

特別研究報告書

交通ネットワークにおける動的利用者均衡の変分不等式
による定式化と解法

指導教官

福島 雅夫 教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 11 年入学
平成 15 年卒業

岡崎 大志

平成 15 年 1 月 31 日提出

岡崎 大志

摘要

交通ネットワークと需要交通量が与えられたときに、各リンクにどれだけのフローが流れるかを予測することは、例えば、新しく道路を建設することによってどれだけのサービスの向上が図れるかを検討する際に極めて重要となる。このような問題を交通流配分問題と呼ぶ。特に、利用者の「できるだけ短い時間で目的地へ到着したい」という自然な経路選択原理を考慮した現実的なモデルを利用者均衡配分モデルという。利用者均衡は各利用者がネットワークの情報を完全に把握しており、かつ自分の利益を最大化するように行動するとき生じる。このような均衡状態におけるフローを予測することは、ネットワークのサービスの向上を図るための計画作成に大いに役立つだけでなく、各利用者にとって最も好ましい経路の情報提供が可能となるため利用者にとっても有益である。

本報告書では時々刻々変化するフローパターンに対応し、かつ需要交通量を事後的に見たときの最短路に割り当てる「動的利用者均衡 (DUE)」を考察する。すなわち、動的な需要交通量が与えられたネットワークの均衡状態において、各時刻、各リンクにどれだけのフローが発生するかを求めることが目的である。一起点・多終点または多起点・一終点に限定したネットワークに対しては、それぞれ出発時刻別分解または到着時刻別分解により、DUE は直方体上の変分不等式問題 (BVIP) を逐次解くことによって求められる。本報告書では、まず直感的に理解しやすい一起点・多終点モデルの定式化を行い、その解が DUE フローパターンとなることを確認する。次に、多起点・一終点モデルについて定式化を与え、さらに BVIP に対する解法を述べる。最後に一起点・多終点ネットワークに対する数値実験を行い、DUE フローパターンが効率的に計算できることを確認する。

目次

1	はじめに	1
2	動的利用者均衡 (DUE)	1
3	一起点・多終点モデル	2
3.1	動的ネットワークフローが満たすべき条件	2
3.1.1	ネットワークフローを表す基本変数	2
3.1.2	フロー保存則	2
3.1.3	FIFO 原則	2
3.2	リンクコスト関数の表現	3
3.3	DUE 条件の定式化	3
3.4	出発時刻別分解	3
3.5	BVIP による定式化	4
3.5.1	出発時刻別変数によるリンクコスト関数の表現	4
3.5.2	出発時刻別変数による DUE 条件・フロー保存則の表現	4
3.6	具体例	5
4	多起点・一終点モデル	6
4.1	動的なネットワークが満たすべき条件	7
4.1.1	ネットワークフローを表す基本変数	7
4.1.2	フロー保存則	7
4.1.3	FIFO 原則	7
4.2	リンクコスト関数の表現	7
4.3	DUE 条件の定式化	8
4.4	到着時刻別分解	8
4.5	BVIP による定式化	8
4.5.1	到着時刻別変数によるリンクコスト関数の表現	8
4.5.2	到着時刻別変数による DUE 条件・フロー保存則の表現	9
4.6	従来のモデル (最大流出率によるモデル) の問題点	9
5	BVIP の解法	9
5.1	BVIP と DUE 配分	10
5.2	BVIP の再定式化	11
5.3	BVIP に対する一般化ニュートン法	12
6	数値実験	13
6.1	BVIP による定式化	13
6.2	実験方法	14
6.3	実験結果・考察	14
7	結論	17
A	一起点・多終点モデルの出発時刻別変数によるリンクコストの表現	18
B	max 関数の微分可能な関数による近似	19

1 はじめに

交通流配分問題とは、現実の交通ネットワークを対象に、需要 OD フローと配分原則が与えられたときに、ネットワークの各リンクを流れるフローの状態を予測するものである。等時間配分原則「各 OD ペアについて、利用される経路の旅行時間はみな等しく、利用されない経路の旅行時間より小さいか、または等しい」のもとでの均衡フローを求める問題が利用者均衡配分であり、現在の交通流配分問題における主流の考え方である。これは各利用者がネットワークに関する完全情報を持っており、各自が自分の旅行時間が最短となるように経路選択を行う結果生じる均衡状態である。この均衡状態は、「どの利用者も、利用する経路を自分だけを変更しても旅行時間をそれ以上短縮できない状態」ということもでき、ゲーム理論のナッシュ均衡に対応する。本報告書の目的は、この配分原則が成立するときに、与えられた需要 OD フローに対して生じる均衡状態の動的均衡フローパターンを求めることである。このような均衡は動的利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) と呼ばれる。

これまでの研究により、フローの発生源 (起点) が一つだけでフローの吸収源 (終点) が多数あるネットワーク (一起点・多終点ネットワーク) またはフローの発生源が多数で吸収源が一つだけのネットワーク (多起点・一終点ネットワーク) における DUE 配分はそれぞれ出発時刻別分解、到着時刻別分解を行うことにより非線形相補性問題 (NCP: nonlinear complementarity problem) として定式化できることが示されている [1], [2]。ところが、これらの文献では、もともと等式条件と相補性条件の混ざった条件で表されているものを、NCP として定式化するために等式条件を相補性条件に書き直し、相補性条件に統一することを行っている。これに対して、本研究では等式条件はそのまま等式条件として扱い、相補性条件と等式条件が混在する問題を直接解くことを試みる。また、既存の研究では一起点・多終点モデル [2], 多起点・一終点モデル [1] とともに、リンクの最大流出率を設定し、それぞれ起点出発時刻、終点到着時刻に関して前向きに逐次計算することによって DUE 配分が計算できるとしているが、本研究では、多起点・一終点モデル [1] に対してはその方法では問題が生じることを指摘し、最大流出率のかわりにリンクへの最大流入率を設定し、終点到着時刻に関して後ろ向きに逐次計算する必要があることを示す。

本報告書では、第 2 節において動的利用者均衡 (DUE) を定義する。第 3 節では一起点・多終点モデルを、第 4 節では多起点・一終点モデルを考察し、それらのモデルを「直方体上の変分不等式問題 (BVIP: box constrained variational inequality problem)」として定式化を行う。第 5 節では、BVIP の効率的な計算アルゴリズムを与え、最後に第 6 節で一起点・多終点モデルに対する数値実験の結果を報告し考察を行う。

2 動的利用者均衡 (DUE)

動的利用者均衡 (DUE) 配分は、各時点においてどの利用者に対しても事後的に見て最適なフローの配分を実現する。すなわち各時刻における瞬間的な情報だけでなく、フローの配分を行った後のリンクコストパターンの変化を予測した上で最適な経路に配分を行う。DUE 配分により生じる均衡状態を DUE 状態と呼ぶ [1]。

定義. すべての時刻において、どの利用者も、利用する経路を自分だけを変更することによってそれ以上旅行時間を小さくできない状態を DUE 状態という。

DUE は事後的 shortest path への配分を実現するため、どの利用者も経路選択を行った後に後悔することがなく、すべての利用者に対して公平であるような配分であると考えられる。

3 一起点・多終点モデル

本節では一起点・多終点に限定したネットワークモデルを考察の対象とする. このモデルは赤松・桑原 [2] によって提案されたものである. 有向リンク集合 \mathcal{L} , ノード集合 \mathcal{N} から構成される交通ネットワークモデル $G(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ を考える. 集合 \mathcal{N} の各ノードは正整数によって表され, 集合 \mathcal{L} 内の各リンクは, ノード i からノード j へ向かう場合 (i, j) と表される. また, ノード k を終点とするリンクの始点ノードの集合を \mathcal{I}_k , ノード k を始点とするリンクの終点ノードの集合を \mathcal{O}_k と表す. またこのネットワークにおける唯一の起点ノードを o と表し, 終点ノードの集合を \mathcal{D} と表す.

3.1 動的ネットワークフローが満たすべき条件

3.1.1 ネットワークフローを表す基本変数

動的ネットワークフローはつぎの基本変数を用いて表現される.

$$\begin{aligned} A_{ij}(t) &: \text{時刻 } t \text{ までにリンク } (i, j) \text{ に流入したフローの累積量,} \\ D_{ij}(t) &: \text{時刻 } t \text{ までにリンク } (i, j) \text{ から流出したフローの累積量,} \\ \lambda_{ij}(t) &: \text{時刻 } t \text{ におけるリンク } (i, j) \text{ へのフローの流入率,} \\ \mu_{ij}(t) &: \text{時刻 } t \text{ におけるリンク } (i, j) \text{ からのフローの流出率.} \end{aligned}$$

動的な需要 OD フローは以下のように表す.

$$Q_d(t): \text{時刻 } t \text{ までにネットワークの終点ノード } d \in \mathcal{D} \text{ に到着したフローの累積量.}$$

これらの変数を用いると, 時刻 t において, リンク (i, j) に存在するフロー $X_{ij}(t)$ は

$$X_{ij}(t) = A_{ij}(t) - D_{ij}(t), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}$$

と表される.

3.1.2 フロー保存則

起点以外のノード $j \in \mathcal{N}$ では, 時刻 t までに j に流入した交通量は, 時刻 t までに j から流出した交通量と時刻 t までに j に吸収された交通量の和に等しくなければならない. すなわち, 各時刻 t と各ノード j において, j を終点とするリンクからの流出量の和 $\sum_{i \in \mathcal{I}_j} D_{ij}(t)$, j を始点とするリンクへの流入量の和 $\sum_{k \in \mathcal{O}_j} A_{jk}(t)$, および時刻 t までに j に到着した j を目的地とする交通量 $Q_j(t)$ の間につぎの関係が成立する.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} D_{ij}(t) - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} A_{jk}(t) - Q_j(t) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq o \quad (1)$$

ただしネットワークにおける終点以外のノードに対しては $Q_j(t) \equiv 0$ である.

3.1.3 FIFO 原則

解析を簡単にするため, 各リンクにおいて First-In-First-Out (FIFO) 条件が成り立つと仮定する. これは, リンクに先に流入した車から先にそのリンクから流出するという条件であり, 次式によって表される.

$$A_{ij}(t) = D_{ij}(t + C_{ij}(t)), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (2)$$

ここで、 $C_{ij}(t)$ は時刻 t にリンク (i, j) に流入したフローが経験するリンク (i, j) のリンクコスト（旅行時間）を表す。

3.2 リンクコスト関数の表現

各リンクは、自由走行リンクと待ち行列リンクの二種類のサブリンクから構成されているものとする。自由走行リンク部分では、車両は一定の速度でリンク内を移動するものとする。すなわち自由走行リンク部分の旅行時間はそのリンクの制限速度および物理的な長さによって与えられる。待ち行列リンク部分は、リンクの物理的な長さを無視した ‘point queue’ とみなし、リンクの車線の数などの条件から決まるリンク特有のサービス率の上限（最大流出率） $\bar{\mu}_{ij}$ があると仮定する。待ち行列が存在していないときには待ち行列リンク部分に流入した車は直ちにリンクから流出するが、待ち行列が存在するとき ($X_{ij}(t) > 0$ または $\lambda_{ij}(t) > \bar{\mu}_{ij}$) には、時刻 t にリンク内に存在しているフロー $X_{ij}(t)$ がリンクから流出するのにかかる時間 $X_{ij}(t)/\bar{\mu}_{ij}$ だけ待たなければならない。

以上のことをまとめると次の関係を得る。

$$\begin{aligned}
 \text{[自由走行リンク部分]} \quad & \mu_{ij}(t + m_{ij}) = \lambda_{ij}(t) \\
 & C_{ij}(t) = m_{ij} = \text{given constant} \\
 \text{[待ち行列リンク部分]} \quad & \mu_{ij}(t + C_{ij}(t)) = \begin{cases} \bar{\mu}_{ij} & \text{if } X_{ij}(t) > 0 \text{ or } \lambda_{ij}(t) > \bar{\mu}_{ij} \\ \lambda_{ij}(t) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 & C_{ij}(t) = \begin{cases} X_{ij}(t)/\bar{\mu}_{ij} & \text{if } X_{ij}(t) > 0 \text{ or } \lambda_{ij}(t) > \bar{\mu}_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.3 DUE 条件の定式化

DUE 配分が満たすべき条件 (DUE 条件) を表す。時刻 t にノード k に到着するための起点からの最短所要時間を $\pi_k(t)$ と表すと、以下の相補性条件を得る。

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(t) \cdot \{C_{ij}(t) + \pi_i(t) - \pi_j(t + C_{ij}(t))\} = 0 \\ \lambda_{ij}(t) \geq 0 \\ C_{ij}(t) + \pi_i(t) - \pi_j(t + C_{ij}(t)) \geq 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (3)$$

式 (3) は、各リンク $(i, j) \in \mathcal{L}$ に対して、ネットワークの起点からノード j までの最短経路上にノード i が存在するならばリンク (i, j) にフローが流入する可能性があり ($\lambda_{ij}(t) \geq 0$)、最短経路上にないリンクにはフローは流入しない ($\lambda_{ij}(t) = 0$) ことを意味している。

3.4 出発時刻別分解

FIFO 原則の仮定の下では、各リンク内において利用者の流入順序と流出順序は逆転することはない、またリンク内の利用者は、自分より後に出発する同一終点を持つ利用者と同じ経路を利用する限りその利用者よりも遅く終点に到着することはない。すなわち、起点出発時点 ν に起点を出発するフローは、時点 ν より後に起点を出発するフローによる影響を一切受けない。言い換えれば起点出発時点 ν に対応する DUE フローパターンは起点出発時点 ν 以前に起点を出発するフローに関する情報のみから決定される。したがって、一起点・多終点モデルにおける DUE 配分は、起点出発時刻別に問題を分解し、起点出発時刻に関する前向きな逐次計算を行うことにより求めることができる。

計算の簡単化のため、考察する起点出発時刻の時間帯 $[0, T]$ を適当な時間間隔 $\Delta > 0$ によって離散化し、起点出発時点全体を有限集合 U で表す。 U の要素は 0 から $|U|$ までの連番整数からなり、起点出発時点 $\nu \in U$ に対する実際の起点出発時刻は $\nu\Delta$ で表されるものとする。以下の変数を導入する。

- τ_i^ν : 起点出発時点 ν に起点を出発するフローの起点からノード i までの最短所要時間。
 $\hat{\tau}_i^\nu$: 起点出発時点 ν に起点を出発するフローがノード i に到着する時刻, $\hat{\tau}_i^\nu = \nu\Delta + \tau_i^\nu$.
 y_{ij}^ν : リンク (i, j) の起点出発時点 ν に関する流入率, $y_{ij}^\nu = \{A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) - A_{ij}(\hat{\tau}_i^{\nu-1})\} / \Delta$.
 q_d^ν : ノード d を終点とする需要 OD フローの起点出発時点 ν に関する到着率,
 $q_d^\nu = \{Q_d(\hat{\tau}_d^\nu) - Q_d(\hat{\tau}_d^{\nu-1})\} / \Delta$.

3.5 BVIP による定式化

3.5.1 出発時刻別変数によるリンクコスト関数の表現

起点出発時点 ν に起点を出発するフローが経験するリンク旅行時間 $c_{ij}^\nu = C_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu)$ は、均衡状態においては、各リンクを自由走行リンク部分と待ち行列リンク部分の 2 つのサブリンクに分け、それぞれのリンクコストを求め、そのリンクコストをたしあわせて再び一本のリンクにまとめることによって、以下のように表すことができる（詳細な計算過程は付録.A 参照）。

$$c_{ij}^\nu = \max \left\{ m_{ij}, c_{ij}^{\nu-1} + y_{ij}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{ij} - \tau_i^\nu + \tau_i^{\nu-1} - \Delta \right\}, \quad \forall \nu \in U, \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (4)$$

$\nu - 1$ 時点以前のパラメータがすべて既知であれば、式 (4) より c_{ij}^ν は y_{ij}^ν と τ_i^ν の関数とみなすことができる。

3.5.2 出発時刻別変数による DUE 条件・フロー保存則の表現

式 (3) において、 $t = \hat{\tau}_i^\nu$ とすれば $C_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) = c_{ij}^\nu$, $\pi_i(\hat{\tau}_i^\nu) = \tau_i^\nu$ であり、また起点出発時点 ν に出発するフローの起点からノード j への最短路上にノード i が存在すれば、 $\hat{\tau}_i^\nu + C_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) = \hat{\tau}_j^\nu$ より、 $\pi_j(\hat{\tau}_i^\nu + c_{ij}^\nu) = \pi_j(\hat{\tau}_j^\nu) = \tau_j^\nu$ が成立するので、 $c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu = 0$ を満たす。このとき $\lambda_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) \geq 0$, すなわち、 $y_{ij}^\nu \geq 0$ である。逆に起点出発時点 ν に出発するフローの起点からノード j への最短路上にノード i がなければ、 $c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu > 0$ であり、リンク (i, j) に流入するフローはない ($y_{ij}^\nu = 0$)。よって、式 (3) より、以下の相補性条件を得る。

$$\begin{cases} y_{ij}^\nu \cdot (c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu) = 0 \\ c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu \geq 0 \\ y_{ij}^\nu \geq 0 \end{cases} \quad \forall \nu \in U, \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (5)$$

フローが流れるリンクでは、 $\hat{\tau}_j^\nu = \hat{\tau}_i^\nu + C_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu)$ であるので、FIFO 原則の式 (2) は

$$A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) = D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu)$$

と表すことができ、フロー保存則の式 (1) で $t = \hat{\tau}_j^\nu$ とおき、上式を代入すると、

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} A_{jk}(\hat{\tau}_j^\nu) - Q_j(\hat{\tau}_j^\nu) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq o$$

を得る。さらに起点出発時点 ν について差分をとると

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} y_{ij}^\nu - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} y_{jk}^\nu - q_j^\nu = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq o \quad (6)$$

が得られる. (5) と (6) をまとめて書くと次のような条件が得られる.

$$\begin{cases} y_{ij}^\nu \cdot (c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu) = 0 \\ y_{ij}^\nu \geq 0, \quad c_{ij}^\nu + \tau_i^\nu - \tau_j^\nu \geq 0 & \forall \nu \in U, \forall (i, j) \in \mathcal{L} \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_j} y_{ij}^\nu - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} y_{jk}^\nu + q_j^\nu = 0 & \forall j \in \mathcal{N}, j \neq o \end{cases} \quad (7)$$

DUE 配分を求めることは, 式 (7) を満たす $(y_{ij}^\nu, \tau_j^\nu) \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall \nu \in U$ を求めることに帰着する.

式 (7) は相補性条件と等式条件からなっている. このような条件を満たす解を求める問題は 5.1 節で示すように, 直方体上の変分不等式問題 (BVIP) と呼ばれる問題のクラスに含まれる.

3.6 具体例

本節では, 簡単な一起点・多終点ネットワークに対し, 式 (7) の解を求め, DUE フローパターンが式 (7) によって表されることを確認する. ノード集合 $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$, リンク集合

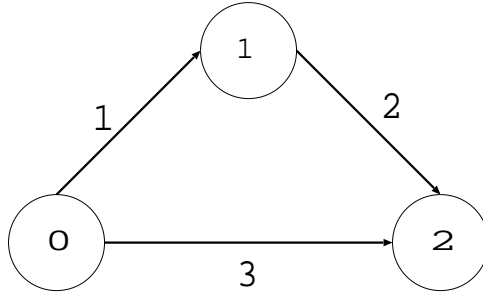


図 1: 1 起点 2 終点ネットワーク

$\mathcal{L} = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$ からなる 1 起点 2 終点のネットワークを考える (図 1). ノード 0 を唯一の起点とし, ノード 1 を終点に持つ利用者の集合を利用者 1, ノード 2 を終点に持つ利用者の集合を利用者 2 と呼ぶ. さらに簡単のため, リンク $(0, 1)$ をリンク 1, リンク $(1, 2)$ をリンク 2, リンク $(0, 2)$ をリンク 3 と表す. また, 各パラメータは次のように設定する.

$$\Delta = 10, \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 50, \quad m_3 = 150, \quad \bar{\mu}_1 = 50, \quad \bar{\mu}_2 = 50, \quad \bar{\mu}_3 = 100$$

また, 出発時点は $\nu \in \{0, 1, 2\}$ とする. ただし初期状態としてネットワークにはフローが存在しないと仮定し,

$$\tau_1^0 = 50, \tau_2^0 = 100, c_1^0 = 50, c_2^0 = 50, c_3^0 = 150 \quad (8)$$

とする. さらに出発時点別の需要 OD フローは

$$q_1^0 = q_2^0 = 0, \quad q_1^1 = q_1^2 = 100, \quad q_2^1 = q_2^2 = 100$$

とする. このとき, リンクコスト関数, DUE 条件・フロー保存則はそれぞれ式 (4), (7) より $\nu = 1, 2$ に対して次の式で与えられる.

$$c_1^\nu = \max \left\{ 50, c_1^{\nu-1} + y_1^\nu / 5 - 10 \right\} \quad (9)$$

$$c_2^\nu = \max \left\{ 50, c_2^{\nu-1} + y_2^\nu / 5 - 10 + \tau_1^{\nu-1} - \tau_1^\nu \right\} \quad (10)$$

$$c_3^\nu = \max \left\{ 150, c_3^{\nu-1} + y_3^\nu / 10 - 10 \right\} \quad (11)$$

$$\begin{cases} y_1^\nu \cdot (c_1^\nu - \tau_1^\nu) = 0, & y_1^\nu \geq 0, & c_1^\nu - \tau_1^\nu \geq 0 \\ y_2^\nu \cdot (c_2^\nu + \tau_1^\nu - \tau_2^\nu) = 0, & y_2^\nu \geq 0, & c_2^\nu + \tau_1^\nu - \tau_2^\nu \geq 0 \\ y_3^\nu \cdot (c_3^\nu - \tau_2^\nu) = 0, & y_3^\nu \geq 0, & c_3^\nu - \tau_2^\nu \geq 0 \\ y_1^\nu - y_2^\nu - q_1^\nu = 0 \\ y_2^\nu + y_3^\nu - q_2^\nu = 0 \end{cases} \quad (12)$$

・ $\nu=1$

フローパターン $(y_1^1, y_2^1, y_3^1, \tau_1^1, \tau_2^1) = (200, 100, 0, 80, 130)$ は $\nu = 1$ に対する (12) の解になる. 実際, (12) の 4,5 番目の条件は明らかに成立する. また (8), (9), (10), (11) より, $c_1^1 = 80$, $c_2^1 = 50$, $c_3^1 = 150$ であるので (12) の 1~3 番目の条件は, $y_1^1 = 200 > 0$ かつ $c_1^1 - \tau_1^1 = 0$, $y_2^1 = 100 > 0$ かつ $c_2^1 + \tau_1^1 - \tau_2^1 = 0$, $y_3^1 = 0$ かつ $c_3^1 - \tau_2^1 = 20 > 0$ より成立する.

このフローパターンが $\nu = 1$ に対して DUE 状態を表すことは次のように確かめられる. リンク 1 への流入率が $y_1^1 = 200$ であることは, 利用者 1 だけでなく利用者 2 もリンク 1 を利用することを意味している. そのとき, 流入率 $y_1^1 = 200$ がリンク 1 の最大流出率 $\bar{\mu}_1 = 50$ を超えるためにリンク 1 において待ち行列が発生し, リンク 1 のリンクコストは $c_1^1 = 80$ となるが, それでもなお利用者 2 はリンク 3 の自由走行時間 $m_3 = 150$ よりも短い時間でノード 2 へ到達することができる. 利用者 2 に関して, 利用される経路は一つだけなので, 「利用される経路の旅行時間は皆等しく, 利用されない経路の旅行時間より小さい」が成立する. これは DUE 状態である.

・ $\nu=2$

フローパターン $(y_1^2, y_2^2, y_3^2, \tau_1^2, \tau_2^2) = (150, 50, 50, 100, 150)$ は $\nu = 2$ に対する (12) の解となる. 実際 (12) の 4, 5 番目の条件は明らかに成立する. また $\nu = 1$ に対する結果と (9), (10), (11) より, $c_1^2 = 100$, $c_2^2 = 50$, $c_3^2 = 150$ であるので, (12) の 1~3 番目の条件は, $y_1^2 = 150 > 0$ かつ $c_1^2 - \tau_1^2 = 0$, $y_2^2 = 50 > 0$ かつ $c_2^2 + \tau_1^2 - \tau_2^2 = 0$, $y_3^2 = 50 > 0$ かつ $c_3^2 - \tau_2^2 = 0$ より成立する.

このフローパターンが $\nu = 2$ に対して DUE 状態を表すことは次のように確かめられる. リンク 2 への流入率とリンク 3 への流入率が, それぞれ $y_2^2 = 50$, $y_3^2 = 50$ であることは, 利用者 2 はリンク 1 とリンク 2 を利用する経路と, リンク 3 を利用する経路に分かれることを示している. ここで, $c_1^2 + c_2^2 = c_3^2 = 150$ より, リンク 1 とリンク 2 を利用する経路の旅行時間とリンク 3 を利用する経路の旅行時間は等しい. 利用者 2 に関して, 利用可能な経路は以上の 2 つであり, かつ 「利用される経路の旅行時間は皆等しい」が成立するため DUE 状態である.

以上により, 式 (12) の解が DUE フローパターンであることが確認できた. 式 (12) を効率的に計算する BVIP のアルゴリズムについては第 5 節で詳しく述べる.

4 多起点・一終点モデル

多起点・一終点の場合には, 各リンクの最大流入率を設定することにより, ネットワークの終点ノードへの到着時刻別に問題を分解できる. その際, 時間の流れを逆向きに考えれば, 終点到着時点が ν のフローが経験するリンクコストを到着時点が $\nu+1$ であるフローの情報から求めることができるので, 時間に関して後ろ向きに逐次計算することによって DUE フローパターンが得られる.

4.1 動的なネットワークが満たすべき条件

4.1.1 ネットワークフローを表す基本変数

各リンクにおける累積流入量, 累積流出量, 流入率, 流出率, 存在フローを表す変数については一起点・多終点のときと同じものを使用するが, 需要 OD フローを表す変数は, ネットワークの唯一の終点を d , 起点ノードの集合を \mathcal{O} として

$\hat{Q}_o(t)$: 時刻 t までにネットワークの起点ノード $o \in \mathcal{O}$ を出発したフローの累積量と表す.

4.1.2 フロー保存則

一起点・多終点モデルと同様の考え方により,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_k} D_{ij}(t) - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} A_{jk}(t) + \hat{Q}_j(t) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq d \quad (13)$$

と表される. ただしネットワークにおける起点以外のノードに対しては $\hat{Q}_j(t) \equiv 0$ である.

4.1.3 FIFO 原則

時刻 t にノード j からまさに流出しようとするフローがノード i にいる状態まで遡るには時間をどれだけ巻き戻せばよいかを表す量をリンクコスト $C_{ij}(t)$ と考えると, FIFO 条件は次のように表される.

$$A_{ij}(t - C_{ij}(t)) = D_{ij}(t), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (14)$$

4.2 リンクコスト関数の表現

時間を逆向きに考えることにより, 多起点・一終点モデルは一起点・多終点モデルとほぼ同じように考えることができる.

自由走行リンク部分において, リンクコストは一定であるため, その時間だけ巻き戻せばよく, 待ち行列リンク部分では, 下流ノードに到着し,まさにノードから流出する寸前にリンクに存在しているフローがそのリンクに流入するのにかかった時間だけ巻き戻せば上流ノードにいた時刻になると考えられるので,

$$\begin{aligned} \text{[自由走行リンク部分]} \quad & \lambda_{ij}(t - m_{ij}) = \mu_{ij}(t) \\ & C_{ij}(t) = m_{ij} = \text{given constant} \\ \text{[待ち行列リンク部分]} \quad & \lambda_{ij}(t - C_{ij}(t)) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{ij} & \text{if } X_{ij}(t) > 0 \text{ or } \mu_{ij}(t) > \bar{\lambda}_{ij} \\ \mu_{ij}(t) & \text{otherwise} \end{cases} \\ & C_{ij}(t) = \begin{cases} X_{ij}(t)/\bar{\lambda}_{ij} & \text{if } X_{ij}(t) > 0 \text{ or } \mu_{ij}(t) > \bar{\lambda}_{ij} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

と表される.

4.3 DUE 条件の定式化

時刻 t にノード k にいるフローがノード k からネットワークの終点ノードに到着するまでの最短所要時間を $\hat{\pi}_k(t)$ と表す. そのとき, DUE 条件は

$$\begin{cases} \mu_{ij}(t) \cdot \{C_{ij}(t) + \hat{\pi}_j(t) - \hat{\pi}_i(t - C_{ij}(t))\} = 0 \\ \mu_{ij}(t) \geq 0 \\ C_{ij}(t) + \hat{\pi}_j(t) - \hat{\pi}_i(t - C_{ij}(t)) \geq 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (15)$$

と表される. 式 (15) は各リンク $(i, j) \in \mathcal{L}$ に対して, ノード i から終点までの最短経路上にノード j があればリンク (i, j) から流出するフローが存在する可能性を示している.

4.4 到着時刻別分解

時間を逆向きに考えると, 時刻 t にリンクの下流側ノードに到着したフローのリンクコストがそれより後に到着するフローに関する情報から求まることと, 一終点かつ FIFO の条件より, 「終点到着時点 ν にネットワークの終点に到着するフローは, 終点到着時点 ν より後に終点に到着するフローに関する情報のみから決定される」という性質が成立する. すなわち, 多起点・一終点モデルの DUE 配分は到着時刻別分解に基づいて後ろ向きに逐次計算することによって計算できる.

到着時刻別分解を行うには以下の変数を導入するのが好都合である. ここで, 一起点・多終点モデルと同様に, 終点到着時刻は $\Delta > 0$ によって離散化したものを扱う. 終点到着時点 ν に対する実際の終点到着時刻は $\nu\Delta$ で表されるものとする.

- τ_i^ν : 終点到着時点 ν に終点に到着するフローのノード i から終点までの最短所要時間.
- $\hat{\tau}_i^\nu$: 終点到着時点 ν に終点に到着するフローがノード i を出発する時刻, $\hat{\tau}_i^\nu = \nu\Delta - \tau_i^\nu$.
- y_{ij}^ν : リンク (i, j) の終点到着時点 ν に関する流出率, $y_{ij}^\nu = \{D_{ij}(\hat{\tau}_j^{\nu+1}) - D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu)\}/\Delta$.
- \hat{q}_o^ν : ノード o を起点とする需要 OD フローの終点到着時点 ν に関する出発率,
 $\hat{q}_o^\nu = \{\hat{Q}_o(\hat{\tau}_o^{\nu+1}) - \hat{Q}_o(\hat{\tau}_o^\nu)\}/\Delta$.

一起点・多終点ネットワークに対して定義される τ_i^ν , $\hat{\tau}_i^\nu$, y_{ij}^ν は多起点・一終点ネットワークに対するものとは異なることに注意が必要である.

4.5 BVIP による定式化

リンクコスト関数, DUE 条件は時間を逆向きに考えることにより, つぎのように, 一起点・多終点モデルと同様の考え方をもちいて導かれる.

4.5.1 到着時刻別変数によるリンクコスト関数の表現

終点到着時点 ν に終点に到着するフローが経験するリンク旅行時間 $c_{ij}^\nu = C_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu)$ は

$$c_{ij}^\nu = \max\{m_{ij}, c_{ij}^{\nu+1} + y_{ij}^\nu \Delta / \bar{\lambda}_{ij} - \tau_j^\nu + \tau_j^{\nu+1} - \Delta\}, \quad \forall \nu \in U, \forall (i, j) \in \mathcal{L}$$

と表すことができる. よって, 終点到着時点 $\nu+1$ に関するパラメータが既知であるとする
 と, c_{ij}^ν は y_{ij}^ν と τ_j^ν の関数とみなすことができる.

4.5.2 到着時刻別変数による DUE 条件・フロー保存則の表現

到着時刻別変数によって式 (15) は

$$\begin{cases} y_{ij}^\nu \cdot (c_{ij}^\nu + \tau_j^\nu - \tau_i^\nu) = 0 \\ c_{ij}^\nu + \tau_j^\nu - \tau_i^\nu \geq 0 \\ y_{ij}^\nu \geq 0 \end{cases} \quad \forall \nu \in U, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L} \quad (16)$$

と表される. 式 (16) より, 均衡状態においてフローが流れるリンクでは, $c_{ij}^\nu + \tau_j^\nu = \tau_i^\nu$ が成立する. これは $\hat{\tau}_j^\nu - c_{ij}^\nu = \hat{\tau}_i^\nu$ と等価であり, FIFO 条件の式 (14) に $t = \hat{\tau}_j^\nu$ を代入すれば,

$$A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) = D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu)$$

となるので, フロー保存則の式 (13) において, $t = \hat{\tau}_j^\nu$ を代入し, 上式を利用して変形すると,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu) - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} D_{jk}(\hat{\tau}_k^\nu) - \hat{Q}_j(\hat{\tau}_j^\nu) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq d$$

となる. さらに, ν について差分をとれば,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} y_{ij}^\nu - \sum_{k \in \mathcal{O}_j} y_{jk}^\nu - \hat{q}_j^\nu = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N}, j \neq d \quad (17)$$

が得られる. DUE 条件の式 (16) とフロー保存則の式 (17) を合わせたものが一起点・多終点における BVIP の式 (7) に相当する.

このように多起点・一終点の場合の BVIP による定式化は一起点・多終点の場合の定式化を裏返した形で表される. 第 5 節以降はもっぱら一起点・多終点モデルを取り扱う.

4.6 従来のモデル（最大流出率によるモデル）の問題点

最後に, 従来の多起点・一終点モデルに対して一起点・多終点モデルと同様に各リンクの最大流出率を設定し, 時間を前向きに逐次計算する方法の問題点について述べる. 従来の多起点・一終点モデル [1] でもちいられていた終点到着時刻別変数は, τ_i^ν , $\hat{\tau}_i^\nu$ に関しては本報告書において多起点・一終点ネットワークに対して定義したのと同じものであり, y_{ij}^ν , \hat{q}_o^ν についてはそれぞれ本報告書でもちいた $y_{ij}^{\nu-1}$, $\hat{q}_o^{\nu-1}$ が対応している. これは従来のモデルが時間に関して前向きに逐次計算を行うことによる. 簡単のため, 終点 d の上流側ノードは一つだけとし, それをノード i と表す. もしリンクに最大流出率 $\bar{\mu}_{id}$ が存在すれば到着時点間隔 Δ の間に到着可能なフローの最大量は $\bar{\mu}_{id} \cdot \Delta$ となる. いまリンク $(i, j) \rightarrow \hat{\tau}_i^\nu$ と $\hat{\tau}_i^{\nu-1}$ の間に流入するフローの量は $y_{id}^\nu \cdot \Delta$ であり, これは $\nu-1$ と ν の間に終点到着するフローの量に等しい. よって $y_{id}^\nu = \sum_{o \in \mathcal{O}} \hat{q}_o^\nu \leq \bar{\mu}_{id}$ が成り立つ必要がある. これはモデルのパラメータの値に関する条件であり, モデル設定の自由度を必要以上に制限することになる. 本報告のモデルでは時間の流れを逆向きに考え, リンクの流出率に関しては制約を設けず, 最大流入率を設定することによりこの問題点を解消している.

5 BVIP の解法

直方体上の変分不等式問題を BVIP (box constrained variational inequality problem) と呼ぶ. 5.1 節では BVIP の性質を説明し, 第 3 節において一起点・多終点モデルに対して導出した DUE 配分の式 (7) が BVIP のクラス含まれることを示す. つぎに 5.2 節では射影関数をもちいて BVIP を微分不可能な非線形方程式系に再定式化を行い, さらに BVIP に対するメリット関数である Dギャップ関数を導入する. 最後に, 5.3 節において BVIP に対する一般化ニュートン法のアルゴリズムを述べる.

5.1 BVIP と DUE 配分

$l_i \in [-\infty, \infty)$, $u_i \in (-\infty, \infty]$ かつ $l_i < u_i$ であるような l_i, u_i ($i = 1, \dots, n$) を用いて

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i \ (i = 1, \dots, n)\}$$

と表される直方体 B と関数 $\mathbf{F} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ を用いて定義される変分不等式

$$\begin{aligned} \text{[BVIP]} \quad & \text{Find} \quad \mathbf{x} \in B \\ & \text{such that} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in B \end{aligned} \quad (18)$$

を考える. 集合 B が直方体であることから, 式 (18) は, すべての $i = 1, \dots, n$ に対して

$$F_i(\mathbf{x})(y_i - x_i) \geq 0, \quad \forall y_i \in [l_i, u_i] \quad (19)$$

が成立することと等価となる. ここで, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^\top$ である.

添字集合 $S_1 = \{i \mid l_i = -\infty, u_i = \infty\}$, $S_2 = \{i \mid -\infty < l_i < \infty, u_i = \infty\}$, $S_3 = \{i \mid -\infty < l_i < u_i < \infty\}$, $S_4 = \{i \mid l_i = -\infty, -\infty < u_i < \infty\}$ とすると, $S = \{1, \dots, n\} = \cup_{i=1}^4 S_i$ が成り立つ. しかし, $i \in S_4$ に対する変数 x_i を $-x_i$ で置き換えれば $i \in S_2$ となるので, 一般性を失うことなく $S = \cup_{i=1}^3 S_i$ と考えることができる. さらに $i \in S_2$ に対しては $x_i - l_i$ を改めて x_i とおくことにより, $l_i = 0$ と仮定できる. そのとき式 (19) は,

$$\begin{cases} F_i(\mathbf{x}) = 0 & (i \in S_1) \\ x_i \geq 0, F_i(\mathbf{x}) \geq 0, x_i F_i(\mathbf{x}) = 0 & (i \in S_2) \\ \begin{cases} x_i = l_i \Rightarrow F_i(\mathbf{x}) \geq 0 \\ l_i < x_i < u_i \Rightarrow F_i(\mathbf{x}) = 0 \\ x_i = u_i \Rightarrow F_i(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} & (i \in S_3) \end{cases}$$

と表される.

次に各 ν に対して, DUE 配分の式 (7) が BVIP になることを示す. リンクの総数を L とし, 各リンク $(i, j) \in \mathcal{L}$ に 1 から L までの連番整数を割り当てる. さらにリンク k の始点ノードを k_{in} , 終点ノードを k_{out} と表す. またノードの総数を N とし, 各ノード $j \in \mathcal{N}$ に 0 から $N-1$ までの連番整数を割り当てる. ノード 0 をネットワークの唯一の起点ノードとする. そのとき各 ν に対して $\mathbf{y}^\nu = (y_1^\nu, \dots, y_L^\nu)^\top$, $\tau^\nu = (\tau_1^\nu, \dots, \tau_{N-1}^\nu)^\top$,

$$\mathbf{x}^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^\nu \\ \tau^\nu \end{pmatrix} = (y_1^\nu, \dots, y_L^\nu, \tau_1^\nu, \dots, \tau_{N-1}^\nu)^\top \in \mathfrak{R}^{L+N-1},$$

$$\mathbf{F}^\nu(\mathbf{x}^\nu) = \begin{pmatrix} c_1^\nu + \tau_{1_{in}}^\nu - \tau_{1_{out}}^\nu \\ \vdots \\ c_L^\nu + \tau_{L_{in}}^\nu - \tau_{L_{out}}^\nu \\ \sum_{\{i \mid i_{out}=1\}} y_i^\nu - \sum_{\{i \mid i_{in}=1\}} y_i^\nu - q_1^\nu \\ \vdots \\ \sum_{\{i \mid i_{out}=N-1\}} y_i^\nu - \sum_{\{i \mid i_{in}=N-1\}} y_i^\nu - q_{N-1}^\nu \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{L+N-1}$$

と定義し, $l_i = 0$, $u_i = \infty$ ($i = 1, \dots, L$), $l_j = -\infty$, $u_j = \infty$ ($j = L+1, \dots, L+N-1$) とすれば, 式 (7) は $S_1 = \{L+1, \dots, L+N-1\}$, $S_2 = \{1, \dots, L\}$, $S_3 = \emptyset$ である BVIP(18) として表される.

5.2 BVIP の再定式化

点 \mathbf{x} の集合 S への射影 $\mathbf{P}_S(\mathbf{x})$ は, 集合 S に含まれる点のうち \mathbf{x} との距離が最小となるもの, すなわち

$$\mathbf{P}_S(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{y}} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{y} \in S\}$$

と定義される. ここで, BVIP(18) に対して, 関数 $\mathbf{r}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{P}_B(\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x}))$$

によって定義すると,

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \text{ は BVIP(18) の解}$$

が成立する. 直方体 B に対しては, \mathbf{x} の B への射影が $\mathbf{P}_B(\mathbf{x}) = (\text{mid}\{l_1, u_1, x_1\}, \dots, \text{mid}\{l_n, u_n, x_n\})^\top$ と明示的に表せることから, $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ の第 i 要素は

$$\begin{aligned} r_i(\mathbf{x}) &= x_i - \text{mid}\{l_i, u_i, x_i - F_i(\mathbf{x})\} \\ &= \text{mid}\{x_i - l_i, x_i - u_i, F_i(\mathbf{x})\} \end{aligned} \quad (20)$$

と与えられる. ただし, $\text{mid}\{a, b, c\}$ は a, b, c の中間値を表す.

次に, BVIP のメリット関数である D ギャップ関数を導入する. メリット関数とは \mathbf{x} が BVIP の解であれば値が 0 となり, そうでなければ正の値をとるような実数値関数である. 古典的なメリット関数としてギャップ関数があるが, それを改良したものとして, 正則化ギャップ関数や D ギャップ関数と呼ばれるメリット関数が知られている [3, §5.4]. さらに D ギャップ関数をもちいた BVIP の解法が [4], [5] などにおいて提案されている.

BVIP(18) に対する正則化ギャップ関数 $g_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は次式で定義される.

$$g_\alpha(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in B} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{x})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right\}$$

ここで, α は正定数である. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbf{F}(\mathbf{x})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 / 2$ を最大化する $\mathbf{y} \in B$ は一意に決まる. それを $\mathbf{y}_\alpha(\mathbf{x})$ とすると,

$$\mathbf{y}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_B \left(\mathbf{x} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right)$$

となるので, $g_\alpha(\mathbf{x})$ はつぎのように表される.

$$g_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \|\mathbf{F}(\mathbf{x})/\alpha\|^2 - \|\mathbf{y}_\alpha(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})/\alpha)\|^2 \right\}.$$

\mathbf{F} が微分可能ならば, g_α も微分可能であり, BVIP(18) の解は次の制約付き最適化問題の大域的最適解となることが知られている.

$$\min g_\alpha(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in B.$$

さらに, $0 < \alpha < \beta$ であるような α, β に対して, $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = g_\alpha(\mathbf{x}) - g_\beta(\mathbf{x})$ と定義される関数 $g_{\alpha\beta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を D ギャップ関数と呼ぶ. これを用いると, BVIP(18) の解は次の制約なし最適化問題の大域的最適解となることが知られている.

$$\min g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

次に、関数 $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の一般化 Jacobi 行列を考える。一般に \mathbf{r} は微分可能ではないが、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において次式で定義される B 劣微分 $\partial_B \mathbf{r}(\mathbf{x})$ は空集合ではないことが知られている [3, §2.11].

$$\partial_B \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{r}'(\mathbf{x}^k) \mid \mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k, \{\mathbf{x}^k\} \subseteq \Omega \right\}$$

ここで、 Ω は \mathbf{r} が微分可能であるような点 \mathbf{x} 全体の集合であり、 $\mathbf{r}'(\mathbf{x})$ は \mathbf{r} の \mathbf{x} における Jacobi 行列

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}) = [\nabla r_1(\mathbf{x}) \cdots \nabla r_n(\mathbf{x})]^\top = \nabla \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top$$

である。B 劣微分 $\partial_B \mathbf{r}(\mathbf{x})$ をもちいて、 \mathbf{r} の \mathbf{x} における劣微分 $\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})$ は、

$$\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \text{co } \partial_B \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

と定義される。ただし co は集合の凸包を表す。行列 $H \in \partial \mathbf{r}(\mathbf{x})$ を \mathbf{r} の \mathbf{x} における一般化 Jacobi 行列と呼ぶ。 $H \in \partial \mathbf{r}(\mathbf{x})$ は具体的には次のように表される。

$$\begin{aligned} x_i - F_i(\mathbf{x}) \in (l_i, u_i) &\Rightarrow H_i = \nabla F_i(\mathbf{x})^\top \\ x_i - F_i(\mathbf{x}) \in \{l_i, u_i\} &\Rightarrow H_i = \xi \nabla F_i(\mathbf{x}) + (1 - \xi) e_i^\top, \quad \xi \in [0, 1] \\ x_i - F_i(\mathbf{x}) \notin [l_i, u_i] &\Rightarrow H_i = e_i^\top \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 H_i は H の第 i 行ベクトルであり、 e_i は第 i 要素だけが 1 で、それ以外の要素は 0 であるような n 次元単位列ベクトルである。

5.3 BVIP に対する一般化ニュートン法

BVIP(18) と等価な非線形方程式系 $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ に対する一般化ニュートン法では、各反復においてニュートン方程式

$$H^{(k)} \mathbf{d} = -\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (22)$$

を解いてベクトル $\mathbf{d}^{(k)} = -H^{(k)-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$ を計算する。ただし $H^{(k)} \in \partial \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$ である。もし $\mathbf{d}^{(k)}$ がメリット関数 $g_{\alpha\beta}$ を十分減少させる方向であれば、それを探索方向として採用し、そうでなければ最急降下方向 $\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)})$ を採用する。さらに、関数 $g_{\alpha\beta}$ に対する直線探索により適当なステップ幅 $t^{(k)} > 0$ を選択して、次の反復点 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$ を定める。すなわち、一般化ニュートン法では早い収束を実現するために可能な限り関数 \mathbf{r} のニュートン方向を利用するとともに、大域的収束性を保証するために D ギャップ関数 $g_{\alpha\beta}$ に対する直線探索を行う。アルゴリズムの詳細 [4] は以下の通りである。

一般化ニュートン法のアルゴリズム

step.0 (初期設定) 初期点 $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ とパラメータ $0 < \alpha < 1 < \beta$, $\rho > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1/2)$, $p > 0$, $\eta \in (0, 1)$, $\varepsilon \geq 0$ を選ぶ。 $k \leftarrow 0$ とする。

step.1 (終了判定) $\|\nabla g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$ であれば終了する。

step.2 (降下方向 $\mathbf{d}^{(k)}$ の決定) 任意の $H^{(k)} \in \partial_B \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$ を選び、ニュートン方程式 (22) を解く。式 (22) が解をもたないか、または式 (22) の解 $\mathbf{d}^{(k)}$ が $\nabla g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)} \leq -\rho \|\mathbf{d}^{(k)}\|^p$ を満足しなければ $\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)})$ として **step.3** へ。式 (22) の解 $\mathbf{d}^{(k)}$ が $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}) \leq \eta g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)})$ を満たせば $t^{(k)} = 1$ として **step.4** へ。さもなければ **step.3** へ。

step.3 直線探索

不等式

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda^l \mathbf{d}^{(k)}) \leq g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)}) + \sigma \lambda^l \nabla g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)}$$

を満たす最も小さい非負整数 l を求め、ステップ幅 $t^{(k)}$ を $t^{(k)} = \lambda^l$ により定める.

step.4 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$, $k \leftarrow k + 1$ として, **step.1** へ.

このアルゴリズムによって生成される点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ の集積点は D ギャップ関数 $g_{\alpha\beta}$ の停留点であることが保証される. 特に, $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ の集積点 $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$ において Jacobi 行列 $\mathbf{r}'(\bar{\mathbf{x}})$ が正定値であれば, 停留点 $\bar{\mathbf{x}}$ は $g_{\alpha\beta}$ の大域的最適解であり, さらに BVIP(18) の解となることが示されている [4].

6 数値実験

この節では 3 節で示した一起点・多終点モデルに対して, 第 5.3 節で紹介した BVIP に対する一般化ニュートン法をもちいて DUE 配分を求めた結果を報告する. 実験でもちいた一起点・多終点ネットワークは下図 (図 2) のような 1 起点 3 終点ネットワークである.

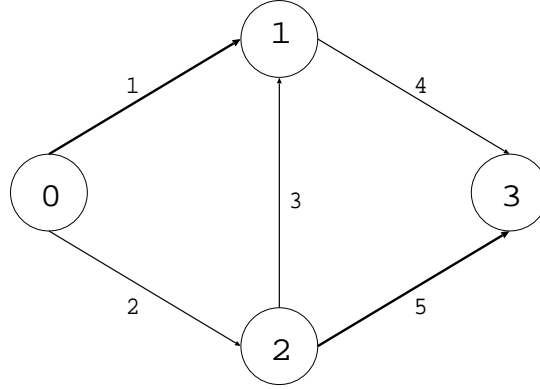


図 2: 1 起点 3 終点ネットワーク

6.1 BVIP による定式化

図 2 のネットワークにおいて, 各 ν に対するリンクコスト関数と BVIP(18) は

$$\begin{aligned} c_1^\nu &= \max\{m_1, y_1^\nu \cdot \Delta / \bar{\mu}_1 - \Delta\}, \\ c_2^\nu &= \max\{m_2, y_2^\nu \cdot \Delta / \bar{\mu}_2 - \Delta\}, \\ c_3^\nu &= \max\{m_3, y_3^\nu \cdot \Delta / \bar{\mu}_3 - \tau_2^\nu + \tau_2^{\nu-1} - \Delta\}, \\ c_4^\nu &= \max\{m_4, y_4^\nu \cdot \Delta / \bar{\mu}_4 - \tau_1^\nu + \tau_1^{\nu-1} - \Delta\}, \\ c_5^\nu &= \max\{m_5, y_5^\nu \cdot \Delta / \bar{\mu}_5 - \tau_2^\nu + \tau_2^{\nu-1} - \Delta\}, \\ \mathbf{x}^\nu &= (y_1^\nu, y_2^\nu, y_3^\nu, y_4^\nu, y_5^\nu, \tau_1^\nu, \tau_2^\nu, \tau_3^\nu)^\top \in \mathfrak{R}^8, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}^\nu(\mathbf{x}^\nu) = \begin{pmatrix} c_1^\nu - \tau_1^\nu \\ c_2^\nu - \tau_2^\nu \\ c_3^\nu + \tau_2^\nu - \tau_1^\nu \\ c_4^\nu + \tau_1^\nu - \tau_3^\nu \\ c_5^\nu + \tau_2^\nu - \tau_3^\nu \\ y_1^\nu + y_3^\nu - y_4^\nu - q_1^\nu \\ y_2^\nu - y_3^\nu - y_5^\nu - q_2^\nu \\ y_4^\nu + y_5^\nu - q_3^\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$$

と表される.

6.2 実験方法

ネットワークの各パラメータは以下のように設定する.

$$\begin{aligned} \Delta = 10, \quad m_1 = 200, \quad m_2 = 50, \quad m_3 = 50, \quad m_4 = 50, \quad m_5 = 150, \\ \bar{\mu}_1 = 200, \quad \bar{\mu}_2 = 100, \quad \bar{\mu}_3 = 50, \quad \bar{\mu}_4 = 100, \quad \bar{\mu}_5 = 200. \end{aligned}$$

また, 考察する時間帯および時点は $\nu \in U = \{0, 1, \dots, 10\}$ とし, 初期状態においてはネットワークにフローは存在しないと仮定する. そのとき

$$\begin{aligned} c_i^0 &= m_i, \quad (i = 1, \dots, 5) \\ \tau_1^0 &= \min\{m_1, m_2 + m_3\} = 50, \\ \tau_2^0 &= m_2 = 50, \\ \tau_3^0 &= \min\{m_1 + m_4, m_2 + m_3 + m_4, m_2 + m_5\} = 150 \end{aligned}$$

とする. さらに出発時点別の需要 OD フローを

$$\begin{cases} q_1^\nu = 200, \quad q_2^\nu = 200, \quad q_3^\nu = 200 & (1 \leq \nu \leq 5) \\ q_1^\nu = 120, \quad q_2^\nu = 120, \quad q_3^\nu = 300 & (6 \leq \nu \leq 10) \end{cases}$$

とする.

BVIP の一般化ニュートン法のアルゴリズムでもちいた各パラメータの値は

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 2, \quad \rho = 10^{-8}, \quad \lambda = 0.5, \quad \sigma = 10^{-4}, \quad p = 2.1, \quad \eta = 0.9, \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

であり, 一般化 Jacobi 行列の式 (21) においては $\xi = 1$ として計算を行った.

リンクコスト関数は max 関数で表されるために, 連続的微分可能ではなく, このままでは D ギャップ関数の連続的微分可能性が保証されないので, 連続的微分可能な関数で近似を行ったものをリンクコスト関数としてもちいた (付録.B 参照).

6.3 実験結果・考察

計算結果によって得られた, 各リンクの各起点出発時点に関する流入率 y_i^ν ($i = 1, \dots, 5, \nu \in U$) をグラフに表したものを図 3 に示す. ノード i を目的地とする利用者の集合を利用者 i と呼び, 時点 $\nu - 1$ と時点 ν のあいだを区間 ν と呼ぶことにする. 区間 1 において, 利用者 1 は

リンク 2, 3, 利用者 2 はリンク 2, 利用者 3 はリンク 2-3-4 を利用した経路がそれぞれの最短経路となる. これにより, リンク 2 のリンクコストが著しく増大する (図 4). よって, 区間 2 においては, 利用者 1 と利用者 3 がリンク 1 とリンク 2 に分散する経路選択が最適となる. すなわち, 起点から ノード 1 までの 2 つの経路, リンク 1 とリンク 2-3 において, 旅行時間はそれぞれ $c_1^2 = 200$, $c_2^3 + c_3^3 = 200$ となっており, リンク 1 を利用した場合とリンク 2-3 を利用した場合とで旅行時間が等しくなっている. ここで, 流れるフローの量は決定されるが, リンク 1 およびリンク 2-3 を利用する利用者 1 と利用者 2 の割合は一意に定まらないことに注意が必要である. 区間 3 以後はリンク 3 に流入する利用者は減少し続け, 区間 5 において流入率は 0 になる. しかし, 区間 6 から需要 OD フローが変化し, 利用者 3 が他の利用者に比べて多くなること, およびリンク 2 を利用せざるを得ない利用者 2 が減ることにより, 利用者 1 と利用者 3 は再びリンク 1 とリンク 2-3 の経路に分散する. その後リンク 1, 2, 4 においてリンクコストは次第に増加し, 区間 9 において, ようやくリンク 5 を利用する利用者が現れることが観察される.

以上の考察は起点出発時点別フローの経路選択に関するものであったが, つぎに各時刻における実際のリンクの状態を考察する. あるリンク (i, j) において, 時刻 t における累積流入量 $A_{ij}(t)$, 累積流出量 $D_{ij}(t)$ がわかれば, その時刻でのリンク内存在フロー $X_{ij}(t) = A_{ij}(t) - D_{ij}(t)$ が計算できる. まず, 実験で得られた出発時刻別フローから $A_{ij}(t)$, $D_{ij}(t)$ を求める.

$$y_{ij}^\nu \Delta = A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu) - A_{ij}(\hat{\tau}_i^{\nu-1}) = D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu) - D_{ij}(\hat{\tau}_j^{\nu-1})$$

より, $A_{ij}(\hat{\tau}_i^0) = D_{ij}(\hat{\tau}_j^0) = 0$ とすれば, 出発時点 ν に関して前向きに逐次計算を行うことにより $A_{ij}(\hat{\tau}_i^\nu)$, $D_{ij}(\hat{\tau}_j^\nu)$, $((i, j) \in \mathcal{L}, \nu \in U)$ が求まる. 実際にリンク 4 に対して計算を行って $A_4(\hat{\tau}_{4in}^\nu)$, $D_4(\hat{\tau}_{4out}^\nu)$, $X_4(t)$ ($\nu \in U, t \in [0, \hat{\tau}_{4out}^{10}]$) を求めた結果を図 5 に表す. ただし, 横軸は実時刻, 縦軸は交通量を表す. 図 5 から, リンク 4 での各時刻におけるリンク内存在フロー, リンクコストの変化が視覚的に確認できる.

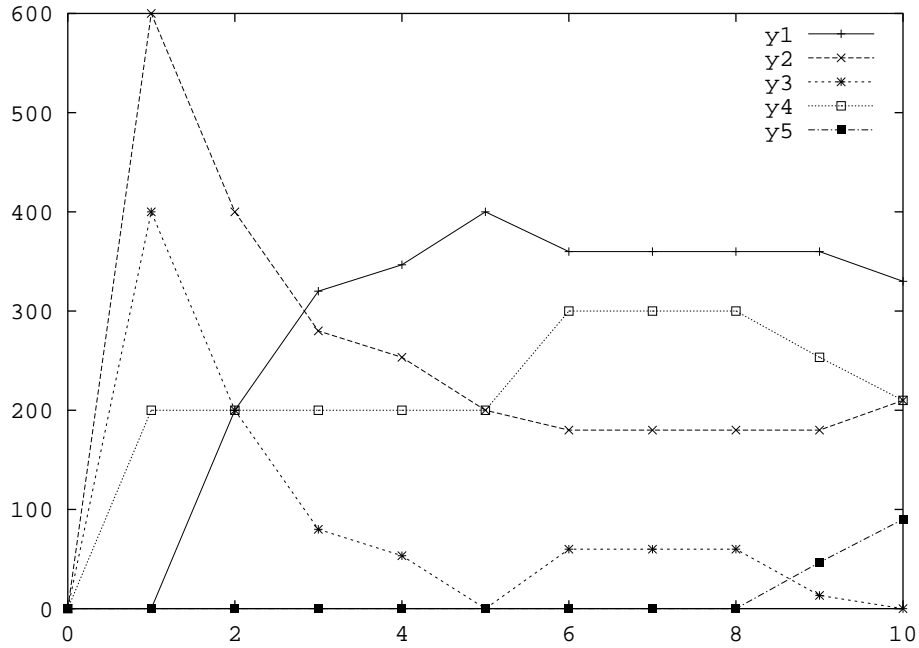


図 3: 各リンクにおける流入率 横軸: 起点出発時点 縦軸: 起点出発時点に関する流入率

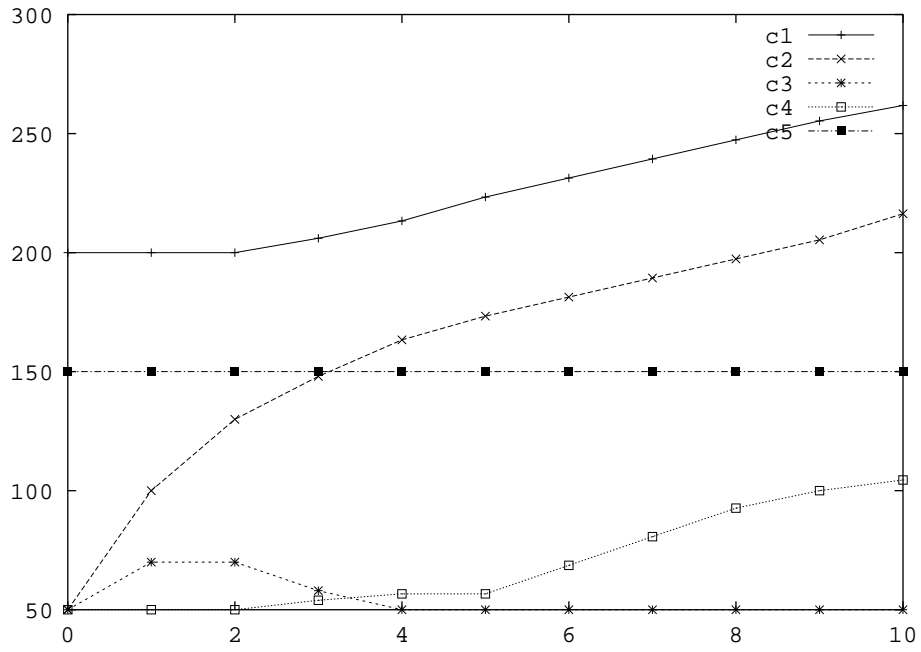


図 4: 各リンクにおけるリンクコスト 横軸: 起点出発時点 縦軸: 各起点出発時点のフローが経験するリンクコスト

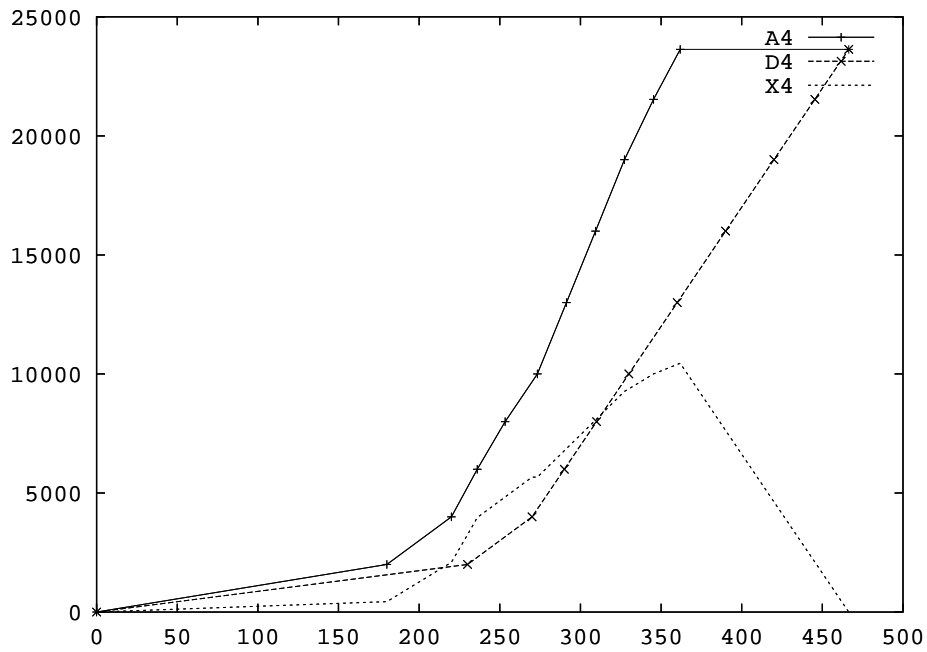


図 5: 実時刻に対するリンク 4 の累積流入・流出量および存在フロー

7 結論

一起点・多終点および多起点・一終点のネットワークに対する DUE 配分が, BVIP として定式化でき, さらに BVIP に対する一般化ニュートン法をもちいることにより, DUE フローパターンが効率的に計算できることを示した. さらに, 得られた出発時刻別フローから, 起点出発時点ごとの最適な経路選択がわかり, またそれらより, 実時刻に対する各リンクの累積流入量, 累積流出量およびリンク内存在フローが計算できることを数値実験により確かめた.

謝辞

日頃から御教授下さり, 本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を頂いた福島雅夫教授に深く感謝の意を表します. また日頃から色々お世話になっている滝根哲哉助教授ならびに山下信雄助手, また福島研究室の皆様にも厚く御礼申し上げます.

参考文献

- [1] 土木学会土木計画学研究委員会(編), 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法, 土木学会, 2000.
- [2] 赤松隆・桑原雅夫, 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分-1 起点・多終点および多起点・1 終点 OD ペアの場合, 土木学会論文集 No.488 (1994), pp. 21-30.
- [3] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [4] Christian Kanzow, Masao Fukushima, Solving box constrained variational inequalities by using the natural residual with D-gap function globalization, Operations Research Letters 23 (1998) pp. 45-51.
- [5] Christian Kanzow, Masao Fukushima, Theoretical and numerical investigation of the D-gap function for box constrained variational inequalities, Mathematical Programming 83 (1998) pp. 55-87.

付録

A 一起点・多終点モデルの出発時刻別変数によるリンクコストの表現

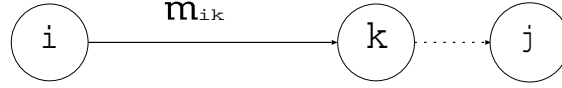


図 6: サブリンクへの分解

3.5.1 節で与えたリンクコスト関数の表現式 (4) を導く. 一本のリンク (i, j) を自由走行リンク部分 (i, k) と待ち行列リンク部分 (k, j) に分けて考える (図 6). 出発時点 ν に起点を出発するフローが経験するリンク (i, j) のリンクコスト c_{ij}^ν は $c_{ij}^\nu = c_{ik}^\nu + c_{kj}^\nu$ で与えられる. c_{ik}^ν は常に一定の値 (自由走行時間) m_{ik} をとり, 一方, c_{kj}^ν は $c_{kj}^\nu = X_{kj}(\hat{\tau}_k^\nu)/\bar{\mu}_{kj}$ で与えられる. いま $\nu-1$ 時点以前のパラメータは既知であるので, $c_{kj}^{\nu-1} = X_{kj}(\hat{\tau}_k^{\nu-1})/\bar{\mu}_{kj}$ の値が既知であり,

$$c_{kj}^\nu = c_{kj}^{\nu-1} + \left\{ X_{kj}(\hat{\tau}_k^\nu) - X_{kj}(\hat{\tau}_k^{\nu-1}) \right\} / \bar{\mu}_{kj}$$

と表せる. ここで, 待ち行列が $\hat{\tau}_k^{\nu-1}$ と $\hat{\tau}_k^\nu$ のあいだ存在すると仮定する. そのとき, つねに最大流出率 $\bar{\mu}_{jk}$ でフローはリンク (k, j) から流出するので,

$$\begin{aligned} c_{kj}^\nu &= c_{kj}^{\nu-1} + \left\{ A_{kj}(\hat{\tau}_k^\nu) - A_{kj}(\hat{\tau}_k^{\nu-1}) \right\} / \bar{\mu}_{kj} - \left\{ D_{kj}(\hat{\tau}_k^\nu) - D_{kj}(\hat{\tau}_k^{\nu-1}) \right\} / \bar{\mu}_{kj} \\ &= c_{kj}^{\nu-1} + y_{kj}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{kj} - \bar{\mu}_{kj} (\hat{\tau}_k^\nu - \hat{\tau}_k^{\nu-1}) / \bar{\mu}_{kj} \\ &= c_{kj}^{\nu-1} + y_{kj}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{kj} - (\tau_k^\nu - \tau_k^{\nu-1} + \Delta) \end{aligned}$$

となる. また, 時刻 $\hat{\tau}_k^{\nu-1}$ と $\hat{\tau}_k^\nu$ のあいだに待ち行列が存在しているならば $c_{kj}^\nu > 0$ でなければならないので,

$$c_{kj}^\nu = \max \left\{ 0, c_{kj}^{\nu-1} + y_{kj}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{kj} - \tau_k^\nu + \tau_k^{\nu-1} - \Delta \right\}$$

が成り立つ. よって, リンク (i, k) と (k, j) を結合したリンク (i, j) に対しては

$$\begin{aligned} c_{ij}^\nu &= \max \left\{ m_{ik}, m_{ik} + c_{kj}^{\nu-1} + y_{kj}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{kj} - \tau_k^\nu + \tau_k^{\nu-1} - \Delta \right\} = m_{ik} + c_{jk}^\nu \\ &= \max \left\{ m_{ik}, c_{ij}^{\nu-1} + y_{kj}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{kj} - \tau_k^\nu + \tau_k^{\nu-1} - \Delta \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

となる. ここで, $m_{ik} = m_{ij}$, $y_{ik}^\nu = y_{kj}^\nu = y_{ij}^\nu$, $\bar{\mu}_{kj} = \bar{\mu}_{ij}$ であり, さらに

$$\hat{\tau}_k^\nu - \hat{\tau}_k^{\nu-1} = (\hat{\tau}_i^\nu + m_{ik}) - (\hat{\tau}_i^{\nu-1} + m_{ik}) = \hat{\tau}_i^\nu - \hat{\tau}_i^{\nu-1}$$

すなわち, $\tau_k^\nu - \tau_k^{\nu-1} = \tau_i^\nu - \tau_i^{\nu-1}$ が成り立つことに注意すれば, 式 (23) は

$$c_{ij}^\nu = \max \left\{ m_{ij}, c_{ij}^{\nu-1} + y_{ij}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{ij} - \tau_i^\nu + \tau_i^{\nu-1} - \Delta \right\}$$

と書き換えられる.

B max関数の微分可能な関数による近似

2変数の max 関数 $\max\{a, b\}$ は

$$\max\{a, b\} = a + \max\{0, b - a\}$$

と表すことができるので, $\max\{0, x\}$ を連続的微分可能な関数で近似することを考える. いま

$$h(y) = \frac{\sqrt{y^2 + 4} + y}{2}$$

と定義される連続的微分可能な関数 $h(y)$ を考えると, 正のパラメータ $\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha h(\alpha^{-1}x) &= \alpha \frac{\sqrt{(\alpha^{-1}x)^2 + 4} + \alpha^{-1}x}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 4\alpha^2} + x}{2} \\ &\rightarrow \frac{|x| + x}{2} \quad (\alpha \rightarrow 0) \\ &= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ &= \max\{0, x\} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, α を微小な値にとれば 連続的微分可能な関数 $\alpha h(\alpha^{-1}x)$ で $\max\{0, x\}$ を近似できるので, リンクコスト関数

$$c_{ij}^\nu = m_{ij} + \max\left\{0, c_{ij}^{\nu-1} + y_{ij}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{ij} - \tau_i^\nu + \tau_i^{\nu-1} - \Delta - m_{ij}\right\}$$

は, $X = c_{ij}^{\nu-1} + y_{ij}^\nu \Delta / \bar{\mu}_{ij} - \tau_i^\nu + \tau_i^{\nu-1} - \Delta - m_{ij}$ とおくことにより

$$c_{ij}^\nu = m_{ij} + \alpha h(\alpha^{-1}X), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall \nu \in U$$

と近似することができる. なお, 第6節の数値実験では $\alpha = 10^{-8}$ をもちいた.