–208.

A 度数分布の計算手順

ここでは式 (4) の $(\mathbf{R}_{k,n}, \mathbf{Q}_{k,n})$ で表わされる IPP 流から時間間隔 $T_k = m' \Delta t_k$ の間に発生するパケット数の度数分布 $q_k^{(m')}(i)$ を計算する手順を与える．ここで $\mathbf{R}_{k,n} = \mathbf{C}_{k,n} + \mathbf{D}_{k,n}$, $\mathbf{Q}_{k,n} = \mathbf{D}_{k,n}$ であることに注意する．

まず N を T_k の間に到着するパケット数とし, S_0, S_e をそれぞれサービスの開始時点ならびに終了時点における到着を支配するマルコフ連鎖の状態とする． $\mathbf{A}_{k,n}^*(z)$ を $M \times M$ 行列とし, その (i, j) 要素は

$$[\mathbf{A}_{k,n}^*(z)] = E[z^N \mathbf{1}_{(S_e=j)} | S_0 = i]$$

で与えられるものとする．(3) より, $\mathbf{A}_{k,n}^*(z)$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{A}_{k,n}^*(z) = \exp[(\mathbf{C}_{k,n} + z\mathbf{D}_{k,n})T_k] \quad (7)$$

$\mathbf{A}_{n,k}(l) (l \geq 0)$ を $M \times M$ 行列とし, その (i, j) 要素は

$$[\mathbf{A}_{k,n}(l)]_{i,j} = Pr\{N = k, S_e = j | S_0 = i\}$$

で与えられるものとする．定義より $\mathbf{A}_{k,n}(l)$ は

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{A}_{k,n}(l) z^l = \mathbf{A}_{k,n}^*(z)$$

を満たす．なお (1) で定義された π は (7) より

$$\pi \mathbf{A}_{k,n}^*(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(T_k)^j}{j!} \pi (\mathbf{C}_{k,n} + \mathbf{D}_{k,n})^j = \pi$$

を満たすことがわかる．

定義より,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_{k,n}(j) z^j &= \exp[(\mathbf{C}_{k,n} + z\mathbf{D}_{k,n})T_k] \\ &= \exp(-\theta_{k,n} T_k) \exp[(\theta_{k,n} \mathbf{I} + \mathbf{C}_{k,n} + z\mathbf{D}_{k,n})T_k] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\theta_{k,n} T_k) \frac{(\theta_{k,n} T_k)^j}{j!} [\mathbf{I} + \theta_{k,n}^{-1} (\mathbf{C}_{k,n} + z\mathbf{D}_{k,n})]^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{k,n}(j) [\mathbf{I} + \theta_{k,n}^{-1} (\mathbf{C}_{k,n} + z\mathbf{D}_{k,n})]^j \end{aligned}$$

を得る．ただし $\theta_{k,n}$ と $g_{k,n}(j)$ ($j \geq 0$) は

$$\begin{aligned} \theta_{k,n} &= \max(-[\mathbf{C}_{k,n}]_{i,j}) \\ g_{k,n}(j) &= \exp(-\theta_{k,n} T_k) \frac{(\theta_{k,n} T_k)^j}{j!} \end{aligned}$$

で与えられる．一般に繰り返しの計算において負の数, あるいは引き算があると数値的に不安定になるので, それを回避するためにこのように置き, 実際の計算の際に非負の数のみで扱えるようにする．

次に $M_{k,n}$ をあらかじめ定められた微小な正数 ϵ に対して

$$\sum_{j=0}^{M_{k,n}} g_{k,n}(j) \geq 1 - \epsilon$$

を満たす最小の整数として無限和を切断する．これらの準備の後，

$$\mathbf{A}_{k,n}(i) = \sum_{j=i}^{M_{k,n}} g_{k,n}(j) \mathbf{F}_j(i), \quad k = 0, \dots, M$$

を計算する．ただし $\mathbf{F}_j(i)$ は $\theta = \theta_{k,n}$, $\mathbf{C} = \mathbf{R}_{k,n} - \mathbf{Q}_{k,n}$, $\mathbf{D} = \mathbf{Q}_{k,n}$ として

$$\mathbf{F}_{j+1}(i) = \begin{cases} \mathbf{F}_j(0)(\mathbf{I} + \theta^{-1}\mathbf{C}), & i = 0 \\ \mathbf{F}_j(i)(\mathbf{I} + \theta^{-1}\mathbf{C}) + \mathbf{F}_j(i-1)(\theta^{-1}\mathbf{D}), & 1 \leq i \leq j \\ \mathbf{F}_j(j)(\theta^{-1}\mathbf{D}), & i = j+1 \end{cases}$$

により計算される．さらに $q_{k,n}^{(m')}(i)$ は，この $\mathbf{A}_{k,n}(i)$ を用いて

$$q_{k,n}^{(m')}(i) = \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{k,n}(i) \mathbf{e} = \left(\frac{\beta_{k,n}}{\alpha_{k,n} + \beta_{k,n}}, \frac{\alpha_{k,n}}{\alpha_{k,n} + \beta_{k,n}} \right) \mathbf{A}_{k,n}(i) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで $q_{k,n}^{(m')}(i)$ ($i = 0, 1, \dots, M_{k,n}$) は

$$\sum_{i=0}^{M_{k,n}} q_{k,n}^{(m')}(i) \geq 1 - \epsilon$$

を満たすことに注意する．

ポワソン流に対する度数分布

$$q_{k,0}^{(m')}(i) = \exp(-a_{k,0}T_k) \frac{(a_{k,0}T_k)^i}{i!}$$

と N_k 個の IPP 流に対する度数分布 $q_{k,n}^{(m')}(i)$ ($n = 1, \dots, N_k$) が用意できれば，重畳された到着流に対する度数分布はこれらを畳み込めば良い．

B 2点分布によるポワソン流の度数分布の計算手順

ここでは $a_{k,0}$ による到着を集団ポワソン (集団のサイズは 2) に拡張した場合における， $T_k = m' \Delta t_k$ の間に発生するパケット数の度数分布 $q_{k,0}^{(m')}(i)$ を計算する手順を与える．

まず N を T_k の間に到着するパケット数とし， G を一つの集団のパケット数とする．ただしここでは 2 点分布を考えるので $Pr(G = d_{k,1}) = r_k$, $Pr(G = d_{k,2}) = 1 - r_k$ で $Pr(G = i) = 0$ ($i \neq d_{k,1}, d_{k,2}$) となることに注意する．また集団ポワソンの平均到着率を $\lambda_{k,0}$ とれば， $\lambda_{k,0}$ は $\lambda_{k,0}(r_k d_{k,1} + (1 - r_k) d_{k,2}) = a_{k,0}$ を満たす．ここで N, G の確率母関数を $N(z), G(z)$ と置けば $N(z)$ は以下ようになる．

$$\begin{aligned} N(z) &= \exp[-(\lambda_{k,0} - \lambda_{k,0}G(z))T_k] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\lambda_{k,0}T_k) \frac{(\lambda_{k,0}T_k)^j}{j!} G(z)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{k,0}(j) G(z)^j \end{aligned}$$

ただし， $g_{k,0}(j)$ は

$$g_{k,0}(j) = \exp(-\lambda_{k,0}T_k) \frac{(\lambda_{k,0}T_k)^j}{j!}$$

で与えられる．ここで $M_{k,0}$ をあらかじめ定められた微少な正数 ϵ' に対して

$$\sum_{j=0}^{M_{k,0}} g_{k,0}(j) \geq 1 - \epsilon'$$

を満たす最小の整数として無限和を切断する．

次に集団の数が j 個であるという条件の下で i 個の packets が到着する確率を $F_j(i)$ とすると， i の最大値は $d_{k,2}j$ であることに注意して

$$G(z)^j = \sum_{i=0}^{d_{k,2}j} F_j(i) z^i \quad (8)$$

となる．以下では $F_j(i)$ の計算方法を考える．

(8) より $j = 0, 1, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} G(z)^{j+1} &= \sum_{i=0}^{d_{k,2}j} F_{j+1}(i) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{d_{k,2}j} \sum_{l=1}^i Pr(G=l) F_j(i-l) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{d_{k,2}j} \{r_k F_j(i-d_{k,1}) + (1-r_k) F_j(i-d_{k,2})\} z^i \end{aligned}$$

となるので

$$F_{j+1}(i) = r_k F_j(i-d_{k,1}) + (1-r_k) F_j(i-d_{k,2}) \quad (9)$$

を得る．ここで $M'_{k,0}$ を

$$\sum_{j=0}^{M'_{k,0}} F_j(d_{k,2} M'_{k,0}) \geq 1 - \epsilon'$$

を満たす最小の正数として無限和を切断する．よって

$$\begin{cases} F_0(0) = 1, \\ F_0(i) = 0, & i = 1, 2, \dots, d_{k,2} M'_{k,0} \\ F_1(i) = Pr(G=i), & i = 1, 2, \dots, d_{k,2} M'_{k,0} \end{cases}$$

を初期値として (9) より $i = 0, 1, \dots, d_{k,2} M'_{k,0}$ について $F_j(i)$ が計算できる．

さらに $q_{k,0}^{(m')}(i), (i = 0, 1, \dots, d_{k,2} M'_{k,0})$ は

$$q_{k,0}^{(m')}(i) = \sum_{j=0}^{M'_{k,0}} g_{k,0}(i) F_j(i)$$

で与えられる．ここで $q_{k,0}^{(m')}(i) (i = 0, 1, \dots, d_{k,2} M'_{k,0})$ は

$$\sum_{i=0}^{d_{k,2} M'_{k,0}} q_{k,0}^{(m')}(i) \geq 1 - \epsilon'$$

を満たすことに注意する．

C 数値結果

表 1: 自己相関関数に重みづけをした場合のクラス 0 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

i	1	2
$a_{0,i}$	0.012214	22.040564
$p_{0,i}$	0.043950	0.956050
$\tau_{0,i}$	0.507775	21.591983
$\alpha_{0,i}$	0.507767	6.641930
$\beta_{0,i}$	0.000007	14.950052
$\lambda_{0,i}$	812.3150620	31.832630
$a_{1,0}$	0.000014	
z_1	0.627748	
z_2	324.881417	

表 2: 自己相関関数に重みづけをした場合のクラス 1 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

n	1	2	3
$a_{1,i}$	0.722174	52.433876	5.643100
$p_{1,i}$	0.002327	0.052475	0.945199
$\tau_{1,i}$	0.063035	0.603629	6.780377
$\alpha_{1,i}$	0.061510	0.088809	6.755195
$\beta_{1,i}$	0.001525	0.514820	0.025180
$\lambda_{1,i}$	29.842369	61.478990	1519.493192
$a_{1,0}$	0.000014		
z_1	1.406102		
z_2	9.231970		

表 3: 自己相関関数に重みづけをした場合のクラス 2 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	1.548505	0.030767	10.169093	5.379533
$p_{2,i}$	0.000256	0.004618	0.075281	0.919845
$\tau_{2,i}$	0.006820	0.067879	0.648558	8.236546
$\alpha_{2,i}$	0.004459	0.067878	0.601899	8.221948
$\beta_{2,i}$	0.002360	0.000001	0.046658	0.014597
$\lambda_{2,i}$	4.473420	2659.945689	141.351187	3035.357721
r_2	0.174793 ($d_{2,1} = 2, d_{2,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	40.634047			
z_1	1.262115			
z_2	10.519641			

表 4: 自己相関関数に重みづけをしない場合のクラス 0 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

i	1	2
$a_{0,i}$	1.179212	16.052924
$p_{0,i}$	0.001441	0.998559
$\tau_{0,i}$	0.097108	11.295186
$\alpha_{0,i}$	0.067640	10.116251
$\beta_{0,i}$	0.029466	1.178934
$\lambda_{0,i}$	3.886075	153.800569
$a_{0,0}$	4.820640	
z_1	0.598747	
z_2	25029.914579	

表 5: 自己相関関数に重みづけをしない場合のクラス 1 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

i	1	2	3
$a_{1,i}$	20.482104	33.261825	5.055235
$p_{1,i}$	0.005968	0.026670	0.967362
$\tau_{1,i}$	0.052779	0.527125	26.291988
$\alpha_{1,i}$	0.006012	0.094302	26.215362
$\beta_{1,i}$	0.046766	0.432822	0.076625
$\lambda_{1,i}$	23.115501	40.508820	1734.573685
$a_{1,0}$	0.000000		
z_1	0.650934		
z_2	587.454461		

表 6: 自己相関関数に重みづけをしない場合のクラス 2 のパラメタ ($m = 10, m' = 10$)

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	0.300594	3.338559	7.126382	3.381601
$p_{2,i}$	0.001928	0.009618	0.047733	0.940721
$\tau_{2,i}$	0.011325	0.113206	1.127266	24.365407
$\alpha_{2,i}$	0.011295	0.106257	1.063416	24.348703
$\beta_{2,i}$	0.000029	0.006948	0.063849	0.016702
$\lambda_{2,i}$	113.934867	54.389285	125.817312	4932.941438
r_2	0.176606 ($d_{2,1} = 2, d_{2,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	43.614807			
z_1	0.698333			
z_2	347.512582			

表 7: ポワソン流からの到着を拡張しない場合のクラス 0 のパラメタ ($m = 10, m' = 100$)

i	1	2	3
$a_{0,i}$	0.033710	5.194801	0.419331
$p_{0,i}$	0.003783	0.016043	0.980174
$\tau_{0,i}$	0.010181	0.101760	6.358522
$\alpha_{0,i}$	0.010167	0.012040	6.353472
$\beta_{0,i}$	0.000014	0.089719	0.005049
$\lambda_{0,i}$	25.364336	5.891976	528.088774
$a_{0,0}$	16.404935		
z_1	0.627748		
z_2	324.881417		

表 8: ポワソン流からの到着を拡張しない場合のクラス 1 のパラメタ ($m = 10, m' = 100$)

i	1	2	3
$a_{1,i}$	27.061915	22.005015	8.117325
$p_{1,i}$	0.002009	0.045848	0.952143
$\tau_{1,i}$	0.056760	0.545836	9.824205
$\alpha_{1,i}$	0.001373	0.251705	9.749554
$\beta_{1,i}$	0.055386	0.294131	0.074650
$\lambda_{1,i}$	27.732952	40.836000	1068.266104
$a_{1,0}$	9.732235		
z_1	1.406102		
z_2	9.231970		

表 9: ポワソン流からの到着を拡張しない場合のクラス 2 のパラメタ ($m = 10, m' = 100$)

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	2.446491	20.935106	26.554880	7.825467
$p_{2,i}$	0.002378	0.015278	0.095512	0.886831
$\tau_{2,i}$	0.006560	0.065480	0.642733	11.710326
$\alpha_{2,i}$	0.005744	0.025003	0.453702	11.664870
$\beta_{2,i}$	0.000815	0.040476	0.189030	0.045455
$\lambda_{2,i}$	19.672487	33.867248	90.290613	2015.994752
$a_{2,0}$	0.000000			
z_1	0.809156			
z_2	39.315531			

表 10: $m = 10, m' = 10$ のクラス 0 のパラメタ

i	1	2	3
$a_{0,i}$	18.486621	2.159792	1.397914
$p_{0,i}$	0.005212	0.022099	0.972688
$\tau_{0,i}$	0.016967	0.169544	9.511601
$\alpha_{0,i}$	0.000554	0.154789	9.502979
$\beta_{0,i}$	0.016413	0.014755	0.008621
$\lambda_{0,i}$	19.111006	24.818060	1542.238863
$a_{0,0}$	0.008448		
z_1	0.627748		
z_2	324.881417		

表 11: $m = 10, m' = 10$ のクラス 1 のパラメタ

n	1	2	3
$a_{1,i}$	0.722174	52.433876	5.643100
$p_{1,i}$	0.002327	0.052475	0.945199
$\tau_{1,i}$	0.063035	0.603629	6.780377
$\alpha_{1,i}$	0.061510	0.088809	6.755195
$\beta_{1,i}$	0.001525	0.514820	0.025180
$\lambda_{1,i}$	29.842369	61.478990	1519.493192
$a_{1,0}$	0.000014		
z_1	1.406102		
z_2	9.231970		

表 12: $m = 10, m' = 10$ のクラス 2 のパラメタ

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	0.259119	1.949434	13.219810	4.652619
$p_{2,i}$	0.002378	0.015278	0.095512	0.886831
$\tau_{2,i}$	0.006560	0.065480	0.642733	11.710317
$\alpha_{2,i}$	0.006550	0.064574	0.582577	11.694208
$\beta_{2,i}$	0.000010	0.000906	0.060156	0.016109
$\lambda_{2,i}$	162.900238	140.828935	141.247152	3382.289834
r_2	0.265749 ($d_{1,1} = 2, d_{1,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	37.680961			
z_1	0.809156			
z_2	39.315531			

表 13: $m = 10, m' = 100$ のクラス 0 のパラメタ

i	1	2	3
$a_{0,i}$	0.033710	5.194800	0.419331
$p_{0,i}$	0.003783	0.016043	0.980174
$\tau_{0,i}$	0.010181	0.101076	6.358522
$\alpha_{0,i}$	0.010167	0.012041	6.353473
$\beta_{0,i}$	0.000014	0.089720	0.005049
$\lambda_{0,i}$	25.364336	5.891977	528.088775
$a_{0,0}$	16.404935		
z_1	0.627748		
z_2	324.881417		

表 14: $m = 10, m' = 100$ のクラス 1 のパラメタ

i	1	2	3
$a_{1,i}$	0.766233	15.058939	5.414360
$p_{1,i}$	0.002009	0.045848	0.952143
$\tau_{1,i}$	0.056760	0.545836	9.824205
$\alpha_{1,i}$	0.054982	0.352776	9.790852
$\beta_{1,i}$	0.001778	0.193060	0.033353
$\lambda_{1,i}$	24.466003	42.575892	1594.812406
r_1	0.625861 ($d_{1,1} = 1, d_{1,2} = 2$)		
$a_{1,0}$	37.559635		
z_1	1.406102		
z_2	9.231970		

表 15: $m = 10, m' = 100$ のクラス 2 のパラメタ

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	4.832875	11.262635	8.110424	14.814812
$p_{2,i}$	0.002378	0.015278	0.095512	0.886831
$\tau_{2,i}$	0.006560	0.065480	0.642733	11.710317
$\alpha_{2,i}$	0.004221	0.044589	0.618687	11.549019
$\beta_{2,i}$	0.002339	0.020891	0.024045	0.161297
$\lambda_{2,i}$	13.553027	35.301100	216.792126	1075.568093
r_2	0.397819 ($d_{1,1} = 2, d_{1,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	18.741197			
z_1	0.809156			
z_2	39.315531			

表 16: $m = 100, m' = 10$ のクラス 0 のパラメタ

i	1	2
$a_{0,i}$	0.001762	22.051015
$p_{0,i}$	0.006325	0.993675
$\tau_{0,i}$	0.276118	2.611905
$\alpha_{0,i}$	0.276118	0.824546
$\beta_{0,i}$	0.000001	1.787359
$\lambda_{0,i}$	810.002373	32.223614
$a_{0,0}$	18.741197	
z_1	1.374734	
z_2	21.951103	

表 17: $m = 100, m' = 10$ のクラス 1 のパラメタ

i	1	2
$a_{1,i}$	3.155486	51.566854
$p_{1,i}$	0.050887	0.949113
$\tau_{1,i}$	0.358716	3.319242
$\alpha_{1,i}$	0.321415	1.247040
$\beta_{1,i}$	0.037301	2.072203
$\lambda_{1,i}$	30.345404	82.599486
$a_{1,0}$	4.0768256	
z_1	1.934788	
z_2	2.196324	

表 18: $m = 100, m' = 10$ のクラス 2 のパラメタ

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	0.292944	0.336781	3.741574	20.005180
$p_{2,i}$	0.001143	0.012854	0.130974	0.855029
$\tau_{2,i}$	0.002852	0.028370	0.269296	2.414579
$\alpha_{2,i}$	0.002804	0.028313	0.262848	2.180342
$\beta_{2,i}$	0.000048	0.000057	0.006448	0.234237
$\lambda_{2,i}$	17.298045	166.621601	156.253830	206.218889
$r_{1,i}$	0.831782($d_{1,1} = 2, d_{1,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	33.385465			
z_1	1.055818			
z_2	4.579523			

表 19: $m = 100, m' = 100$ のクラス 0 のパラメタ

i	1	2	3
$a_{0,i}$	0.584981	9.334001	12.133795
$p_{0,i}$	0.000078	0.001823	0.998099
$\tau_{0,i}$	0.011144	0.111065	2.614127
$\alpha_{0,i}$	0.000002	0.000310	2.610163
$\beta_{0,i}$	0.011142	0.110756	0.003964
$\lambda_{0,i}$	9.335879	12.167709	385.751049
$a_{0,0}$	0.584982		
z_1	1.374734		
z_2	21.951103		

表 20: $m = 100, m' = 100$ のクラス 1 のパラメタ

i	1	2	3
$a_{1,i}$	8.600293	3.832450	21.408208
$p_{1,i}$	0.000525	0.035260	0.964215
$\tau_{1,i}$	0.031146	0.291960	3.142858
$\alpha_{1,i}$	0.000369	0.234119	2.451693
$\beta_{1,i}$	0.030778	0.057841	0.691165
$\lambda_{1,i}$	8.703289	19.344829	97.347138
r_1	0.465309($d_{1,1} = 1, d_{1,2} = 2$)		
$a_{1,0}$	24.958216		
z_1	1.934788		
z_2	2.196324		

表 21: $m = 100, m' = 100$ のクラス 2 のパラメタ

i	1	2	3	4
$a_{2,i}$	0.011275	6.425785	10.520164	22.308597
$p_{2,i}$	0.001143	0.012854	0.130974	0.855029
$\tau_{2,i}$	0.002852	0.028370	0.269296	2.414579
$\alpha_{2,i}$	0.002852	0.016330	0.225551	2.130019
$\beta_{2,i}$	0.000001	0.012040	0.043745	0.284560
$\lambda_{2,i}$	441.815367	15.140918	64.762270	189.295290
r_2	0.4334750($d_{1,1} = 2, d_{1,2} = 4$)			
$a_{2,0}$	18.496123			
z_1	1.055818			
z_2	4.579523			