

目次

1	序論	1
2	分枝ポワソン過程 (BPP) とその性質	2
3	マルコフ変調ポワソン過程 (MMPP) を入力とする有限バッファ待ち行列の解析	4
3.1	MMPP の定義	4
3.2	MMPP を入力とする有限バッファ待ち行列の呼損率	4
3.3	離脱直後の客数分布	5
4	MMPP による適合	8
4.1	最関連時間スケール	8
4.2	適合方法	9
5	数値実験	12
5.1	最関連時間スケールの値	12
5.2	適合	12
5.3	呼損率の評価	14
6	結論	18
A	クロネッカー和の定義	i

分枝ポワソン到着をもつ単一サーバ待ち行列における呼損率の近似法

岡崎健太郎

摘要

従来の電話網に対する通信トラフィックモデルでは通話要求の発生過程をポワソン過程でモデル化している。しかし、インターネットなどにみられるデータトラフィックには、データ転送単位であるパケットの発生過程に自己相似性や長期依存性といった強い相関が見られることが知られている。このような強い相関をもつトラフィックを入力とするシステムの振る舞いは、ポワソン過程を入力とするシステムとは大きく異なる。したがって、ポワソン過程を入力とするシステムでは、通信トラフィックのモデルとしては不十分である。

特にインターネットにおけるトラフィックは、短い時間スケールではポワソン過程と類似のランダムな性質を示し、比較的長い時間スケールでは強い相関を示すことが知られている。このような性質をもつトラフィックモデルの一つに分枝ポワソン過程 (Branching Poisson Process, 以下 BPP) がある。BPP はネットワークの基幹網におけるパケットの到着をモデル化した到着過程と見することもできる。よって、BPP を入力とする単一サーバ待ち行列システムは応用上、非常に重要であると考えられているが、その解析は極めて困難であることが知られている。

そこで、本報告書では BPP を入力とする単一サーバ有限バッファ待ち行列システムにおける呼損率を、解析的な取り扱いが可能なマルコフ変調ポワソン過程 (Markov Modulated Poisson Process, 以下 MMPP) を入力とする単一サーバ有限バッファシステムにおける呼損率を用いて近似的に求めることを考える。一般に、有限バッファ待ち行列では、システムのパラメタに依存したある時間スケールが存在し、それより大きな時間スケールにおける入力の相関構造は呼損率に対してほとんど影響しないことが知られている。そこで、呼損率に対して強い影響をもつ時間スケールを近似的に導出する。さらに、導出した時間スケールにおける BPP の統計量を模擬するように MMPP のパラメタを設定し、それを入力とする単一サーバ有限バッファ待ち行列システムの呼損率を求めることにより、BPP を入力としたシステムの呼損率を近似する。

上記の提案手法を用いて数値実験を行ったところ、BPP を入力とするシステムの呼損率が比較的大きいとき、BPP の性質を模擬した MMPP を入力とするシステムによる呼損率の評価が可能であることがわかった。しかし、対象となるシステムの呼損率が小さな場合は、提案方法ではシステムの特性を正確につかむことが難しいことがわかった。

1 序論

従来の電話網に対するトラヒックモデルでは、通話要求の発生過程をポワソン過程でモデル化している。しかし、インターネットなどにみられるデータトラヒックには、データ転送単位であるパケットの発生過程に自己相似性や長期依存性といった強い相関が見られることが知られている [4]。このような強い相関をもつトラヒックを入力とするシステムの振る舞いは、ポワソン過程を入力とするシステムとは大きく異なる。例えば、強い相関をもつトラヒックを入力とするシステムでは系内容数分布の裾野が冪乗的にしか減少しないが、ポワソン過程を入力としたシステムでは系内容数分布の裾野は指数的に減少する [4]。したがって、ポワソン過程を入力とするシステムでは、通信トラヒックのモデルとしては不十分である。

特にインターネットにおけるトラヒックは、短い時間スケールではポワソン過程と類似のランダムな性質を示し、比較的長い時間スケールでは強い相関を示すことが知られている [3]。このような性質を持つトラヒックモデルの一つに分枝ポワソン過程 (Branching Poisson Process, 以下 BPP) がある。BPP ではまず親到着がポワソン過程で到着する。そして、それぞれの親到着のあとに一定の間隔 δ で子到着が次々到着する。

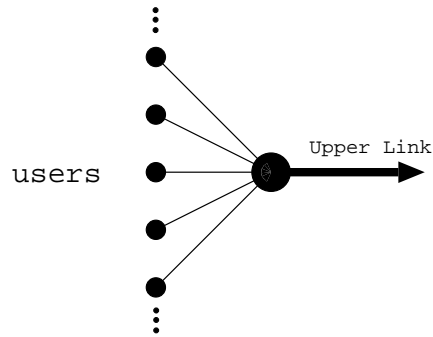


図 1: ネットワークモデル

BPP はネットワークの基幹網におけるパケットの到着をモデル化した到着過程とみることもできる (図 1 参照)。ここでは、共用回線に多数のユーザがアクセス回線を用いて接続されており、ユーザからファイル転送要求が起こると、ファイルは一定長のパケットに分割されて連続的にアクセス回線を用いて共用回線へと伝送される。この結果、一つのファイル転送から発生するパケットの最後のビットが共用回線へ到着する間隔はアクセス回線でのパケット転送時間となる。もし、ファイル転送要求の発生がポワソン過程に従い、共用回線の帯域がアクセス回線の帯域の δ 倍であるならば、共用回線へのパケットの到着過程は BPP でモデル化できる。

また、BPP は TCP コネクションが多重化された状況のモデルとしても利用することができる [3]。図 2 ように、アクティブになったユーザ A がユーザ B と TCP 接続で通信しているとする。A の回線の方が B の回線より帯域が狭い場合、はじめに A は接続している回線に最大限のパケットを送り出す。B は返す ACK が小さなパケットのため、A からのパケットを受け取り次第次々と送り出すことができる。したがって、A は常に最大限のパケットを一定間隔で送り出す。逆に B の回線が A より帯域が狭く、この通信のボトルネックになっているとする。はじめは A が最大限にパケットを送り出す

が、B へのローカルなリンクの帯域幅の制約のため、B からの ACK はボトルネックとなる回線が最大の働きをする間隔でしか帰ってこない。したがって、安定状態になった TCP コネクションは図 2 のようになる。図の縦の太さは回線の帯域の広さを表し、横軸は時間を表している。このとき、パケットの間隔は一定の値となる。

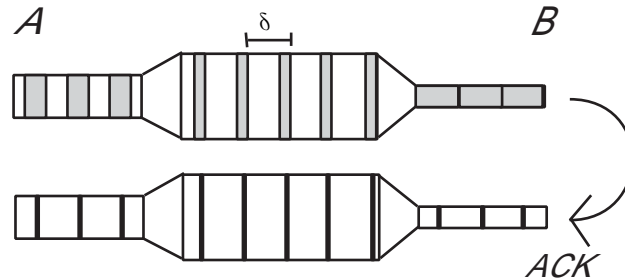


図 2: TCP 接続

以上から、BPP を入力とするシステムを評価することは、通信ネットワークのルータなどを設計する上で有用と考えられる。しかしながら、BPP を入力とした単一サーバ待ち行列システムは解析が困難であることが知られている [5]。そこで、本報告書では BPP を入力とする単一サーバ有限バッファ待ち行列における呼損率を、マルコフ変調ポワソン過程 (Markov Modulated Poisson Process, 以下 MMPP) を入力とする単一サーバ有限バッファ待ち行列における呼損率を用いて近似的に求めることを考える。一般に単一サーバ有限バッファ待ち行列では、システムのパラメータに依存したある時間スケールが存在し、それより大きな時間スケールでの相関構造は呼損率に対してほとんど影響しないことが知られている [3]。このことから、呼損率に対して強い影響をもつ時間スケールにおける BPP の統計量を模擬するように MMPP のパラメータを設定する。MMPP は連続時間マルコフ連鎖で支配されており、その状態集合を $\{1, 2, \dots, M\}$ とすると、マルコフ連鎖が状態 j にいるときは、率 λ_j のポワソン過程に従って到着が発生する。MMPP は解析的な取り扱いがやすく、これを入力とした解析手法が確立されている。このように求めた MMPP を入力とする待ち行列システムの呼損率を求めることにより、BPP を入力とした待ち行列システムの呼損率を見積もる。

本報告書ではまず、第 2 章で分枝ポワソン過程を紹介する。次に第 3 章でマルコフ変調ポワソン過程について、その定式化と解析手法を説明する。そして、第 4 章で呼損率を模擬するにあたって、注目すべき時間スケールを求め、実際に適合する方法を提案する。第 5 章では数値実験の結果を示す。最後に第 6 章で結論を述べる。

2 分枝ポワソン過程 (BPP) とその性質

BPP では親到着がパラメータ $\lambda^{(P)}$ のポワソン過程で到着する。子到着は親到着に続いて一定の間隔 δ で次々と到着する。一つの親到着とそれに続く子到着をあわせて一つの家族とする。C を子到着の数を表す確率変数とする。したがって、一家族に含まれるパケット数 G は $G = C + 1$ と表される。

以下では $E[G] = g$, $\Pr(C = n) = c(n)$ とおく。 $A_{\text{BPP}}(t)$ を区間 $(0, t]$ に到着する客の数とする。 t に

対してある整数 τ が存在し $\tau\delta < t \leq (\tau+1)\delta$ と表せるとする. ここで, 区間 $(t-l\delta, t-(l-1)\delta]$ ($l = 1, \dots, \tau$) に親到着があった家族が, $A_{\text{BPP}}(t)$ に与える影響を考える. $q_l(n)$ ($l = 1, \dots, \tau, n = 1, \dots, l$) をこの家族が $A_{\text{BPP}}(t)$ に n 人寄与する確率とすると

$$q_l(n) = \begin{cases} c(n-1), & n = 1, \dots, l-1 \\ \bar{C}(l-1), & n = l \end{cases}$$

となる. ただし, $\bar{C}(n) = \Pr(C \geq n)$ である.

次に時刻 $(-l+1)\delta, t - (\tau+l+1)\delta]$ ($l = -1, 0, 1, \dots$) に親到着があった家族が, $A_{\text{BPP}}(t)$ に与える影響を考える. $r_{\tau,l}(n)$ ($l = -1, 0, 1, \dots, n = 1, \dots, \tau+1$) をこの家族が $A_{\text{BPP}}(t)$ に n 人寄与する確率とすると

$$r_{\tau,l}(n) = \begin{cases} C(l), & n = 0 \\ c(l+n), & n = 1, \dots, \tau \\ \bar{C}(l+\tau+1), & n = \tau+1 \end{cases}$$

となる. ただし, $C(n) = \Pr(C \leq n)$ である.

最後に, 時刻 $(t - (\tau+1+l)\delta, -l\delta]$ ($l = 0, 1, \dots$) に親到着があった家族が, $A_{\text{BPP}}(t)$ に与える影響を考える. $s_{\tau,l}(n)$ ($l = 0, 1, \dots, n = 1, \dots, \tau$) をこの家族が $A_{\text{BPP}}(t)$ に n 人寄与する確率とすると

$$s_{\tau,l}(n) = \begin{cases} C(l), & n = 0 \\ c(l+n), & n = 1, \dots, \tau-1 \\ \bar{C}(l+\tau), & n = \tau \end{cases}$$

となる.

$A_{\text{BPP}}^*(z, t)$ を $A_{\text{BPP}}(t)$ の確率母関数とする. $A_{\text{BPP}}^*(z, t)$ を求めるため, $Q_l^*(z)$ ($l = 1, \dots, \tau$), $R_{\tau,l}^*(z)$ ($l = -1, 0, 1, \dots, \tau+1$), $S_{\tau,l}^*(z)$ ($l = 0, 1, \dots, \tau$) を以下のように定義する.

$$Q_l^*(z) = \sum_{n=1}^{l-1} c(n-1)z^n + \bar{C}(l-1)z^l, \quad l = 1, \dots, \tau$$

$$R_{\tau,l}^*(z) = C(l) + \sum_{n=1}^{\tau} c(l+n)z^n + \bar{C}(l+\tau+1)z^{\tau+1}, \quad l = -1, 0, 1, \dots, \tau+1$$

$$S_{\tau,l}^*(z) = C(l) + \sum_{n=1}^{\tau-1} c(l+n)z^n + \bar{C}(l+\tau)z, \quad l = 0, 1, \dots, \tau$$

ここで, 親到着はポワソン到着することから次の式を得る.

$$A_{\text{BPP}}^*(z, t) = \left(\prod_{l=1}^{\tau} \exp(-\lambda^{(P)}(1-Q_l^*(z))\delta) \right) \left(\prod_{l=-1}^{\tau+1} \exp(-\lambda^{(P)}(1-R_{\tau,l}^*(z))(t-\tau\delta)) \right) \\ \left(\prod_{l=0}^{\tau} \exp(-\lambda^{(P)}(1-S_{\tau,l}^*(z))((\tau+1)\delta-t)) \right)$$

$A_{\text{BPP}}^*(z, t)$ を z について微分することによって, 次の式を得る [11].

$$E[A_{\text{BPP}}(t)] = \lambda^{(P)}gt$$

$$\text{Var}[A_{\text{BPP}}(t)] = \lambda^{(P)}gt + \lambda^{(P)}t \left(g_{\tau}^{(2)} + 2\tau(g - g_{\tau}^{(1)}) \right) - \lambda^{(P)}\delta \left(\frac{g_{\tau}^{(3)}}{3} + g_{\tau}^{(2)} + \tau(\tau + 1)(g - g_{\tau}^{(1)}) \right)$$

ただし, $g_{\tau}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) は確率変数 $\min(G, \tau)$ の i 次階乗積率である.

3 マルコフ変調ポワソン過程 (MMPP) を入力とする有限バッファ待ち行列の解析

3.1 MMPP の定義

まず, 状態空間 $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ を持つ既約な連続時間有限状態マルコフ連鎖を考える. 状態 i ($i \in \mathcal{M}$) での滞在時間は率 α_i の指数分布に従い, 状態 i での滞在が終わると確率 $p_{i,j}$ ($j \in \mathcal{M}, j \neq i$) で状態 j に遷移する. ただし, $\sum_{j \in \mathcal{M}, j \neq i} p_{i,j} = 1$ とする. このとき, MMPP は状態 i での滞在期間中に率 λ_i ポアソン過程に従って到着を発生させる到着過程として定義される.

ここで, 行列 C 及び D を $M \times M$ 行列とし, その (i, j) 成分 $C_{i,j}$ 及び $D_{i,j}$ ($i, j \in \mathcal{M}$) はそれぞれ

$$C_{i,j} = \begin{cases} -\alpha_i - \lambda_i, & i = j \\ \alpha_i p_{i,j}, & i \neq j \end{cases} \quad D_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

で与えられるとする. このとき, $C + D$ は MMPP を支配する連続時間マルコフ連鎖の無限小作用素となる. 以下では, MMPP を支配する連続時間マルコフ連鎖を「基本マルコフ連鎖」と呼ぶことにする. また行列 C は到着を伴わない状態遷移を, 行列 D は到着を伴う状態遷移を, それぞれ支配しており, MMPP は 2 つの行列の組 (C, D) で特徴づけることができる. さらに, π を基本マルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルとすると, π は $\pi(C + D) = 0$, $\pi e = 1$ をみたす. ただし, e は全ての成分が 1 のベクトルであり, 文脈に応じた適当なサイズを持つものとする. また, 到着率は $\lambda = \pi D e$ となる.

3.2 MMPP を入力とする有限バッファ待ち行列の呼損率

本節では MMPP を入力とする有限バッファ単一サーバ待ち行列の呼損率について述べる. 以下では, サービス時間は一定値 h を取るものとする. バッファサイズが有限であるため, 到着した全ての客がシステムに入れるわけではなく, 到着時のバッファが全て先に到着した客で埋まっている場合, 新たに到着した客はシステムに入ることができずサービスを受けられない. この現象を呼損と呼び, P_{loss} を呼損率, すなわち, 到着した客がシステムに入れない確率とする. ここで y_0 を定常状態の任意時点においてシステムが空である確率とする. サービス時間が一定値 h を取るため, 到着した客のうちシステムに収容される客の割合 $1 - P_{\text{loss}}$ はシステムに到着する単位時間当たりの仕事量 $\rho = \lambda h$ とサーバーの稼働率 $1 - y_0$ を用いて

$$1 - P_{\text{loss}} = \frac{1 - y_0}{\rho} \quad (1)$$

と書ける. (1) は一定サービスの場合に限らず, サービス時間が独立で同一に分布するとき成り立つことに注意する. さて, 呼損率 P_{loss} は (1) より

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1 - y_0}{\rho} \quad (2)$$

で与えられる. したがって, 任意時点においてシステムが空である確率 y_0 が求めれば, 呼損率 P_{loss} は (2) を用いて得られることになる.

さらに, x_0 を $1 \times M$ ベクトルとし, その第 j 番目の成分は客の離脱時点において MMPP を支配するマルコフ連鎖の状態が j であり, かつ, システムが空である確率を表すものとする. このとき, 簡単な考察から, y_0 は x_0 を用いて

$$y_0 = \frac{x_0(-C)^{-1}e}{h + x_0(-C)^{-1}e} \quad (3)$$

と表されることがわかる. ここで, $x_0(-C)^{-1}e$ は客の離脱時点においてシステムが空である時の遊休期間の長さを表しており, 分母は任意の客の離脱間隔の平均を表している.

以上の考察から呼損率 P_{loss} を求める問題は x_0 を求める問題へと帰着されることがわかる. したがって, 以下では x_0 を求めるため, 離脱直後の客数分布の考察を行う.

3.3 離脱直後の客数分布

本節では離脱直後の客数分布について考察する. また, バッファサイズは N とする. さらに, $L_n^{(D)}$ 及び $S_n^{(D)}$ をそれぞれ n ($n = 1, 2, \dots$) 番目の離脱が起こった時点での系内容数, 及び基本マルコフ連鎖の状態を表す確率変数とする. このとき 2 変数過程 $\{L_n^{(D)}, S_n^{(D)}\}_{n=1,2,\dots}$ はマルコフ連鎖となる. 以下では, その遷移確率行列 T を記述するためにいくつかの表記を導入する.

まず, S_{in} 及び S_{out} をそれぞれサービス開始時及び終了時の基本マルコフ連鎖の状態とする. さらに, A_{ser} を 1 つ分のサービスを処理する間 (長さ h) に到着する客数とする. ここで $A^*(z)$ を $M \times M$ 行列とし, その (i, j) ($i, j \in \mathcal{M}$) 成分は $E[z^{A_{\text{ser}}} 1_{\{S_{\text{out}}=j\}} | S_{\text{in}} = i]$ を表すものとする. ただし, 1_{χ} は事象 χ の指示関数とする. このとき, $A^*(z)$ は簡単な考察から

$$A^*(z) = \exp((C + zD)h) \quad (4)$$

で与えられることがわかる. さらに, A_k を

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k = A^*(z) \quad (5)$$

をみたく $M \times M$ 行列とすると, その (i, j) ($i, j \in \mathcal{M}$) 成分は $\Pr[A_{\text{ser}} = k, S_{\text{out}} = j | S_{\text{in}} = i]$ を表すことに注意する. ここで $F_m(k)$ ($m, k = 0, 1, \dots$) は次式をみたく $M \times M$ 行列とする.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k F_m(k) = [I + \theta^{-1}C + z\theta^{-1}D]^m \quad (6)$$

ただし, $\theta = \max_{j \in \mathcal{M}} |C_{j,j}|$ である. このとき次の補題を得る.

補題 1 A_k ($k = 0, 1, \dots$) は $F_m(k)$ ($m, k = 0, 1, \dots$) を用いて

$$A_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta h)^m}{m!} e^{-\theta h} F_m(k) \quad (7)$$

と表される. さらに, $F_m(k)$ は次のようにして再帰的に求められる. $m = 0$ のとき

$$F_0(k) = \begin{cases} I, & k = 0 \\ O, & k \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

となり, また, $m = 1, 2, \dots$ に対しては

$$F_m(k) = \begin{cases} (I + \theta^{-1}C)F_{m-1}(0), & k = 0 \\ (I + \theta^{-1}C)F_{m-1}(k) + \theta^{-1}DF_{m-1}(k-1), & k \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

となる.

証明 最初に, $F_m(k)$ が再起式 (8) 及び (9) で決定されることを示す. $F_m(k)$ の定義式 (6) から (8) は明らかに成り立つ. また (6) より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z^k F_m(k) &= [I + \theta^{-1}C + z\theta^{-1}D] \sum_{k=0}^{\infty} z^k F_{m-1}(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k (I + \theta^{-1}C)F_{m-1}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \theta^{-1}DF_{m-1}(k) \end{aligned}$$

となるので, 両辺の z^k の係数を比較すると (9) を得る.

次に (7) を示す. (4) の右辺を展開し, (6) を用いると

$$\begin{aligned} A^*(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta h)^m}{m!} e^{\theta h} [I + \theta^{-1}C + z\theta^{-1}D]^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta h)^m}{m!} e^{-\theta h} \sum_{k=0}^{\infty} z^k F_m(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta h)^m}{m!} e^{-\theta h} F_m(k) \end{aligned}$$

を得る. したがって, 上式において両辺の z^k の係数を比較すると (7) が得られる. ■

注意 2 θ は A_k の計算を安定なものにするため, 非負の数だけを扱うように導入されたパラメータであり, 一様化パラメータと呼ばれる [12].

ここで, B_k ($k = 0, 1, \dots$) を

$$B_k = (-C)^{-1}DA_k$$

と定義する. このとき, B_k の (i, j) ($i, j \in M$) 成分は, 客の離脱によってシステムが空になり, その時の基本マルコフ連鎖の状態が i であるという条件の下で, 次に到着する客のサービス中に到着する

客数が k であり、かつ、そのサービスの終了時点における基本マルコフ連鎖の状態が j である確率を表している。さらに、 $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 、 $B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ とすると、 A 及び B はそれぞれ次式を用いて求められる。

$$A = A^*(1) = \exp((C + D)h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta h)^m}{m!} e^{-\theta h} [I + \theta^{-1}(C + D)]^m$$

$$B = (-C)^{-1}DA$$

以上の準備を踏まえて、2変数マルコフ連鎖 $\{L_n^{(D)}, S_n^{(D)}\}_{n=1,2,\dots}$ の遷移確率行列 T は次のように表現される。

$$T = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{N-2} & B_{N-1} & B_N \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{N-2} & A_{N-1} & A_N \\ O & A_0 & A_1 & \cdots & A_{N-3} & A_{N-2} & \bar{A}_{N-1} \\ O & O & A_0 & \cdots & A_{N-4} & A_{N-3} & \bar{A}_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_0 & A_1 & \bar{A}_2 \\ O & O & O & \cdots & O & A_0 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\bar{A}_n = A - \sum_{k=0}^{N-1} A_k, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\bar{B}_n = B - \sum_{k=0}^{N-1} B_k, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

とする。ここで、 x_k ($k = 0, 1, \dots, N$) を $1 \times M$ ベクトルとし、その第 j 成分 $x_{k,j}$ は、

$$x_{k,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(L_n^{(D)} = k, S_n^{(D)} = j)$$

で与えられるとする。

最後に、 G_k ($k = 0, 1, \dots, N$) 及び K をそれぞれ

$$G_k = \begin{cases} (I - \bar{A}_1)^{-1} A_0, & k = N \\ \left(I - A_1 - \bar{A}_2 G_N \right)^{-1} A_0, & k = N - 1 \\ \left(I - A_1 - \sum_{n=k+1}^{N-1} A_{n+1-k} G_n \cdots G_{k+1} - \bar{A}_{N-k+1} G_N \cdots G_{k+1} \right)^{-1} A_0, & k = N - 2, \dots, 1 \end{cases}$$

$$K = B_0 + \sum_{n=1}^{N-1} B_n G_n \cdots G_1 + \bar{B}_N G_N \cdots G_1$$

と定義する。このとき、行列 K は元の待ち行列システムに対し、客の離脱時にシステムが空になる時点で埋め込んだ隠れマルコフ連鎖の遷移確率行列であり、 $x_0 = x_0 K$ をみたす。ここで、離脱直後の客数分布 x_k ($k = 0, 1, \dots, N$) の計算手法に関する定理を示す。

定理 3 [7] x_k ($k = 0, 1, \dots, N$) は

$$x_k = \frac{x'_k}{\sum_{k=0}^N x'_k e}$$

で与えられる. ここで, x'_0 は $x'_0 = x'_0 K$ をみたす確率ベクトルであり, x'_k ($k = 1, 2, \dots, N$) は

$$x'_k = \left(x'_0 B'_k + \sum_{m=1}^{k-1} x'_m A'_{m,k} \right) (I - A'_{k,k})^{-1}$$

$$B'_k = \begin{cases} B_k + \sum_{n=k+1}^{N-1} B_n G_n \cdots G_{k+1} + \bar{B}_N G_N \cdots G_{k+1}, & k = 1, 2, \dots, N-2 \\ B_{N-1} + \bar{B}_N G_N, & k = N-1 \\ \bar{B}_N, & k = N \end{cases}$$

$$A'_{m,k} = \begin{cases} A_{k+1-m} + \sum_{n=k+1}^{N-1} A_{n+1-m} G_n \cdots G_{k+1} + \bar{A}_{N+1-m} G_N \cdots G_{k+1}, & k \leq N-2 \\ A_{N-m} + \bar{A}_{N+1-m} G_N, & k = N-1 \\ \bar{A}_{N+1-m}, & k = N \end{cases}$$

によって決定される.

こうして, 定理 3 から x_0 が求まるため, (2) 及び (3) を用いて呼損率 P_{loss} が得られる.

4 MMPP による適合

ここでは BPP を入力とするシステムの呼損率を評価するため, 適切な MMPP を設定する方法について述べる. MMPP によって BPP のすべての統計量を模擬することはできない. 一方, 待ち行列の呼損率はある特定の時間スケールでの到着の相関によって決定されることが知られている. そこで, 特定の時間スケールだけに注目し, そこで BPP を MMPP によって模擬することを考える. まず, 注目すべき時間スケールについて述べる. その後, 具体的な適合方法を示す.

4.1 最関連時間スケール

分枝ポワソン過程入力をもつシステムの呼損率を考える. 一般に有限バッファ待ち行列の呼損率を求めることは難しく, バッファを無限にした待ち行列の待ち行列長との比較によって求める. L を無限バッファ待ち行列の待ち行列長とすると,

$$\Pr(L > N) = \Pr\left(\sup_{t>0} (A_{\text{BPP}}(t) - t/h) > N\right)$$

と表すことができる [1]. $\Pr(L > N)$ が十分に小さい時, 大偏差定理よりある t^* が存在し

$$\Pr(L > N) \approx \Pr(A(t^*) - t^*/h > N) \quad (10)$$

と近似できる [2]. この t^* は最関連時間スケールと呼ばれ,

$$t^* = \arg \max_{t>0} \Pr(A_{\text{BPP}}(t) - t/h > N) \quad (11)$$

である.

(10) から, $\Pr(L > N)$ は到着過程の時間スケール t^* での性質に支配されることがわかる. よって, 呼損率も時間スケールが t^* 付近での到着過程の性質との関係が強いと予想される. そこで, 時間スケール t^* の付近で BPP の性質を MMPP によって模擬することとする.

実際に t^* の値を求める. (11) の右辺に現れる確率は以下のように変形できる.

$$\Pr(A_{\text{BPP}}(t) - t/h > N) = \Pr\left(\frac{A_{\text{BPP}}(t) - \mathbb{E}[A_{\text{BPP}}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[A_{\text{BPP}}(t)]}} > \frac{N + (1 - \rho_{\text{BPP}})t/h}{\sqrt{\text{Var}[A_{\text{BPP}}(t)]}}\right)$$

ただし, ρ_{BPP} はシステムの利用率で,

$$\rho_{\text{BPP}} = \mathbb{E}[A_{\text{BPP}}(t)]h$$

である. ここで,

$$f_{\text{BPP}}(t) = \frac{N + (1 - \rho_{\text{BPP}})t/h}{\sqrt{\text{Var}[A_{\text{BPP}}(t)]}}$$

とおき, $A_{\text{BPP}}(t) - \mathbb{E}[A_{\text{BPP}}(t)]$ が正規分布に従うとすると

$$t^* = \arg \min_{t>0} f_{\text{BPP}}(t)$$

となる.

4.2 適合方法

本報告書では BPP の特定の性質を模擬した MMPP を入力とする待ち行列を解析する. 使用する MMPP には独立な 2 状態 MMPP を 3 個重畳させたものを使用する. 以下では 2 状態 MMPP およびその重畳について述べる.

連続時間マルコフ連鎖は 2 つの状態 1, 2 を持つ. 状態 1 の滞在時間は率 α の指数分布に従い, 状態 2 の滞在時間は率 β の指数分布に従う. マルコフ連鎖が状態 i ($i = 1, 2$) にいるとき客は率 λ_i のポワソン過程に従い到着する. 2 状態 MMPP は次の 2 つの行列によって特徴づけられる.

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha - \lambda_1 & \alpha \\ \beta & -\beta - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

今, $A_{\text{MMPP}}(t)$ を区間 $(0, t]$ に到着する客数とする. このとき, $A_{\text{MMPP}}(t)$ の平均および分散は,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{\text{MMPP}}(t)] &= \frac{\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2}{\alpha + \beta}t \\ \text{Var}[A_{\text{MMPP}}(t)] &= \frac{\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2}{\alpha + \beta}t + \frac{2\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\alpha + \beta)^3}t - \frac{2\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\alpha + \beta)^4}(1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)) \end{aligned}$$

となる [9].

2つの独立な2状態MMPPの重畳を考える。個々のMMPPはそれぞれ、 (C_1, D_1) , (C_2, D_2) で与えられるとする。この時、これらの重畳は

$$(C, D) = (C_1 \oplus C_2, D_1 \oplus D_2)$$

で与えられる4状態MMPPとなる。ここで、 \oplus はクロネッカー和である¹。同様に、独立な2状態MMPPを*i*個重畳させた到着過程は、 2^i 個の状態を持つMMPPとなる。今回は独立な2状態MMPPを3個重畳させたものでBPPの呼損率を近似する。

独立な2状態MMPPを3個重畳させたもので近似するので、それぞれの区間 $(0, t]$ の到着客数を $A_{\text{MMPP}_k}(t)$ ($k = 1, 2, 3$)とする。また、それぞれのMMPPのパラメータを $(\alpha_k, \beta_k, \lambda_{k1}, \lambda_{k2})$ ($k = 1, 2, 3$)とする。さらに $\mathbf{a} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$, $\mathbf{b} = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{31}, \lambda_{32})$ とおく。ここで、

$$f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t) = \frac{N + \left(1 - \sum_{k=1}^3 \rho_{\text{MMPP}_k}\right) t/h}{\sqrt{\sum_{k=1}^3 \text{Var}[A_{\text{MMPP}_k}(t)]}}$$

とおき、 t^* の周辺におけるタイムスケール*t*で、

$$f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t) \approx f_{\text{BPP}}(t)$$

となるように適合する。ただし、 ρ_{MMPP_k} は*k*番目のMMPPのトラヒック強度で

$$\rho_{\text{MMPP}_k} = \frac{\beta_k \lambda_{k1} + \alpha_k \lambda_{k2}}{\alpha_k + \beta_k} h$$

である。

関数の適合は関数がどれだけ離れているかを表す評価関数を最小化する事によって適合する。評価関数はいくつかのサンプル点 t_n ($n = 1, \dots, P$)に対し、それぞれの点での元の関数の値と適合する関数の値の相対誤差の2乗の和で表されるとする。サンプル点が多いほど関数の形が近い解が得られると思われるが、全域にわたって関数を一致させるのは不可能である。

そこで、注目する範囲でのみ関数値が近くなるようにサンプル点を決めなければならない。4.1節より、注目すべき時間スケールは t^* の付近であると考えられる。そこで、

$$T_{\text{sample}} = \{t \mid f_{\text{BPP}}(t) < w f_{\text{BPP}}(t^*)\}$$

として、 $t_n \in T_{\text{sample}}$ ($n = 1, \dots, P$)となるようにサンプル点を選ぶ。ただし、 w は注目する時間スケールの幅を決定する定数である。ここで、関数の適合をMMPPのパラメータを変数とする最適化問題として定義する。サンプル点 t_n ($n = 1, \dots, P$)に対し、

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^P \left(\frac{f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t_i) - f_{\text{BPP}}(t_i)}{f_{\text{BPP}}(t_i)} \right)^2$$

¹クロネッカー和の定義は付録Aを参照

と定義する。解くべき最適化問題は、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
& \text{subject to} && \mathbf{a} > 0 \\
& && \mathbf{b} \geq 0 \\
& && f_{\text{BPP}}(t_i) \geq f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t_i), \quad i = 1, \dots, P \\
& && \rho_{\text{MMPP}} = \rho_{\text{BPP}}
\end{aligned}$$

である。ただし、 ρ_{BPP} は BPP のトラヒック強度であり、 ρ_{MMPP} は MMPP のトラヒック強度で

$$\rho_{\text{MMPP}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_k \lambda_{k1} + \alpha_k \lambda_{k2}}{\alpha_k + \beta_k}$$

である。数値実験では最小化のアルゴリズムとして [8] にある Nelder と Mead の方法を使用する。このアルゴリズムは無制約最小化問題の局所最適解を求めるものであるので、ペナルティ法を適用する。まず、 \mathbf{a} が正になり、 \mathbf{b} が負にならないように、ペナルティ項として、

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^6 \exp(-a_j) \xi_{a_j} + \sum_{j=1}^6 \exp(-b_j) \xi_{b_j}$$

とする。ただし、

$$\xi_{a_j} = \begin{cases} 1, & a_j \leq 0 \\ 0, & a_j > 0 \end{cases} \quad \xi_{b_j} = \begin{cases} 1, & b_j < 0 \\ 0, & b_j \geq 0 \end{cases}$$

である。さらに、安全側から評価するために、

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^P \left(f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t_i) - f_{\text{BPP}}(t_i) \right) \gamma_i$$

として、

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t_i) - f_{\text{BPP}}(t_i) > 0 \\ 0, & f_{\text{MMPP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t_i) - f_{\text{BPP}}(t_i) \leq 0 \end{cases}$$

と定義する。そして、MMPP のトラヒック強度が BPP のトラヒック強度に等しくなるように、

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp((\rho_{\text{MMPP}} - \rho_{\text{BPP}})^2)$$

を定義する。そして、最小化問題

$$\text{minimize} \quad g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + r(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

を解く。

上記のアルゴリズムで求まるのは局所最適解であるので、初期状態によって求まる解が異なる場合がある。また、求まった局所最適解があまりよくない可能性がある。そこで、初期状態をランダムに多数とり、それぞれに最適化のアルゴリズムを適用した。求まった解に対する評価関数の値を比較し、値の小さなものを採用することにした。

5 数値実験

ネットワーク上で送信されるファイルの大きさは裾の長い分布に従うことが知られている [6]. そこで、一つの家族に含まれるパケット数の分布は以下のようなパレート分布とした.

$$\Pr(G > n) = \begin{cases} 1, & n \leq 7 \\ \left(\frac{1}{n-7}\right)^{1.4}, & n > 7 \end{cases}$$

また、各パケットのサービス時間については $h = 1.0$ とした.

5.1 最関連時間スケールの値

最関連時間スケール t^* を $\delta = 3.0, 10.0, 50.0, 100.0$ でそれぞれ求めた結果が表 1 である. ただし、 $\rho = 0.8$ とした.

表 1: 最関連時間スケール

N	t^*			
	$\delta = 3.0$	$\delta = 10.0$	$\delta = 50.0$	$\delta = 100.0$
2	33	71	10	10
5	54	91	224	25
10	90	131	324	455
25	201	240	474	742
50	384	420	669	957
100	726	790	1025	1339

$\delta = 100.0$ の $N = 5$ と $N = 10$ の場合の t^* の間、 $\delta = 50.0$ の $N = 2$ と $N = 5$ の場合の t^* の値に大きな差があることがわかる. BPP は時間スケールが小さな時はランダムな性質を示す. t^* が δ よりも小さいとき、BPP を入力とするシステムの呼損率は、BPP がランダムな性質を示す時間スケールに依存することになる. したがって、この場合はポワソン過程を入力としたシステムの呼損率で近似できることが知られている [3]. MMPP はポワソン過程を含むモデルであるので、 $t^* < \delta$ が成り立つ場合は呼損率がうまく近似できるはずである. $t^* > \delta$ となるときは BPP の依存性の強さが呼損率に影響を及ぼす. よってポワソン過程を入力としたシステムでは呼損率を近似することはできないが、MMPP ならばある程度 BPP の相関構造を模擬することができる.

5.2 適合

$f_{\text{BPP}}(t)$ と $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ の値が t^* の付近で近くなるように 4.2 節の方法を適用した. $f_{\text{BPP}}(t)$ のグラフの形は δ, N の組み合わせによって大きく異なる. もっとも特徴的な違いが現れるのは t^* が δ

を越える場合と越えない場合である。図3は $\delta = 3.0$, $N = 5$ で実際に適合した結果である。このとき $t^* > \delta$ である。図4は $\delta = 100.0$, $N = 5$ で適合した結果である。このとき $t^* < \delta$ である。縦軸に $f_{\text{BPP}}(t)$ および $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ をとり、横軸に時間スケール t をとった。ただし、どちらも $\rho = 0.8$ としている。結果をみると、 $f_{\text{BPP}}(t)$ と $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ の最下点とそこでの関数値が近くなっていることがわかる。 $t^* < \delta$ の場合である図4は t^* の付近ではほぼ完全に適合できることがわかる。しかし、図3から $t^* > \delta$ の場合では完全には適合できないことがわかる。

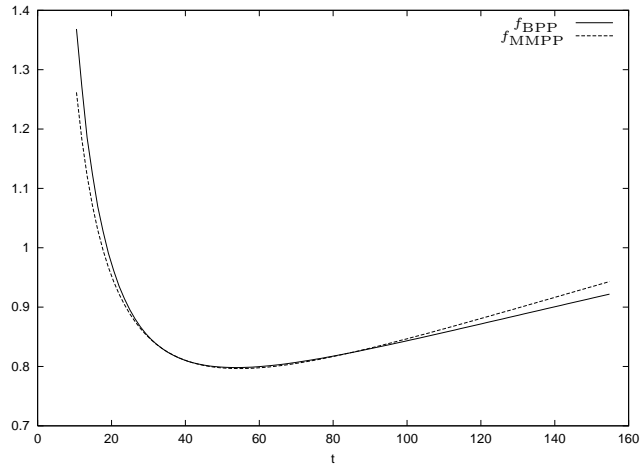


図 3: 適合例 ($\delta = 3.0, N = 5$)

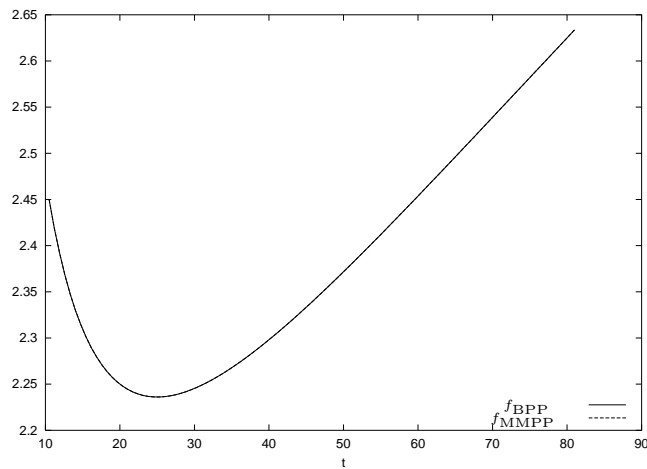


図 4: 適合例 ($\delta = 100.0, N = 5$)

5.3 呼損率の評価

$\delta = 3.0$ で MMPP の適合を $N = 2, 5, 7, 10, 25, 50, 75, 100$ についてそれぞれ行い, 得られた MMPP を入力とするシステムにおける呼損率を求めた. 図 5 は対応する BPP を入力とするシステムにおける呼損率をシミュレーションによって求めた結果との比較である.

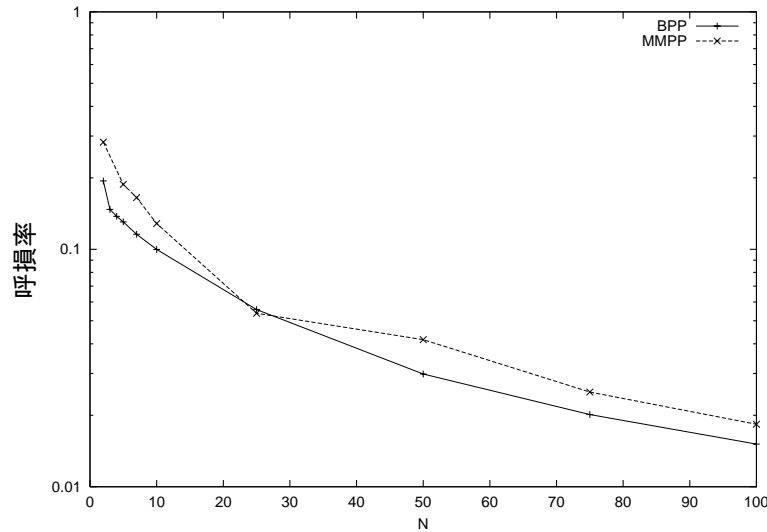


図 5: 呼損率を近似した値と BPP のシミュレーション結果の比較 ($\delta = 3.0$)

概ねうまく近似ができていますが, BPP と適合した MMPP での呼損率の精度にばらつきがある. 実際 Nelder と Mead の方法を使って最適解を求める際, 初期状態を変えることによって異なる解が求まることがある. これらの解は t^* 付近で $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ が $f_{\text{BPP}}(t)$ に近い値をとることは共通している. しかし, 呼損率の大きさにある程度の違いが生じる. 表 2 は 10 通りの初期状態に対し 4.2 節の方法で最適解を求め, それぞれに対応するシステムの呼損率を求めた結果である. BPP を入力とした場合のシミュレーション結果に近い値が得られているが, 誤差が生じていることがわかる. そこで, これらの呼損率の平均値を BPP を入力としたシステムにおける呼損率の近似値とした.

バッファの値ごとに 25 回初期値を変えて関数の適合を行い, MMPP のパラメータを得た. MMPP のパラメータごとに呼損率をもとめ, それを平均した値を呼損率の近似値とした. 図 6 は $\delta = 3.0$ とし, N の値を変化させて, 対応する BPP を入力とするシステムの呼損率と比較した結果である. 縦軸に呼損率を対数スケールでとり, 横軸にバッファサイズ N をとった. 以下, 呼損率の比較は同様に図示する.

表 2: 初期状態を変化させたときの呼損率の比較 ($\delta = 3.0, \rho = 0.8, N = 25$)

BPP を入力とした呼損率
0.05576
適合した MMPP を入力とした呼損率
0.067899
0.074221
0.060506
0.070214
0.076337
0.053767
0.050517
0.055216
0.076529
0.066398

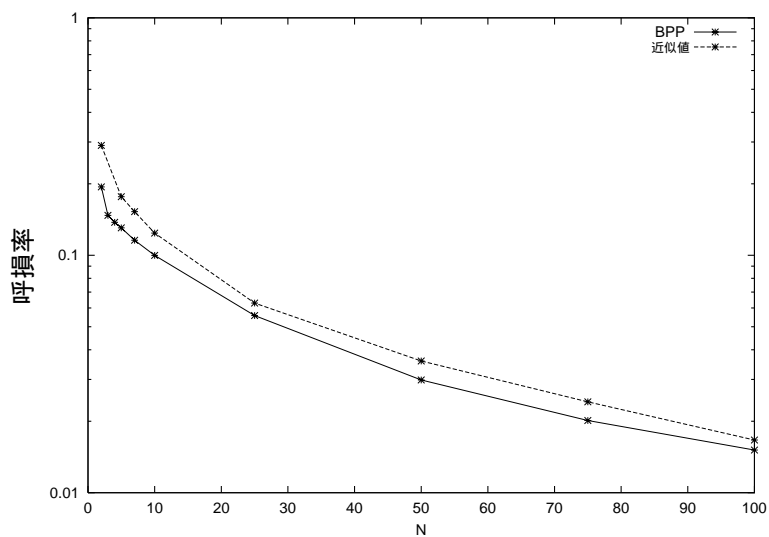


図 6: 呼損率の比較 ($\delta = 3.0$)

以上のことから、関数 $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ が $f_{\text{BPP}}(t)$ に t^* 付近で近い値をとることは、呼損率を決定する大きな要因になっていることがわかる。

さらに、 δ の値を大きくして同様の実験を行った。図 7, 8, 9 は $\rho = 0.8$ として $\delta = 10.0, 50.0, 100.0$ で、それぞれ近似によって得た呼損率を BPP のシミュレーションによって得た呼損率と比較したものである。呼損率が低くなる場合は精度の高い近似ができていないことがわかる。

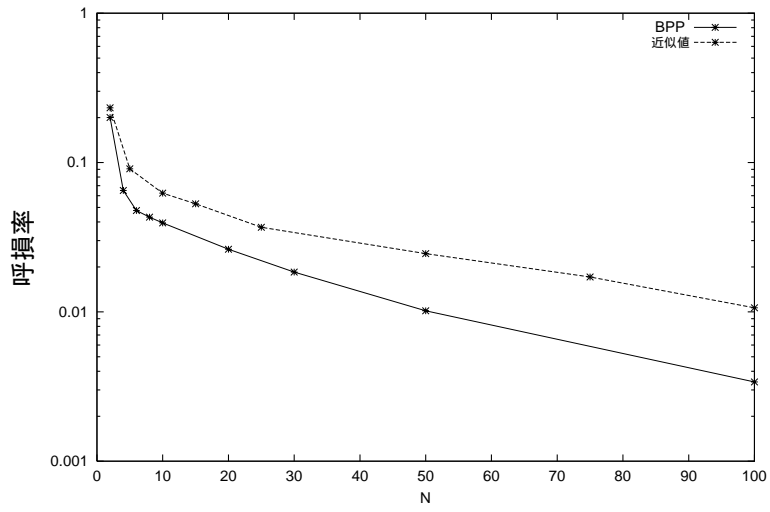


図 7: 呼損率の比較 ($\delta = 10.0, \rho = 0.8$)

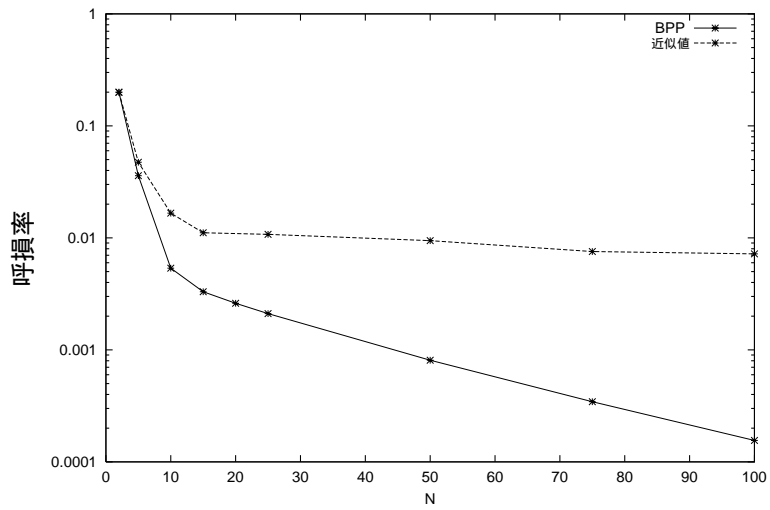


図 8: 呼損率の比較 ($\delta = 50.0, \rho = 0.8$)

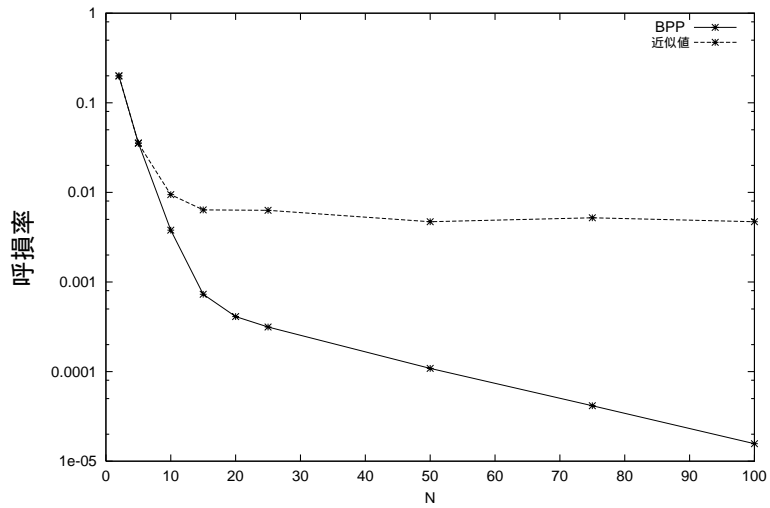


図 9: 呼損率の比較 ($\delta = 100.0, \rho = 0.8$)

図 10 は $\delta = 100$ として $\rho = 0.95$ とした. また, このときの各 N に対する t^* の値を表 3 に示した. これらのことから, 適合した MMPP を入力とするシステムは t^* が大きくなったときも, BPP を入力とするシステムの特徴をつかむことができることがわかる.

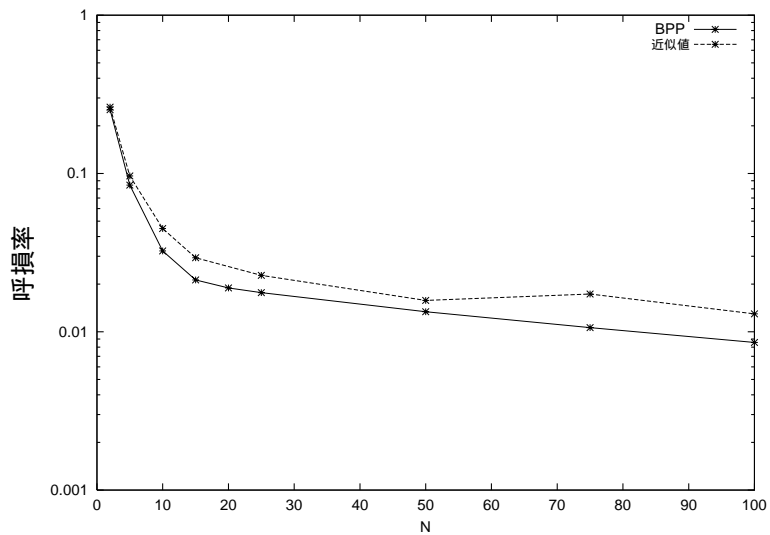


図 10: 呼損率の比較 ($\delta = 100.0, \rho = 0.95$)

表 3: 最関連時間スケール ($\delta = 100, \rho = 0.95$)

N	5	25	50	100
t^*	655	1339	2071	3654

6 結論

本報告書では特定の時間スケールにのみ注目して統計量を模擬することによって、解析的に呼損率を求めるのが難しいシステムを評価する方法を考察した。数値実験の結果、関数の適合の際の初期値に依存する誤差が生じた。そのため、BPP の呼損率が低い部分では相対的に誤差が大きくなり、満足のいく結果が出なかった。しかしながら、呼損率がある程度大きい場合は BPP の長期に及ぶ依存性を MMPP によってある程度表現できることがわかった。

適合したのは最関連時間スケール t^* の付近での分散と到着率であるが、実際にはほかの統計量も呼損率に影響を及ぼすはずである。今回影響が小さいとして無視した統計量についても再検討し、 t^* 付近での $f_{\text{BPP}}(t)$ と $f_{\text{MMPP}}(a, b, t)$ の適合の際の制約関数に取り込む必要があると思われる。

謝辞

日頃からご教授いただき、本研究にも御指導を賜った福嶋雅夫教授、ならびに終始多大なる御指導をいただきました滝根哲哉助教授に厚く御礼申し上げます。また、様々な協力、助言を提供していただきました最適化数理研究室の皆様にも深く感謝の意を表します。

参考文献

- [1] F. Baccelli and P. Brémard, *Elements of Queueing Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [2] J. A. Bucklew, *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation and Estimation*, Wiley, New York, 1990.
- [3] H. Furuya, H. Nakamura, S. Nomoto and T. Takine, “Local Poisson property of aggregated IP traffic,” submitted for publication.
- [4] 小林 利久, 町原 文明, 石橋 圭介, “マルチメディアトラヒック理論の最新動向,” 電子情報通信学会誌 vol. 81, No. 5, pp. 506–515, 1998.
- [5] M. Miyazawa, “Approximations for a single server queue with a branching Poisson arrival process,” Proc. ITC11, pp. 3.1A-1-1–3.1A-1-4, 1985.

- [6] 名部 正彦, 馬場 健一, 村田 正幸, 宮原 秀夫, “インターネット・アクセスネットワーク設計のための WWW トラヒックの分析とモデル化,” 電子情報通信学会論文誌, vol. J80-B-I, no. 6, pp. 428–437, 1997.
- [7] 太田 能, 戸出 英樹, 山本 幹, 岡田 博美, “相関性のある到着過程とサービス過程を有する離散時間有限容量単一サーバ待ち行列の解析,” 電子情報通信学会論文誌, vol. J77-B-1, no. 8, pp. 493–505, 1994.
- [8] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, New York, 1988.
(邦訳: 丹慶 勝市, 奥村 晴彦, 佐藤 俊郎, 小林 誠, “ニューメリカルレシピ・イン・シー, C 言語による数値計算のレシピ,” 技術評論社, 1993)
- [9] 武田裕弘, “IP トラヒックの数学的モデル化に関する考察,” 京都大学情報学科特別研究報告書, 2001.
- [10] 滝根哲哉, “M/G/1 パラダイムと MAP/G/1 待ち行列,” 1994.
- [11] T. Takine, “On a finite-buffer single-server queue with branching Poisson input and constant service times,” working paper, 2002.
- [12] H. C. Tijms, *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.

A クロネッカー和の定義

クロネッカー和の定義について述べる前に、クロネッカー積 \otimes と呼ばれる演算について説明する。クロネッカー和はクロネッカー積を用いて定義される。

まず, $U = (u_{i,j})$ 及び $V = (v_{i,j})$ をそれぞれ $k \times l$ 及び $m \times n$ 行列とする。このとき U と V のクロネッカー積は

$$U \otimes V = \begin{pmatrix} u_{1,1}V & u_{1,2}V & \cdots & u_{1,l}V \\ u_{2,1}V & u_{2,2}V & \cdots & u_{2,l}V \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,1}V & u_{k,2}V & \cdots & u_{k,l}V \end{pmatrix}$$

で定義される $km \times ln$ 行列である。一方、クロネッカー和は正方行列間の演算であり、 $k = l$ かつ $m = n$ のとき、 U と V のクロネッカー和は

$$U \oplus V = U \otimes I(m) + I(k) \otimes V$$

で定義される km 次の正方行列である。ここで、 $I(k)$ 及び $I(m)$ はそれぞれ k 次及び m 次の単位行列である。