特別研究報告書

BMI 最適化問題に対する逐次線形化法の適用

指導教官

福島　雅夫　教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 12 年入学
平成 16 年 3 月卒業

加藤 宏和

平成 16 年 1 月 30 日提出

BMI 最適化問題に対する逐次線形化法の適用

加藤　宏和

摘要

システム制御理論における問題はしばしば行列不等式を用いて記述できる．その行列不等式が線形行列不等式（LMI）である場合，問題は線形半正定値計画問題に定式化できる．この問題は特別な凸最適化問題であり，内点法を用いた高速な求解アルゴリズムが提案されていて，さらにそれを実装したソフトウェアも容易に入手可能である．しかし，制御系設計問題には双線形行列不等式（BMI）によって表される問題も数多く存在し，それらは BMI 最適化問題に定式化される．BMI 最適化問題は非線形半正定値計画問題のクラスに属する．線形半正定値計画問題は近年活発に研究されてきたが，一般的な非線形半正定値計画問題の研究は新しく，まだ初期段階にあるといえる．

BMI 最適化問題は凸ではないため大域的最適解を求めることは一般に非常に難しい．分枝限定法などを用いて大域的最適化を試みている研究もいくつか存在するが，残念ながら現在提案されている大域的求解アルゴリズムは現実の BMI 最適化問題の解法として実用レベルにあるとはいいがたい．そのような状況において，BMI 最適化問題の局所的最適解を効率的に計算する手法を開発することも十分に意味があると考えられる．また，BMI が実行可能かどうかを判定する問題に対して，局所的最適解を求めるアプローチは実際に有効である．

本報告書では，BMI 最適化問題に対して逐次線形化法を適用する．逐次線形化法は信頼領域法に基づく反復法であり，適当な仮定のもとで問題の停留点への大域的収束性が証明されている．いくつかの問題例に対して行った数値実験の結果，本方法は従来手法に比べてよりよい解を得ることができることを確認した．

目 次

1　序論

システム制御理論における問題はしばしば行列不等式を用いて記述できる．その行列不等式が線形行列不等式（LMI）である場合，問題は線形半正定値計画問題に定式化できる．この問題は特別な凸最適化問題であり，内点法を用いた高速な求解アルゴリズムが提案されていて，さらにそれを実装したソフトウェアも容易に入手可能である [6]．しかし，制御系設計問題には双線形行列不等式（BMI）によって表される問題も数多く存在し，それらは BMI 最適化問題に定式化される．いくつかの制御系設計問題は，線形半正定値計画問題に帰着することができる [1]．しかし実際には，解析的に解けず，線形半正定値計画問題に帰着できていない重要な設計問題も数多くある．

BMI は文字通り双線形，すなわち非凸である．双線形というのは，与えられた関数 $f(x, y)$ の変数 (x, y) のどちらか一方を固定すると，他方に関して線形になるということである．また，BMI について“ 実行可能解をもつかど うかチェックすることは NP 困難である ”ということが示されている．すなわち，BMI 最適化問題の大域的最適解を求めることは一般に非常に困難である．しかし，NP 困難であるということは変数の数が大きくなると効率よく解くことはできないことを示しているのであり，変数の数が高々数十の実用規模の制御系設計問題の大域的最適解を実用的な速度で求めることは可能かもしれない．そこで，例えば分枝限定法を用いて大域的最適化を試みている研究も存在するが，残念ながら現在提案されている大域的求解アルゴリズムは現実の BMI 最適化問題の解法として実用レベルにあるとはいいがたい [1, 3, 4]．

そのような状況において，BMI 最適化問題の局所的最適解を効率的に計算する手法を開発することも十分に意味があると考えられる．また，BMI が実行可能かど うかを判定する問題に対して，局所的最適解を求めるアプローチは実際に有効である．また，BMI 最適化問題に対して，(x, y) の一方を固定して得られる線形半正定値計画問題に対する最適化を交互に繰り返して準最適化を行うことも多いが，この方法では局所的最適解への収束さえ保証されない．

BMI 最適化問題は非線形半正定値計画問題のクラスに属する．線形半正定値計画問題は近年活発に研究されてきたが [9, 7, 8, 10]，一般的な非線形半正定値計画問題の研究は新しく，まだ初期段階にあるといえる [2, 11]．本研究では，信頼領域法を基にした逐次線形化法 [2] を BMI 最適化問題に適用することを試みる．逐次線形化法では，毎回の反復において副問題として二次の目的関数をもつ半正定値計画問題を解くことになるが，この問題は二次錐制約付きの線形半正定値計画問題に変換できる．先に述べたように，この種の問題に対しては効率的に解けるアルゴリズムが提案されていて，それを実装したソフトウェアも容易に入手できる．

本報告書の構成を示す．２節では BMI 最適化問題を定式化する．３節で逐次線形化法を BMI に適用したアルゴリズムを示し，４節では数値実験の結果を報告する．最後に５節で結論を述べる．

2　BMI 最適化問題

本節では，本報告書の主題である BMI 最適化問題を定式化する [1]．以下では，$S^{p\times p}$ は $p\times p$ の対称行列全体の集合，$A \succeq 0$ は行列 A が半正定値であることを表す．

BMI 最適化問題は，線形半正定値計画問題において制約を与える線形結合関数を双線形結合関数で置き換えたものということができる．

２つの変数ベクトル $x \in R^n$，$y \in R^m$ と定数対称行列 $B_{i,j} = B_{i,j}^T \in S^{p\times p}(i = 0, 1, ..., n, j =$

$0, 1, ..., m)$ の双線形結合関数 $\beta(x, y)$ を次式で定義する．

$$\beta(x, y) := B_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} x_i B_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} y_j B_{0,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j B_{i,j}$$

このとき BMI 最適化問題は，定数ベクトル $a \in \Re^n$，$b \in \Re^m$ を用いて次のように定式化される．

$$\begin{array}{ll} \min & a^T x + b^T y \\ \text{s.t.} & \beta(x, y) \succeq 0 \end{array}$$

線形半正定値計画問題における制約は凸であるのに対して，BMI 最適化問題における制約は非凸である．この事実のため，BMI 最適化問題は本質的に困難な問題となる．

BMI 最適化問題においては BMI 制約 $\beta(x, y) \succeq 0$ の実行可能性を決定する問題が基本的である．これは BMI 固有値問題と呼ばれ，BMI 最適化問題の特別なクラスとして，以下のように与えられる．

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ \text{s.t.} & \lambda I + \beta(x, y) \succeq 0 \end{array}$$

この問題の最小値が負のとき BMI 制約 $\beta(x, y) \succeq 0$ は実行可能領域をもつ．

BMI は広いクラスの制御系設計問題を統一的に記述することができる．実際，解析問題が LMI で記述できるならば，対応する設計問題はほとんどの場合 BMI で記述できることが示されている [1]．しかし，１節で述べたように，BMI が解をもつかどうかをチェックすることは NP 困難であることが示されていて，BMI 最適化問題の大域的最適解を求めることは一般に困難である．

3 逐次線形化法の適用

逐次線形化法 [2] は，一般的な非線形半正定値計画問題の，局所的最適解を求めることを目的とした，信頼領域法にもとづくアルゴリズムである．毎回の反復では二次の目的関数をもつ半正定値計画問題を解くが，この問題は二次錐制約付きの線形半正定値計画問題に変換できる．また，いくつかの仮定の下で逐次線形化法の大域的収束性が証明されている．この節では，逐次線形化法を BMI 最適化問題に適用した結果を示す．

以下で用いる表記について説明する．行列の内積を $\langle A, B \rangle := \mathrm{trace}(AB^T)$，ノルムを $\| A \| := (\langle A, A \rangle)^{\frac{1}{2}}$ と定義する．さらに $a \leq b$ である a, b および t の 3 つの実数について中間値を

$$\mathrm{mid}(a, t, b) = \begin{cases} a, & \text{if } t < a \\ t, & \text{if } t \in [a, b] \\ b, & \text{if } t > b \end{cases}$$

と表す．また，対称行列 $X \in S^{n \times n}$ を $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元のベクトルに変換する演算子 svec を

$$\mathrm{svec}(X) := (X(1,1), \sqrt{2}X(1,2), X(2,2), \sqrt{2}X(1,3), \sqrt{2}X(2,3), X(3,3), ...)^T$$

によって定義する．

3.1 BMI 最適化問題の変換

第２節で定式化した BMI 最適化問題を，変数 $Z \in S^{p\times p}$ を導入し，つぎのように等価な問題に変換する．

$$\begin{array}{ll} \min & a^T x + b^T y \\ \text{s.t.} & \mathrm{svec}(Z - \beta(x,y)) = 0 \\ & Z \succeq 0 \end{array} \tag{1}$$

以下の KKT 条件を満たすラグランジュ乗数 $U^* \in S^{p\times p}$ が存在するとき，(x^*, y^*, Z^*) を問題 (1) の停留点という．

$$\begin{array}{l} a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \\ b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,m} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \\ \mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*)) = 0 \\ Z^* \succeq 0, \quad U^* \succeq 0, \quad \langle Z^*, U^* \rangle = 0 \end{array} \tag{2}$$

KKT 条件 (2) は，適当な制約想定の下で最適性の必要条件となる．

問題 (1) に対して，次のようなペナルティ関数を最小化する問題を考える．

$$\min \quad P_\alpha(x, y, Z) \qquad \text{s.t.} \quad Z \succeq 0 \tag{3}$$

ただし，$P_\alpha : \Re^n \times \Re^m \times S^{p\times p} \to \Re$ は正確な l_1-ペナルティ関数で，パラメータ $\alpha > 0$ を用いて次式で定義される．

$$P_\alpha(x, y, Z) := a^T x + b^T y + \alpha \sum_{l=1}^{\bar{p}} |\mathrm{svec}(Z - \beta(x,y))_l|$$

ここで $\bar{p} := \frac{p(p+1)}{2}$ である．

このペナルティ関数を最小化する問題は，補助変数 ξ_i を含む次の問題と等価である．

$$\begin{array}{ll} \min & a^T x + b^T y + \alpha \sum_{l=1}^{\bar{p}} \xi_l \\ \text{s.t.} & \xi_l \geq \mathrm{svec}(Z - \beta(x,y))_l \quad l = 1, ..., \bar{p} \\ & \xi_l \geq -\mathrm{svec}(Z - \beta(x,y))_l \quad l = 1, ..., \bar{p} \\ & \xi_l \geq 0 \quad l = 1, ..., \bar{p} \\ & Z \succeq 0 \end{array} \tag{4}$$

この問題の KKT 条件は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
& a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \\
& b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,m} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \\
& \lambda_1^* - \lambda_2^* - \mathrm{svec}(U^*) = 0 \qquad (5) \\
& \alpha - \mu_l^* - \lambda_{1l}^* - \lambda_{2l}^* = 0 \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \xi_l^* \geq 0, \quad \mu_l^* \geq 0, \quad \xi_l^* \mu_l^* = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{1l}^* \geq 0, \quad \xi_l^* - \mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l \geq 0, \quad \lambda_{1l}^* (\xi_l^* - \mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l) = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{2l}^* \geq 0, \quad \xi_l^* + \mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l \geq 0, \quad \lambda_{2l}^* (\xi_i^* + \mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l) = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& Z^* \succeq 0, \quad U^* \succeq 0, \quad \langle Z^*, U^* \rangle = 0
\end{aligned}
$$

ある $\xi^* \in \Re^{\bar{p}}$ および $(x^*, y^*, Z^*) \in \Re^n \times \Re^m \times S^{p \times p}$ に対して，KKT 条件 (5) を満たすラグランジュ乗数 $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \mu^*, U^*) \in \Re^{\bar{p}} \times \Re^{\bar{p}} \times \Re^{\bar{p}} \times S^{p \times p}$ が存在するとき，(x^*, y^*, Z^*) は問題 (3) の停留点である．さらに $\xi^* = 0$ を満たす問題 (3) の停留点は元の問題 (1) の停留点である．

3.2 逐次線形化法

この節では，ペナルティ関数の最小化問題 (3) を解くアルゴリズムを示す．

$P_\alpha(x + \Delta x, y + \Delta y, Z + \Delta Z)$ の一次近似として $\Phi_\alpha : \Re^n \times \Re^n \times \Re^m \times \Re^m \times S^{p \times p} \times S^{p \times p} \to \Re$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
& \Phi_\alpha(x, \Delta x, y, \Delta y, Z, \Delta Z) \\
& := a^T (x + \Delta x) + b^T (y + \Delta y) \\
& + \alpha \sum_{l=1}^{\bar{p}} \left| \mathrm{svec} \left[Z - \beta(x, y) + \Delta Z - \sum_{i=1}^n \{ (B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j B_{i,j}) \Delta x_i \} - \sum_{j=1}^m \{ (B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i B_{i,j}) \Delta y_j \} \right]_l \right|
\end{aligned}
$$

アルゴリズム 3.1 逐次線形化法

step0 $k := 0$ とし，初期値を以下のように選ぶ．

$$\alpha > 0, 0 < \rho_1, < \rho_2 < 1, 0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2,$$

$$c_{max} \geq c_{\min} > 0, c_0 \in [c_{\min}, c_{max}], x^0, y^0, Z^0 \succeq 0$$

step1 次の副問題の唯一の最適解 $\Delta x^k \in \Re^n, \Delta y^k \in \Re^m, \Delta Z^k \in S^{p \times p}$ を求める．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2} c_k (\|\Delta x\|^2 + \|\Delta y\|^2 + \langle \Delta Z, \Delta Z \rangle) + \Phi_\alpha(x^k, \Delta x, y^k, \Delta y, Z^k, \Delta Z) \qquad (6) \\
\text{s.t.} \quad & Z^k + \Delta Z \succeq 0
\end{aligned}
$$

もし $\Delta x^k = 0, \Delta y^k = 0, \Delta Z^k = 0$ ならば終了．そうでないなら **step2** へ．

step2 r_k を次式により計算する．

$$r_k := \frac{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - P_\alpha(x^k + \Delta x^k, y^k + \Delta y^k, Z^k + \Delta Z^k)}{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)}$$

もし，$r_k \geq \rho_1$ ならば，“ k 回目の反復は成功 ”といい，$x^{k+1} := x^k + \Delta x^k, y^{k+1} := y^k + \Delta y^k, Z^{k+1} := Z^k + \Delta Z^k$ とする．そうでないなら“ k 回目の反復は失敗 ”といい，$x^{k+1} := x^k, y^{k+1} := y^k, Z^{k+1} := Z^k$ とする．

step3 c_k を次のように更新する．

$$\begin{cases} c_{k+1} := \sigma_2 c_k, & \textit{if} \quad r_k < \rho_1 \\ c_{k+1} := mid(c_{\min}, c_k, c_{max}), & \textit{if} \quad r_k \in [\rho_1, \rho_2), \\ c_{k+1} := mid(c_{\min}, \sigma_1 c_k, c_{max}), & \textit{if} \quad r_k \geq \rho_2. \end{cases}$$

step4 $k := k + 1$ として **step1** へ．

アルゴリズム 3.1 は，問題 (1) に対して信頼領域法にもとづく逐次線形化法を適用したものである．実際に解く副問題 (6) は，現在の反復点においてペナルティ関数を線形化したものとみなせる．また，副問題 (6) に $\Delta x, \Delta y, \Delta Z$ の大きさの上界を制約として含めることで信頼領域法を陽に用いるのではなく，目的関数にパラメータ c_k を掛けた二次の項を加えることで信頼領域法の考え方を隠に用いている．ここで，パラメータ c_k を大きくすることは信頼領域を小さくすることに対応し，パラメータ c_k を小さくすることは信頼領域を大きくすることに対応している．

信頼領域法を直接用いる方法に比べて，この方法にはいくつかの有利な点がある．まず，目的関数における二次の項によって副問題 (6) が強凸となり，さらに実行可能領域は空ではないので毎回の反復において唯一の最適解をもつことが保証される．さらに，信頼領域法を陽に用いると，制約条件の共通集合が空集合になるという好ましくない状況が起こり得るが，副問題 (6) においてはそのようなことは起こらない．また，非線形半正定値計画問題である問題 (1) に対して，ヘッセ行列を用いた二次近似を行うことは計算時間の面でかなり犠牲が大きいので，ここでは一次近似を用いている．

r_k は P_α の真の減少値と P_α のモデルとして使われている Φ_α の減少値の比率であり，信頼領域法において一般に用いられる．この値が十分に 1 に近いとき，$x^{k+1} := x^k + \Delta x^k, y^{k+1} := y^k + \Delta y^k, Z^{k+1} := Z^k + \Delta Z^k$ とし，そうでないとき，$x^{k+1} := x^k, y^{k+1} := y^k, Z^{k+1} := Z^k$ と更新してパラメータ c_k のみを大きくする．また，**step3** における c_k の更新の方法は，信頼領域法において知られているものと同様である．しかし，$r_k \geq \rho_2$ となり，反復が成功したときは上界 $c_{\max}$ と下界 $c_{\min}$ を用いて c_k を定めていることに注意する．

この節の残りでは，アルゴリズム 3.1 が矛盾なく定義されていることを証明する．このためには $\Delta x^k = 0$ かつ $\Delta y^k = 0$ かつ $\Delta Z^k = 0$ とならない限り，比 r_k の分母は正であることを証明すればよい．さらに，**step1** における終了条件を正当性を示す．

まず，次の簡単な補題から始める．

補題 3.1 　副問題 (6) の最適解を $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)$ とする．そのとき次の不等式が成り立つ．

$$P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) \geq \frac{1}{2} c_k (\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \langle \Delta Z^k, \Delta Z^k \rangle)$$

証明　$Z^k \succeq 0$ なので，$(\Delta x, \Delta y, \Delta Z) = (0,0,0)$ は副問題 (6) の実行可能解である．また $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)$ はこの副問題の最適解なので，以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \langle \Delta Z^k, \Delta Z^k\rangle) + \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)\\ &\leq \Phi_\alpha(x^k, 0, y^k, 0, Z^k, 0) = P_\alpha(x^k, y^k, Z^k)\end{aligned}$$

よって補題 3.1 は証明された．■

補題 3.1 によって，比 r_k の分母は常に非負であることが保証される．さらにこれは生成される点列 $\{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k)\}$ が単調非増加であることを示している．

次に，**step1** における終了条件が満たされたときのみ，分母が 0 になることを証明する．**step2** へ行くのは分母が正のときだけなので，これはアルゴリズム 3.1 が矛盾なく定義されていることを示している．

補題 3.2　副問題 (6) の最適解を $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)$ とする．そのとき $P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z$
0 が成り立つのは，$\Delta x^k = 0$，$\Delta y^k = 0$ かつ $\Delta Z^k = 0$ のときだけである．

証明　$\Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)$ の定義から $\Phi_\alpha(x^k, 0, y^k, 0, Z^k, 0) = P_\alpha(x^k, y^k, Z^k)$ なので，$\Delta x^k = 0$，$\Delta y^k = 0$ かつ $\Delta Z^k = 0$ であるとすると，$P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) = 0$ となる．逆に，$P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) = 0$ とすると，補題 3.1 より $0 = \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \langle \Delta Z^k, \Delta Z^k\rangle) = \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \|\Delta Z^k\|^2)$ となるので，$\Delta x^k = 0$，$\Delta y^k = 0$ かつ $\Delta Z^k = 0$ である．■

次に，**step1** における終了条件の正当性を示す．つまり，(x^k, y^k, Z^k) が問題 (1) の正確なペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点であるときだけ，終了条件が満たされることを証明する．

この証明を行う前に，まず副問題 (6) に注目する．$(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)$ を副問題 (6) の最適解とする．ここで，

$$\xi^k := |\mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\}]| \tag{7}$$

とすると，$(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k, \xi^k)$ は，つぎの副問題 (6) と等価な問題の最適解である．

$$\begin{aligned}\min\quad & \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x\|^2 + \|\Delta y\|^2 + \langle \Delta Z, \Delta Z\rangle) + a^T x^k + b^T y^k + a^T \Delta x + b^T \Delta y + \alpha \sum_{l=1}^{\bar{p}} \xi_l\\ \text{s.t.}\quad & \xi_l \geq \mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z - \sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} y_j^k B_{i,j})\Delta x_i\} - \sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^k B_{i,j})\Delta y_j\}]_l\\ & l = 1, ..., \bar{p}\\ & \xi_l \geq -\mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z - \sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} y_j^k B_{i,j})\Delta x_i\} - \sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^k B_{i,j})\Delta y_j\}]_l\\ & l = 1, ..., \bar{p}\\ & \xi_l \geq 0 \quad l = 1, ..., \bar{p}\\ & Z^k + \Delta Z \succeq 0\end{aligned} \tag{8}$$

問題 (8) は凸計画問題なので，KKT 条件は最適性の必要十分条件になる．つまり，次の KKT 条件を満たすラグランジュ乗数 $(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \mu^k, U^k) \in \Re\bar{p} \times \Re\bar{p} \times \Re\bar{p} \times S^{p \times p}$ が存在することが，

$(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k, \xi^k)$ が問題 (8) の最適解であるための必要十分条件である．

$$
\begin{aligned}
& c_k \Delta x^k + a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \\
& c_k \Delta y^k + b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \\
& \lambda_1^* - \lambda_2^* - \mathrm{svec}(U^k) = 0 \\
& \alpha - \mu_l^k - \lambda_{1l}^k - \lambda_{2l}^k = 0 \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \xi_l^k \geq 0, \quad \mu_l^k \geq 0, \quad \xi_l^k \mu_l^k = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{1l}^k \geq 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j}) \Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j}) \Delta y_j^k\})_l \geq 0, \\
& l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{1l}^k (\xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j}) \Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j}) \Delta y_j^k\})_l = 0, \\
& l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{2l}^k \geq 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
& \xi_l^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j}) \Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j}) \Delta y_j^k\})_l \geq 0, \\
& l = 1, ..., \bar{p} \\
& \lambda_{2l}^k (\xi_i^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j}) \Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j}) \Delta y_j^k\})_l) = 0, \\
& l = 1, ..., \bar{p} \\
& Z^k + \Delta Z^k \succeq 0, \quad U^k \succeq 0, \quad \langle Z^k + \Delta Z^k, U^k \rangle = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで，$\Delta x^k = 0, \Delta y^k = 0, \Delta Z^k = 0$ が副問題 (6) の最適解であれば，(9) は

$$
\begin{aligned}
& a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \\
& b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \\
& \lambda_1^* - \lambda_2^* - \mathrm{svec}(U^k) = 0 \\
& \alpha - \mu_l^k - \lambda_{1l}^k - \lambda_{2l}^k = 0 \quad l = 1, ..., \bar{p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\xi_l^k \ge 0, \quad \mu_l^k \ge 0, \quad \xi_l^k \mu_l^k = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
&\lambda_{1l}^k \ge 0, \quad \xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k))_l \ge 0, \quad \lambda_{1l}^k(\xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k))_l) = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
&\lambda_{2l}^k \ge 0, \quad \xi_l^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k))_l \ge 0, \quad \lambda_{2l}^k(\xi_i^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k)_l)) = 0, \quad l = 1, ..., \bar{p} \\
&Z^k \succeq 0, \quad U^k \succeq 0, \quad \langle Z^k, U^k \rangle = 0
\end{aligned}
$$

となるが，これはペナルティ関数の最小化問題 (3) の KKT 条件 (5) に他ならない．

以上のことをまとめると，次の定理が得られる．

定理 3.1 ある $c_k > 0$ に対して，$(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k) = (0, 0, 0)$ が副問題 (6) の最適解ならば，(x^k, y^k, Z^k) はペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点である．逆に，(x^k, y^k, Z^k) がペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点であるならば，すべての $c_k > 0$ に対して，$(\Delta x, \Delta y, \Delta Z) = (0, 0, 0)$ は副問題 (6) の最適解である．

3.3 収束分析

この節では，アルゴリズム 3.1 によって生成される点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ が無限列であることを前提とする．この節の目的はアルゴリズム 3.1 の大域的収束性を示すことである．すなわち，任意の初期点 (x^0, y^0, Z^0) に対して $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ の集積点がペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点であることを示す．

はじめに，副問題 (6) の KKT 条件 (9) に注目すると，次のことがわかる．

$$
\lambda_{1l}^k \in [0, \alpha], \quad \lambda_{2l}^k \in [0, \alpha], \quad \mu_l^k \in [0, \alpha], \quad l = 1, ..., \bar{p}, \quad k \in N \tag{10}
$$

このことから，すべての $l = 1, ..., \bar{p}$ に対して，$\{\lambda_{1l}^k\}, \{\lambda_{2l}^k\}, \{\mu_l^k\}$ は有界であることがわかる．

補題 3.3 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ をアルゴリズム 3.1 によって生成される点列とし，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k \in K}$ をある (x^*, y^*, Z^*) に収束する部分点列で，$\{c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)\}_{k \in K} \to 0$ をみたすものとする．そのとき (x^*, y^*, Z^*) はペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点である．

証明 Z^* は半正定値対称行列なので，問題 (3) の実行可能解である．またすべての $k \in K$ に対して $c_k \ge c_{\min}$ なので，$\{c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)\}_{k \in K} \to 0$ という仮定は，$\{(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)\}_{k \in K} \to 0$ ，つまり $\Delta x^k \to 0, \Delta y^k \to 0, \Delta Z^k \to 0$ となることを意味している．さらに，連続性から $k \to \infty \quad (k \in K)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
Z^k - \beta(x^k, y^k) &\to Z^* - \beta(x^*, y^*) \\
\mathrm{svec}(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j}) &\to \mathrm{svec}(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{i,j}), \quad i = 1, ..., n \\
\mathrm{svec}(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j}) &\to \mathrm{svec}(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,j}), \quad j = 1, ..., m
\end{aligned}
$$

となるので，(7) から，添え字集合 K で定義された部分列に対して，

$$
\begin{aligned}
\xi_l^k &= |\mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\}]|_l \\
&\to |\mathrm{svec}[Z^* - \beta(x^*, y^*)]|_l =: \xi_l^*
\end{aligned}
$$

となる．さらに (9) および (10) から，一般性を失うことなく $\lambda_{1l}^* + \lambda_{2l}^* + \mu_l^* = \alpha$ を満たす $\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \mu_l^* \in [0,\alpha]$ に対して $\{\lambda_{1l}^k\}_{k\in K} \to \lambda_{1l}^*,\quad \{\lambda_{2l}^k\}_{k\in K} \to \lambda_{2l}^*,\quad \{\mu_l^k\}_{k\in K} \to \mu_l^*$ と仮定することができ，$\mathrm{svec}(U^k) = \lambda_1^k - \lambda_2^k \to \lambda_1^* - \lambda_2^* =: \mathrm{svec}(U^*)$ となるので，再び (9) を用いることにより，$k \to \infty \quad (k \in K)$ のとき，

$$c_k \Delta x^k + a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0$$

より

$$a - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

であり，また

$$c_k \Delta y^k + b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0$$

より

$$b - \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^* B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

となる．よって KKT 条件 (9) において $k \to \infty \quad (k \in K)$ の極限をとることにより，(3) を得るので，(x^*, y^*, Z^*) は問題 (3) の停留点である． ■

大域的収束性を示す前に，もう一つの重要なステップとして次の補題を証明する．

補題 3.4 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ をアルゴリズム 3.4 によって生成される点列とし，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in K}$ をある点 (x^*, y^*, Z^*) に収束する部分列とする．もし，(x^*, y^*, Z^*) がペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点でないならば，$\limsup_{k\to\infty, k\in K} c_k < \infty$ となる．

証明 $\bar{K} := \{k-1 | k \in K\}$ とすると，$\{(x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1})\}_{k\in\bar{K}} \to (x^*, y^*, Z^*)$ が成り立つので，$\limsup_{k\to\infty, k\in\bar{K}} c_{k+1} < \infty$ を示せばよい．ここで逆を仮定する．このとき，必要なら適当に部分列を考えることによって，一般性を失うことなく

$$\lim_{k\to\infty, k\in\bar{K}} c_{k+1} = \infty \tag{13}$$

とできる．**step3** の c_k の更新方法に注目すると，十分に大きいすべての $k \in \bar{K}$ に対して反復は成功していないことがわかる．なぜならば，もし k 回目の反復が成功していれば，その反復では $c_{k+1} \le c_{\max}$ となるからである．よってつぎの式が成り立つ．

$$r_k < \rho_1 \tag{14}$$

また，十分に大きいすべての $k \in \bar{K}$ では $(x^k, y^k, Z^k) = (x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1})$ となる．$\{(x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1})\}_{k\in\bar{K}} \to (x^*, y^*, Z^*)$ なので，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in\bar{K}} \to (x^*, y^*, Z^*)$ も成り立ち，反復が成功していないときは c_k が $c_{k+1} = \sigma_2 c_k$ と更新されているので，式 (13) より

$$\lim_{k\to\infty, k\in\bar{K}} c_k = \infty \tag{15}$$

を得る．ここで，$k \to \infty$, $(k \in \bar{K})$ のとき

$$r_k \to 1$$

となることを証明することにより、式 (14) に対する矛盾を導く．まず，

$$\liminf_{k\to\infty, k\in\bar{K}} c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|) > 0 \tag{16}$$

が成り立つことに注意する．なぜなら，もし $c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|) \to 0$ が成り立つなら，補題 3.3 より (x^*, y^*, Z^*) は，ペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点となり仮定に矛盾する．したがって，ある定数 $\gamma > 0$ が存在して

$$c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|) \ge \gamma \quad k \in \bar{K}$$

が成り立つ．よって補題 3.1 より十分に大きい $k \in \bar{K}$ に対して

$$\begin{aligned} P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) &\ge \frac{1}{2} c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \langle \Delta Z^k, \Delta Z^k\rangle) \\ &\ge \frac{1}{2}\gamma(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|) \end{aligned}$$

が成り立つ．

さらに，$\{\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|\}_{k\in\bar{K}} \to 0$ が成り立つことに注意する．実際，もし成り立たないとすると，式 (15) より $c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \|\Delta Z^k\|^2) \to \infty$ となるが，これは副問題 (6) の最適値がいくらでも大きくなることを意味している．しかし，明らかに実行可能な解 $(\Delta x, \Delta y, \Delta Z) := (0, 0, 0)$ がより小さい目的関数値を与えるので，矛盾である．よって $\{\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|\}_{k\in\bar{K}} \to 0$ となる．このことを考慮に入れると，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in\bar{K}} \to \{(x^*, y^*, Z^*)\}$ および，目的関数と $\beta(x, y)$ が連続で微分可能であることを用いて，$k \to \infty \quad (k \in \bar{K})$ のとき，つぎの等式が得られる．

$$|\Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) - P_\alpha(x^k + \Delta x^k, y^k + \Delta y^k, Z^k + \Delta Z^k)| = o(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)$$

以上の議論より，$k \to \infty \quad (k \in \bar{K})$ のとき，

$$\begin{aligned} |r_k - 1| &= \left| \frac{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - P_\alpha(x^k + \Delta x^k, y^k + \Delta y^k, Z^k + \Delta Z^k)}{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k) - P_\alpha(x^k + \Delta x^k, y^k + \Delta y^k, Z^k + \Delta Z^k)}{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)} \right| \\ &\le \frac{o(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)}{\frac{1}{2}\gamma(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)} \to 0 \end{aligned}$$

となるので，式 (14) に矛盾する．よって補題は証明された． ■

この補題から，次の補題が得られる．

補題 3.5 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ をアルゴリズム 3.1 によって生成される点列とする．そのとき，成功する反復は無限回である．

証明　逆を仮定すると，すべての $k \geq k_0$ に対して $r_k < \rho_1$ かつ $(x^k, y^k, Z^k) = (x^{k_0}, y^{k_0}, Z^{k_0})$ となるような $k_0 \in N$ が存在する．よって **step3** における c_k の更新方法から，$c_k \to \infty$ となる．一方 $(x^{k_0}, y^{k_0}, Z^{k_0})$ は問題 (3) の停留点ではない．なぜなら，定理 3.1 より，問題 (3) の停留点ならば，**step1** で停止するからである．よって補題 3.4 より矛盾を得る．■

アルゴリズム 3.1 の大域的収束性を証明する．

定理 3.2 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ をアルゴリズム 3.1 によって生成される点列とする．この点列の任意の集積点はペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点である．

証明　(x^*, y^*, Z^*) を任意の集積点とし，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in K}$ を (x^*, y^*, Z^*) に収束する部分列とする．反復 k が失敗したときには $(x^k, y^k, Z^k) = (x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1})$ であり，さらに補題 3.5 より，失敗する反復の数は有限なので，一般性を失うことなく，すべての反復 $k \in K$ は成功していると仮定できる．

(x^*, y^*, Z^*) が問題 (3) の停留点でないとする．このとき補題 3.4 より

$$\limsup_{k\to\infty, k\in K} c_k < \infty$$

が成り立つので，ある定数 $\gamma > 0$ に対して

$$c_k \leq \gamma \quad k \in K \tag{17}$$

となっている．また，すべての反復 $k \in K$ は成功しているので $r_k \geq \rho_1$ となり，その結果，補題 3.1 よりすべての $k \in K$ に対して以下を得る．

$$\begin{aligned} P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - P_\alpha(x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1}) &\geq \rho_1(P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_\alpha(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)) \\ &\geq \frac{1}{2}\rho_1 c_k(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \langle \Delta Z^k, \Delta Z^k\rangle) \\ &\geq \frac{1}{2}\rho_1 c_{\min}(\|\Delta x^k\|^2 + \|\Delta y^k\|^2 + \|\Delta Z^k\|^2) \end{aligned} \tag{18}$$

$\{P_\alpha(x^k, y^k, Z^k)\}$ は単調非増加で，$P_\alpha(x^*, y^*, Z^*)$ によって下に有界なので，$k \to \infty$ のとき，$P_\alpha(x^k, y^k, Z^k) - P_\alpha(x^{k+1}, y^{k+1}, Z^{k+1}) \to 0$ となり，式 (18) より，$\{(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)\}_{k\in K} \to (0, 0, 0)$ となる．また式 (17) より $\{c_k(\|\Delta x^k\| + \|\Delta y^k\| + \|\Delta Z^k\|)\}_{k\in K} \to 0$ となるので，補題 3.3 より (x^*, y^*, Z^*) は問題 (3) の停留点になり，仮定に矛盾する．よって証明された．■

3.4　実行可能性

定理 3.2 は，アルゴリズム 3.1 によって生成される点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ のすべての集積点はペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点であることを保証している．しかし，実際に求めたいのは元の問題 (1) の停留点である．元の問題 (1) の停留点を得るには，ペナルティパラメータ α の更新を行う必要がある．

この節では，以下のようにアルゴリズム 3.1 を修正した上で，その収束性を分析する．

アルゴリズム 3.2 ペナルティパラメータの更新を行う逐次線形化法

step0 $k := 0$ とし，初期値を以下のように選ぶ．

$$\alpha_0 > 0, \delta > 0, 0 < \rho_1, < \rho_2 < 1, 0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2,$$

$$c{max} \geq c_{\min} > 0, c_0 \in [c_{\min}, c{max}], x^0, y^0, Z^0 \succeq 0$$

step1 つぎの副問題の唯一の解 $\Delta x^k \in \Re^n, \Delta y^k \in \Re^m, \Delta Z^k \in S^{p\times p}$ を求める．

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x\|^2 + \|\Delta y\|^2 + \langle \Delta Z, \Delta Z\rangle) + \Phi_{\alpha_k}(x^k, \Delta x, y^k, \Delta y, Z^k, \Delta Z) \\ \text{s.t.} & Z^k + \Delta Z \succeq 0 \end{array} \quad (19)$$

step2 式 (7) によって ξ^k を計算する．もし $\xi^k = 0$ ならば“ k 回目の反復は実行可能 ”といい，**step3** へ．そうでないなら“ k 回目の反復は実行不可能 ”といい，$x^{k+1} := x^k, y^{k+1} := y^k, Z^{k+1} := Z^k, \alpha_{k+1} := \alpha_k + \delta, c_{k+1} := mid(c_{\min}, c_k, c{max}), k := k+1$ として **step1** へ．

step3 もし $\Delta x^k = 0, \Delta y^k = 0, \Delta Z^k = 0$ ならば終了．そうでないなら

$$r_k := \frac{P_{\alpha_k}(x^k, y^k, Z^k) - P_{\alpha_k}(x^k + \Delta x^k, y^k + \Delta y^k, Z^k + \Delta Z^k)}{P_{\alpha_k}(x^k, y^k, Z^k) - \Phi_{\alpha_k}(x^k, \Delta x^k, y^k, \Delta y^k, Z^k, \Delta Z^k)}$$

を計算し，$r_k \geq \rho_1$ ならば，“ k 回目の反復は成功 ”といい，$x^{k+1} := x^k + \Delta x^k, y^{k+1} := y^k + \Delta y^k, Z^{k+1} := Z^k + \Delta Z^k$ とする．そうでないなら“ k 回目の反復は失敗 ”といい，$x^{k+1} := x^k, y^{k+1} := y^k, Z^{k+1} := Z^k$ とする．

step4 c_k を次のように更新する．

$$\begin{cases} c_{k+1} := \sigma_2 c_k, & \textit{if} \quad r_k < \rho_1 \\ c_{k+1} := mid(c_{\min}, c_k, c{max}), & \textit{if} \quad r_k \in [\rho_1, \rho_2), \\ c_{k+1} := mid(c_{\min}, \sigma_1 c_k, c_{\max}), & \textit{if} \quad r_k \geq \rho_2. \end{cases}$$

step5 $\alpha_{k+1} := \alpha_k, k := k+1$ として **step1** へ．

3.2 節で証明された結果は，アルゴリズム 3.1 におけるペナルティパラメータ α を単に α_k に置き換えることにより，アルゴリズム 3.2 に対しても成り立つ．

アルゴリズム 3.2 の大域的収束性を示すために，次の仮定を行う．

仮定 1: アルゴリズム 3.2 によって生成される点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ は有界である．

仮定 2: アルゴリズム 3.2 によって生成される点列 $\{c_k(\Delta x^k + \Delta y^k + \Delta Z^k)\}$ は有界である．

仮定 3: アルゴリズム 3.2 によって生成される点列 $\{(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k)\}$ は $(0,0,0)$ に収束する．

仮定 4: $\{(x^*, y^*, Z^*)\}$ の任意の集積点 (x^*, y^*, Z^*) に対して，以下の式を満たす $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, U^*) \in \Re^n \times \Re^m \times S^{p\times p}$ は $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, U^*) = (0,0,0)$ のみである．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^* B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathrm{svec}(U^*)^T\mathrm{svec}(B_{0,1}+\sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,1}) \\
\mathrm{svec}(U^*)^T\mathrm{svec}(B_{0,2}+\sum_{i=1}^n x_i^* B_{i,2}) \\
\vdots \\
\mathrm{svec}(U^*)^T\mathrm{svec}(B_{0,n}+\sum_{i=1}^n x_j^* B_{i,m})
\end{pmatrix} = 0 \tag{20}
$$

$$
\lambda_1^* - \lambda_2^* - \mathrm{svec}(U^*) = 0
$$

$$
\lambda_1^* \geq 0, \quad \lambda_2^* \geq 0, \quad U^* \succeq 0, \quad \langle Z^*, U^* \rangle = 0
$$

仮定１は標準的である．仮定２および仮定３は，例えば点列 $\{c_k(\Delta x^k + \Delta y^k + \Delta Z^k)\}$ が０に収束するような場合に成り立つが，これらはやや制限された仮定である．仮定４は Mangasarian-Fromovitz 制約想定の BMI 最適化問題への拡張に対応している．まず，これらの仮定のもとで，実行可能でない反復は有限回しか起こらないことを示す.

命題 3.1 仮定１ –４が成り立つとき，実行不可能な反復は有限回である.

証明　証明のために，問題 (8) のラグランジュ関数を定義する.

$$
\begin{aligned}
&L_k(\Delta x, \Delta y, \Delta Z, \xi, \lambda_1, \lambda_2, \mu, U) \\
&:= \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x\|^2 + \|\Delta y\|^2 + \langle \Delta Z, \Delta Z \rangle) + a^T x^k + b^T y^k + a^T \Delta x + b^T \Delta y + \alpha_k \sum_{l=1}^{\bar{p}} \xi_l - \alpha_k \sum_{l=1}^{\bar{p}} \mu_l \xi_l \\
&-\alpha_k \sum_{l=1}^{\bar{p}} \lambda_{1l} \left[\xi_l - \mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j\}]_l \right] \\
&-\alpha_k \sum_{l=1}^{\bar{p}} \lambda_{2l} \left[\xi_l + \mathrm{svec}[Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j\}]_l \right] \\
&-\langle Z^k + \Delta Z, U \rangle
\end{aligned}
$$

ここで，７項目，８項目，９項目において，ラグランジュ乗数の $\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \mu_l$ それぞれに α_k がかかっていることに注意する．つぎの KKT 条件を満たすラグランジュ乗数 $(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \mu^k, U^k) \in \Re\bar{p} \times \Re\bar{p} \times \Re\bar{p} \times S^{p\times p}$ が存在することが $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta Z^k, \xi^k)$ が問題 (8) の最適解であるための必要十分条件である.

$$
c_k \Delta x^k + a - \begin{pmatrix}
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{1,0}+\sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{2,0}+\sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\
\vdots \\
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{n,0}+\sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j})
\end{pmatrix} = 0
$$

$$
c_k \Delta y^k + b - \begin{pmatrix}
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,1}+\sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,2}+\sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\
\vdots \\
\mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,n}+\sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m})
\end{pmatrix} = 0
$$

$$
\alpha_k \lambda_1^k - \alpha_k \lambda_2^k - \mathrm{svec}(U^k) = 0
$$

$$
1 - \mu_l^k - \lambda_{1l}^k - \lambda_{2l}^k = 0 \quad l = 1, ..., \bar{p} \tag{21}
$$

$$
\xi_l^k \geq 0, \quad \mu_l^k \geq 0, \quad \xi_l^k \mu_l^k = 0, l = 1, ..., \bar{p}
$$

$\lambda_{1l}^k \geq 0, \quad l=1,...,\bar{p}$

$\xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k,y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l \geq 0,$

$l=1,...,\bar{p}$

$\lambda_{1l}^k(\xi_l^k - \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k,y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l = 0,$

$l=1,...,\bar{p}$

$\lambda_{2l}^k \geq 0, \quad l=1,...,\bar{p}$

$\xi_l^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k,y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l \geq 0,$

$l=1,...,\bar{p}$

$\lambda_{2l}^k(\xi_i^k + \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k,y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l) = 0,$

$l=1,...,\bar{p}$

$Z^k + \Delta Z^k \succeq 0, \quad U^k \succeq 0, \quad \langle Z^k + \Delta Z^k, U^k\rangle = 0$

背理法によって定理の証明を行う．ここで，すべての $k \in K$ に対して $\xi^k \neq 0$ であるような，無限回の反復 $k \in K$ が存在すると仮定する．そのとき，それぞれの $k \in K$ に対して，$\xi_{l_k}^k > 0$ であるような添え字 l_k が存在する．よって，必要ならば並び替えることで，一般性を失うことなくすべての $k \in K$ に対して，k とは独立なある添え字 $h \in \{1,...,\bar{p}\}$ を用いて，$l_k \equiv h$ とすることができる．そのとき，(21) より

$$0 = (1 - \mu_h^k - \lambda_{1h}^k - \lambda_{2h}^k)\xi_h^k = (1 - \lambda_{1h}^k - \lambda_{2h}^k)\xi_h^k$$

となるので，すべての $k \in K$ に対して $\lambda_{1h}^k + \lambda_{2h}^k = 1$ となる．よって，すべての $k \in N$ およびすべての $l \in \{1,...,\bar{p}\}$ に対して $\lambda_{1l}^k, \lambda_{2l}^k \in [0,1]$ であり，またあるベクトル $\lambda_1^* \geq 0$ および $\lambda_2^* \geq 0$ に対して，$\{\lambda_1^k\}_{k\in K} \to \lambda_1^*, \{\lambda_2^k\}_{k\in K} \to \lambda_2^*$ となることを仮定しているので，ある特定の添え字 j に対して $\lambda_{1j}^* + \lambda_{2j}^* = 1$ が成り立つ．

(21) の 1 番目，2 番目，3 番目の等式を α_k で割ることにより，以下の式を得る．

$$\frac{1}{\alpha_k}(c_k\Delta x^k + a) - \frac{1}{\alpha_k}\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{1}{\alpha_k}(c_k\Delta y^k + b) - \frac{1}{\alpha_k}\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1} \\ \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2} \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T\mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0 \qquad (23)$$

$$\lambda_1^k - \lambda_2^k - \frac{1}{\alpha_k}\mathrm{svec}(U^k) = 0 \qquad (24)$$

(x^*, y^*, Z^*) を部分列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in K}$ の集積点とし，一般性を失うことなく $\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k\in K} \to (x^*, y^*, Z^*)$ と仮定する．式 (24) から，$k \to \infty \quad (k \in K)$ のとき，ある $U^* \succeq 0$ に対して

$$\frac{1}{\alpha_k}U^k \to U^*$$

となる．さらに，**step2** の α_k の更新方法とすべての $k \in K$ に対して $\xi^k \neq 0$ となることから $\{\alpha_k\} \to \infty$ となるので，仮定 1 および仮定 2 から，$k \in K$ に対して $k \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{\alpha_k}(c_k \Delta x^k + a) - \frac{1}{\alpha_k}\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\alpha_k}(c_k \Delta y^k + b) - \frac{1}{\alpha_k}\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^k)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix}$$

となる．よって，以下を得る．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{2,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{2,j}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,1}) \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,2} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{svec}(U^*)^T \mathrm{svec}(B_{0,n} + \sum_{i=1}^n x_j^k B_{i,m}) \end{pmatrix} = 0$$

また，仮定 3 と (21) の最後の等式から次を得る．

$$0 = \frac{1}{\alpha_k}\langle Z^k + \Delta Z^k, U^k \rangle = \langle Z^*, U^* \rangle$$

さらに，$\mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l \neq 0$ を満たすすべての $l \in 1, ..., \bar{p}$ に対して $\lambda_{1l}^* = 0, \quad \lambda_{2l}^* = 0$ なので，$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, U^*)$ は式 (20) を満たす．よって，仮定 4 より $\lambda_1^* = 0, \quad \lambda_2^* = 0$ となるので，$\lambda_{1h}^* + \lambda_{2h}^* = 1$ と矛盾する． ■

命題 3.1 より以下の系を得る．

系 3.1 仮定 1 –4 のもとで以下が成り立つ．

(a) ペナルティパラメータの列 $\{\alpha_k\}$ は最終的には一定になる．

(b) $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ の任意の集積点 (x^*, y^*, Z^*) は元の問題 (1) の実行可能解である．

証明 (a) は命題 3.1 と **step2** の更新方法からすぐにわかる．よって (b) を証明する．(x^*, y^*, Z^*) を点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ の集積点とし，$\{(x^k, y^k, Z^k)\}_{k \in K}$ を (x^*, y^*, Z^*) に収束する部分列とする．命題 3.1 から，十分に大きいすべての $k \in N$ に対して

$$0 = \xi_l^k \geq \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l,$$

$$0 = \xi_l^k \geq -\mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k) + \Delta Z^k - \sum_{i=1}^n \{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{i,j})\Delta x_i^k\} - \sum_{j=1}^m \{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^n x_i^k B_{i,j})\Delta y_j^k\})_l,$$

$l = 1, ..., \bar{p}$

が成り立ち，仮定 3 から，この不等式の極限をとることにより，

$$\mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l \leq 0, \quad l = 1, ..., \bar{p},$$
$$\mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*))_l \geq 0, \quad l = 1, ..., \bar{p},$$

すなわち

$$\mathrm{svec}(Z^* - \beta(x^*, y^*)) = 0$$

が成り立つ．さらにすべての $k \in N$ に対して $Z^k \succeq 0$ であるから $Z^* \succeq 0$ となる．よって (x^*, y^*, Z^*) は元の問題 (1) の実行可能解である． ■

系 3.1 より，仮定 1 – 4 のもとで，アルゴリズム 3.2 は反復が十分に進んだときアルゴリズム 3.1 と同様に振る舞うことがわかる．このことから，次の大域的収束性がいえる．

定理 3.3 仮定 1 – 4 のもとでアルゴリズム 3.2 が生成する点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ の任意の集積点 (x^*, y^*, Z^*) は元の問題 (1) の停留点である．

証明 点列 $\{\alpha_k\}$ は最終的には一定になるので，アルゴリズム 3.1 に対する定理 3.2 から，点列 $\{(x^k, y^k, Z^k)\}$ のどの集積点 (x^*, y^*, Z^*) もペナルティ関数の最小化問題 (3) の停留点である．よって (5) を満たすラグランジュ乗数 $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \mu^*, U^*) \in \Re^{\bar{p}} \times \Re^{\bar{p}} \times \Re^{\bar{p}} \times S^{p \times p}$ およびあるベクトル $\xi^* \in \Re^{\bar{p}}$ が存在する．さらに命題 3.1 より $\xi^* = 0$ となり，(5) は元の問題 (1) の KKT 条件 (2) となる． ■

4 数値実験

この節ではアルゴリズム 3.2 を用いて行った数値実験の結果を報告し，考察を与える．

4.1 実験方法

アルゴリズム 3.2 のパラメータを以下のように設定した．

$$\alpha_0 = 100, \quad \delta = 500, \quad \rho_1 = 0.1, \quad \rho_2 = 0.75,$$
$$\sigma_1 = 0.5, \quad \sigma_2 = 2, \quad c_0 = 1, \quad c_{\min} = 0.001, \quad c_{\max} = 1000$$

テスト問題は以下のようにランダムに生成した．BMI 最適化問題を生成する際は，$B_{ij} \in S^{p \times p}$ を，まず成分を $[-1, 1]$ の範囲でランダムに選んだ $A \in S^{p \times p}$ を用いて $B_{00} = A^T A$ とし，それ以外はそれぞれの成分を $[-1, 1]$ の範囲でランダムに選んだ．そして $a \in \Re^n, b \in \Re^m$ のそれぞれの成分を $[0, 1]$ の範囲でランダムに選んだ．BMI 固有値問題を生成する際は，$B_{ij} \in S^{p \times p}$ のそれぞれの成分を $[-1, 1]$ の範囲でランダムに選んだ．

また，**step2** において $\|\xi^k\|_\infty < 10^{-8}$ を満たしたときに，その反復は成功しているとみなし，さらに **step3** において $\max(\|\Delta x^k\|_\infty, \|\Delta y^k\|_\infty, \|\Delta Z^k\|_\infty) < 10^{-4}$ を満たしたとき，または反復回数が 100 回を越えるかペナルティパラメータが $\alpha_k > 10^4$ を満たしたときに計算を終了することとした．また，BMI 固有値問題を解く際は最適値が -10^{-4} 以下となった時点で実行可能性が示されたと見て，終了することとした．

r_k の分子を計算する際，$P_\alpha(x^k, y^k, Z^k)$ を

$$\max_{l=0,1,\ldots,10}(P_\alpha(x^{k-l}, y^{k-l}, Z^{k-l}))$$

とした．これは厳密にペナルティ関数を単調に減少させるのではなく，関数値の増加をある程度許す操作であるが，この操作を行っても大域的収束性は変わらないことが知られている [**?**].

また，同じテスト問題を以下のような準最適化を行うアルゴリズム [12] を用いて解くことにより比較を行った．

アルゴリズム 4.1 準最適化

step0 $k=0$ とし，初期点 (x^0, y^0) を与える．

step1 次の問題の最適解 x^{k+1} を求める．

$$\begin{array}{ll} \min & a^T x \\ \text{s.t.} & \beta(x, y^k) \succeq 0 \end{array}$$

step2 次の問題の最適解 y^{k+1} を求める．

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & \beta(x^{k+1}, y) \succeq 0 \end{array}$$

step3 $\|x^{k+1}-x^k\|=0, \|y^{k+1}-y^k\|=0$ ならば終了．そうでないなら，**step1** へ．

数値実験において，このアルゴリズムの終了条件は $\|x^{k+1}-x^k\|<10^{-8}, \|y^{k+1}-y^k\|<10^{-8}$ とした．また，最大反復回数を 500 回とした．

4.2 実験結果

本実験は，CPU が 3.06GHz の Pentium4，メモリーが 2GB の計算機上で，turbolinux8 の環境のもと MATLAB6.5 を用いて行った．また，逐次線形化法の副問題を解くにあたっては SDPT3-Solver(Version 3.0) [6] を用いた．また，副問題の二次錐制約付き線形半正定値計画問題への変換の詳細は付録 A に示した．

実験で用いるテスト問題は 4.1 節で述べた方法で生成した BMI 最適化問題を 5 種類用意した．それらを問題例１，問題例２，問題例３，問題例４，問題例５とする．各問題例に対して，逐次線形化法と準最適化のアルゴリズムを適用した．どちらの場合も，$x^0=0$，$y^0=0$ とし $Z^0 \in S^{p\times p}$ を単位行列としたものを初期点とした．実験で使用した問題例のパラメータとその結果のグラフの対応を表１に，各問題例に対して逐次線形化法によって得られた解に対する目的関数値，実行時間 (単位は秒)，得られた解に対する $\beta(x_k, y_k)$ の最小固有値，ペナルティ関数値，反復回数を表２に示す．また，各問題例に対して準線形化によって得られた解に対する目的関数値，実行時間 (単位は秒)，得られた解に対する $\beta(x_k, y_k)$ の最小固有値を表３に示す．準最適化の欄に $*$ がついているものは，最大反復回数をこえても終了条件が満たされなかったものである．逐次線形化法によって得られた結果に対して，$\max(\log_{10}\|\Delta x^k\|_\infty, \log_{10}\|\Delta y^k\|_\infty, \log_{10}\|\Delta Z^k\|_\infty)$,$c_k$,$\alpha_k$ を縦軸にとり，反復回数を横軸にとったグラフを付録 B に示す．

表 1: 実験に用いた問題例

問題例	p	n	m	グラフ
1	6	2	2	図 1
2	10	4	4	図 2
3	10	4	4	図 3
4	15	6	6	図 4
5	15	6	6	図 5

表 2: 実験結果 (逐次線形化法)

問題例	目的関数値	ペナルティ関数値	最小固有値	実行時間	反復回数
1	-3.6856	-3.6856	-0.0000	10.0400	12
2	-0.8296	-0.8296	0.0000	24.3300	13
3	-1.6514	-1.6514	0.0000	64.4900	26
4	1.5838	-1.5838	0.0000	160.5700	18
5	-1.3513	-1.3513	0.0000	195.3800	22

表 3: 実験結果 (準最適化)

問題例	最小固有値	目的関数値	実行時間
1	-0.0000	-3.6168	12.5600
2	0.0000	-0.7290*	243.8400*
3	0.0000	-1.6031*	243.3400*
4	-0.0000	-1.0837*	573.4600*
5	0.0000	-0.7992*	557.9500*

4.3 考察

表２，表３を見ると，逐次線形化法によって得られた目的関数値は，ペナルティ関数値と十分近くなり，準最適化で得られた目的関数値と比べ総じてよりよい値となっていることが確認できる．さらに，得られた解の実行可能性も近似的にみたされていることも確認できる．また，逐次線形化法の反復回数は問題によってやや上下はするものの，全体として問題の規模が大きくなると大きくなる傾向があり，実行時間は問題の規模が大きくなると長くなっていることがわかる．準最適化では問題例２–５において 500 回反復を行っても終了条件が満たされていないので，実行時間の単純な比較は行えないが，一回の反復にかかる時間は準最適化の方が短い．これは，逐次線形化法の場合，付録 A に示したように副問題を変換する際に，スラック変数などの変数を新たに導入しているため，変数の数が増えているためであると思われる．

図１–５を見ると，逐次線形化法は一次収束性に似た挙動を示している．これは逐次線形化法において，実装の簡便さを考慮して，ヘッセ行列を用いた二次近似を行っていないことからも推測される．また，解に近くなると c_k が小さくなっていくことが確認できる．

BMI 最適化問題に逐次線形化法を適用する際には，規模が大きくなると反復回数，実行時間ともに大きくなることに留意する必要がある．

5 結論

本研究では，非線形半正定値計画問題のクラスに属する BMI 最適化問題に対して，逐次線形化法を適用し，数値実験を行った．数値実験から，逐次線形化法は準最適化と比較してよりよい解が得られることを確認し，一次収束に似た振る舞いを示すこともわかった．しかし，実用規模の問題に対して実用的な時間で求解できるとはまだいえず，双線形性をより有効に活用するなど今後の研究の余地は大きい．

謝辞

日頃から御教授下さり, 本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を賜った福島雅夫教授に深く感謝の意を表します. また日頃からお世話になっている滝根哲哉助教授ならびに山下信雄助手, また福島研究室の皆様に厚く御礼申し上げます. 末筆ながら, BMI 最適化問題について貴重な情報を提供していただいた藤岡久也助教授に深く感謝の意を表します.

参考文献

[1] 藤岡久也, 若佐裕治: 制御系設計と BMI. 第十回 RAMP シンポジウム論文集, 1998, pp.81-94.

[2] C. Kanzow, C. Nagel and M. Fukushima: *Succesive linearization methods for nonlinear semidefinite programs.* Technical Report 2003-11, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2003.

[3] 藤岡久也, 岩崎徹也: BMI:非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦. 計測と制御 Vol.36 1997,pp.762-767.

[4] H. Fujioka, Y. Wakasa and Y. Yamamoto: *Optimization in control system design.* Journal of the Operation Research Society of Japan Vol.43, 2000, pp.48-70.

[5] R. H. Tütüncü, K. C. Toh and M. J. Todd: *Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3.* Mathematical Programming Vol.95, 2003, pp.189-217.

[6] K. C. Toh, R. H. Tütüncü and M. J. Todd: *SDPT3 version 3.02 - a MATLAB software for semidefinite-quadratic-linear programming.* updated in December 2002, http://www.math.nus. edu.sg/ mattohkc/sdpt3.html

[7] F. Alizadeh and D. Goldfarb: *Second-order cone programming.* Mathmatical Programming Vol.95, 2003, pp.3-51.

[8] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret: *Applications of second-order cone programming.* Linear Algebra and Its Applications, Vol.284, 1998, pp.193-228.

[9] L. Vandenberghe and S. Boyd: *Semidefinite programming.* SIAM Review Vol.38 , 1996, pp.49-95.

[10] M. J. Todd: *Semidefinite optimization.* Acta Numerica Vol.10, 2001, pp.515-560.

[11] R. Correa and H. Ramirez: *A global algorithm for nonlinear semidefinite programming.* Reserch Report 4672, INRIA, Le Chesnay Cedex France, 2002.

[12] K. C. Goh, L.Turan, M.G.Safonov, G.P.Papavassilopoulos, J.H.Ly: *Biaffine matrix inequality properties and Computational Methods.* American Control Conference, 1994, pp.850-855.

付録

A　副問題の変形

BMI 最適化問題 (1) にアルゴリズム 3.2 を適用する際には，つぎのような副問題を扱う必要がある．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x\|^2+\|\Delta y\|^2+\langle \Delta Z,\Delta Z\rangle)+a^T(x^k+\Delta x)+b^T(y^k+\Delta y)\\
& +\alpha_k\sum_{l=1}^{\bar{p}}\left|\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\right|\\
\text{s.t.} \quad & Z^k+\Delta Z\succeq 0,\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m
\end{aligned}
\tag{25}
$$

計算実験では，この問題を解くために SDPT3 solver(version 3.0)[6] を使った．このソフトウェアは次のような形をした，錐制約付きの線形半正定値計画問題を解くことができる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n_s}\langle C_j^s,X_j^s\rangle+\sum_{i=1}^{n_q}(c_j^q)^Tx_j^q+(c^l)^Tx^l\\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n_s}(A_j^s)^T\mathrm{svec}(X_j^s)+\sum_{i=1}^{n_q}(A_j^q)^Tx_j^q+(A^l)^Tx^l=b\\
& x_j^s\in S_+^{s_j\times s_j}\quad\forall j,\qquad x_i^q\in K_q^{q_j}\quad\forall i,\qquad x^l\in\Re_+^{n_l}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

C_j^s, X_j^s は s_j 次元対称行列であり c_i^q, x_i^q は q_i 次元ベクトルである．また，$S_+^{s_j\times s_j}$ は $S_+^{s_j\times s_j}:=\{X\in S_+^{s_j\times s_j}\ :\ X\succeq 0\}$ で定義される s_j 次元半正定値錐，$K_q^{q_i}$ は $K_q^{q_i}:=\{x=(x_1,x_{2:q_i}^T)^T\in\Re^{q_i}\ :\ x_1\geq\|x_{2:q_i}\|\}$ で表される q_i 次元の二次錐であり，c^l, x^l は n_l 次元ベクトルである．さらに A_j^s は $\bar{s_j}\times m$ 行列 (ただし $\bar{s_j}=s_j(s_j+1)/2$) であり，A_i^q, A^l はそれぞれ $q_i\times m, l\times m$ 行列である．

ここで副問題 (25) を (26) の形に変形したい．以下ではその変形を順序をおって示す．

まず，$a^Tx^k+b^Ty^k$ はこの副問題においては定数なので省略する．次に $S\in S^{p\times p}$ という補助変数を導入して $Z^k+\Delta Z=S$ とする．また，ΔZ は半正定値である必要はなく，対称行列であればよいので，$\Delta z=\mathrm{svec}(\Delta Z)$ で置き換える．その結果，問題 (25) は以下の問題と等価になる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}c_k(\|\Delta x\|^2+\|\Delta y\|^2+\|\Delta z\|^2)+a^T\Delta x+b^T\Delta y\\
& +\alpha_k\sum_{l=1}^{\bar{p}}\left|\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\right|\\
\text{s.t.} \quad & \mathrm{svec}(Z^k)+\Delta z=\mathrm{svec}(S)\\
& \Delta z\in\Re^{\bar{p}},\ S\succeq 0,\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m
\end{aligned}
\tag{27}
$$

次に，$\|\Delta z\|\leq t_1, \|\Delta x\|\leq t_2, \|\Delta y\|\leq t_3$ という二次錐制約を導入することで問題 (27) は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}c_k(t_1^2+t_2^2+t_2^2)+a^T\Delta x+b^T\Delta y\\
& +\alpha_k\sum_{l=1}^{\bar{p}}\left|\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\right|\\
\text{s.t.} \quad & \mathrm{svec}(Z^k)+\Delta z=\mathrm{svec}(S),\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m,\ \|\Delta z\|\leq t_1,\ \|\Delta x\|\leq t_2,\ \|\Delta y\|\leq t_3\\
& \Delta z\in\Re^{\bar{p}},\ S\succeq 0,\ t_1\in\Re,\ t_2\in\Re,\ t_3\in\Re
\end{aligned}
\tag{28}
$$

ここで，二次の項になっているので，t_θ^2 を非負変数 s_θ で置き換え，$t_\theta^2 \leq s_\theta$ という制約を加える．また，この制約は次のような半正定値制約に書き換えることができる．

$$\begin{pmatrix} s_\theta & t_\theta \\ t_\theta & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

さらに W_θ という補助変数を導入することで，問題 (28) は以下のように書き換えられる．

$$\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{1}{2}c_k(s_1+s_2+s_2)+a^T\Delta x+b^T\Delta y \\
& +\alpha_k \displaystyle\sum_{l=1}^{\bar{p}}\left|\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\right| \\
\mathrm{s.t.} & \Delta z-\mathrm{svec}(S)=-\mathrm{svec}(Z^k),\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m,\ \|\Delta z\|\leq t_1,\ \|\Delta x\|\leq t_2,\ \|\Delta y\|\leq t_3 \\
& \begin{pmatrix} s_\theta & t_\theta \\ t_\theta & 1 \end{pmatrix}-W_\theta=0,\ \theta=1,2,3 \\
& \Delta z\in\Re^{\bar{p}},\ S\succeq 0,\ W_\theta\succeq 0,\ t_\theta\in\Re,\ s_\theta\in\Re_+\ (\theta=1,2,3)
\end{array} \tag{29}$$

ここで，目的関数の絶対値の項を ξ_l で置き換えることによって，問題 (29) は次のようになる．

$$\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{1}{2}c_k(s_1+s_2+s_3)+a^T\Delta x+b^T\Delta y+\alpha\displaystyle\sum_{l=1}^{\bar{p}}\xi_l \\
\mathrm{s.t.} & \Delta z-\mathrm{svec}(S)=-\mathrm{svec}(Z^k),\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m,\ \|\Delta z\|\leq t_1,\ \|\Delta x\|\leq t_2,\ \|\Delta y\|\leq t_3 \\
& \begin{pmatrix} s_\theta & t_\theta \\ t_\theta & 1 \end{pmatrix}-W_\theta=0,\ \theta=1,2,3 \\
& \xi_l-\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\geq 0 \\
& \xi_l+\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l\geq 0 \\
& \Delta z\in\Re^{\bar{p}},\ S\succeq 0,\ W_\theta\succeq 0,\ t_\theta\in\Re,\ s_\theta\in\Re_+\ (\theta=1,2,3),\ \xi=(\xi_1,...,\xi_{\bar{p}})^T\in\Re_+^{\bar{p}}
\end{array} \tag{30}$$

最後にスラック変数 $v_l,\quad w_l,\quad l=1,...,\bar{p}$ を用いて不等式制約を等式制約に変換し，

$$\begin{pmatrix} s_\theta & t_\theta \\ t_\theta & 1 \end{pmatrix}-W_\theta=0$$

を svec を用いて書き換える．

$$\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{1}{2}c_k(s_1+s_2+s_3)+a^T\Delta x+b^T\Delta y+\alpha\displaystyle\sum_{l=1}^{\bar{p}}\xi_l \\
\mathrm{s.t.} & \Delta z-\mathrm{svec}(S)=-\mathrm{svec}(Z^k),\ \Delta x\in\Re^n,\ \Delta y\in\Re^m,\ \|\Delta z\|\leq t_1,\ \|\Delta x\|\leq t_2,\ \|\Delta y\|\leq t_3 \\
& \begin{pmatrix} s_\theta \\ \sqrt{2}t_\theta \\ 1 \end{pmatrix}-\mathrm{svec}(W_\theta)=0,\ \theta=1,2,3 \\
& \xi_l-\mathrm{svec}\left[Z^k-\beta(x^k,y^k)+\Delta Z-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0}+\sum_{j=1}^{m}y_j^kB_{i,j})\Delta x_i\}-\sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}x_i^kB_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l-v_l=0
\end{array} \tag{31}$$

$$\xi_l + \mathrm{svec}\left[Z^k - \beta(x^k,y^k) + \Delta Z - \sum_{i=1}^{n}\{(B_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} y_j^k B_{i,j})\Delta x_i\} - \sum_{j=1}^{m}\{(B_{0,j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^k B_{i,j})\Delta y_j\}\right]_l - w_l = 0$$

$$\Delta z \in \Re^{\bar{p}},\ S \succeq 0,\ W_\theta \succeq 0,\ t_\theta \in \Re,\ s_\theta \in \Re_+\ (\theta = 1,2,3),$$

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_{\bar{p}})^T \in \Re^{\bar{p}}_+,\ v = (v_1, ..., v_{\bar{p}})^T \in \Re^{\bar{p}}_+,\ w = (w_1, ..., w_{\bar{p}})^T \in \Re^{\bar{p}}_+$$

問題 (31) は SDPT3 の標準型 (26) に対応している．実際，問題のパラメータは，

$$n_s := 4,\ n_q; = 3,\ s_1 := p,\ s_2 = s_3 = s_4 := 2,\ q_1 := 1 + \bar{p},\ q_2 := 1 + n,\ q_3 := 1 + m, l := 3 + 3\bar{p}$$

となり，変数は

$$\begin{aligned}
X_1^s &:= S \in S_+^{p\times p}\\
X_2^s &:= W_1 \in S_+^{2\times 2}\\
X_3^s &:= W_2 \in S_+^{2\times 2}\\
X_4^s &:= W_3 \in S_+^{2\times 2}\\
x_1^q &:= (t_1, \Delta z^T)^T \in K_q^{1+\bar{p}}\\
x_2^q &:= (t_2, \Delta x^T)^T \in K_q^{1+n}\\
x_3^q &:= (t_3, \Delta y^T)^T \in K_q^{1+m}\\
x^l &:= (s_1, s_2, s_3, \xi^T, v^T, w^T) \in \Re^{3+3\bar{p}}
\end{aligned}$$

となる．目的関数における入力データは

$$\begin{aligned}
C_1^s &:= 0 \in S_+^{p\times p}\\
C_2^s = C_3^s = C_4^s &:= 0 \in S_+^{2\times 2}\\
c_1^q &:= 0 \in \Re^{1+\bar{p}}\\
c_2^q &:= (0, a^T)^T \in \Re^{1+n}\\
c_3^q &:= (0, b^T)^T \in \Re^{1+m}\\
c^l &:= (\frac{1}{2}c_k, \frac{1}{2}c_k, \frac{1}{2}c_k, \alpha_k e^T, 0, 0)^T \in \Re^{3+3\bar{p}}
\end{aligned}$$

となる．ただし $e = (1, ..., 1)^T \in \Re^{\bar{p}}$ である．

最後に，行列 $A_1^s \in \Re^{\bar{p}\times(9+3\bar{p})}$, $A_2^s, A_3^s, A_4^s \in \Re^{3\times(9+3\bar{p})}$, $A_1^q \in \Re^{(1+\bar{p})\times(9+3\bar{p})}$, $A_2^q \in \Re^{(1+n)\times(9+3\bar{p})}$, $A_3^q \in \Re^{(1+m)\times(9+3\bar{p})}$, $A^l \in \Re^{(3+3\bar{p})\times(9+3\bar{p})}$ およびベクトル $b \in \Re^{9+3\bar{p}}$ は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}
A_1^s &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\\
A_2^s &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\\
A_3^s &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\\
A_4^s &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \end{array}\right)\\
A_1^q &= \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|c}
0\cdots 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0\\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
I & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -I & I\\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$A_2^q = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|c}
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \hline
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j})^T & -\mathrm{svec}(B_{1,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{1,j})^T \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j})^T & -\mathrm{svec}(B_{n,0} + \sum_{j=1}^m y_j^k B_{n,j})^T
\end{array}\right)$$

$$A_3^q = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|c}
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \hline
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{svec}(B_{0,1} + \sum_{i=1}^m x_i^k B_{i,1})^T & -\mathrm{svec}(B_{,10} + \sum_{i=1}^m x_i^k B_{i,1})^T \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{svec}(B_{0,m} + \sum_{i=1}^m x_i^k B_{i,n})^T & -\mathrm{svec}(B_{0,m} + \sum_{i=1}^m x_i^k B_{i,n})^T
\end{array}\right)$$

$$A^l = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|c}
0\cdots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \hline
0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & I & I \\ \hline
0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & -I & 0 \\ \hline
0 & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 & -I
\end{array}\right)$$

$$b = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|c}
-\mathrm{svec}(Z^k)^T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k))^T & -\mathrm{svec}(Z^k - \beta(x^k, y^k))^T
\end{array}\right)$$

B 実験結果のグラフによる表示

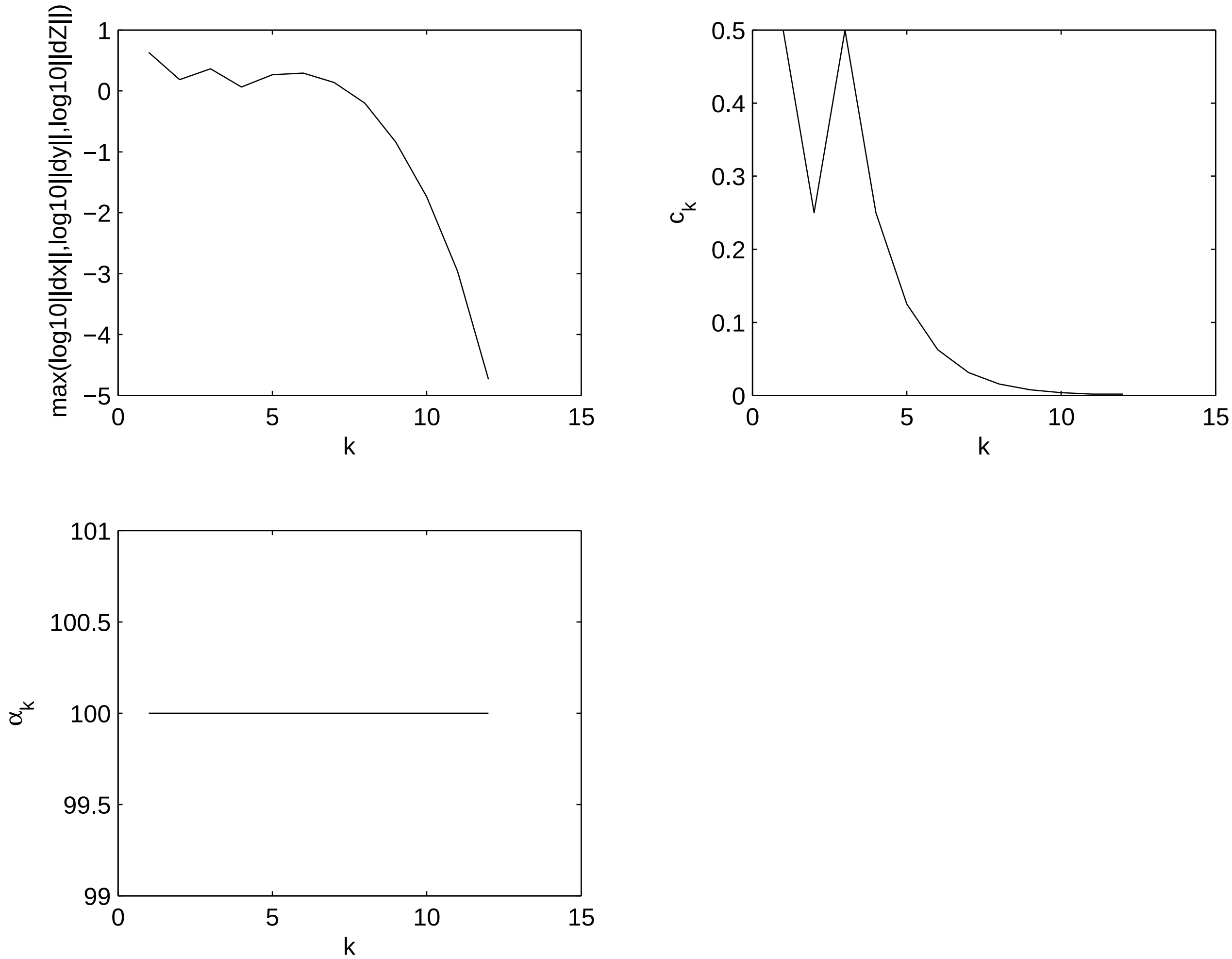

図 1: 問題例 1

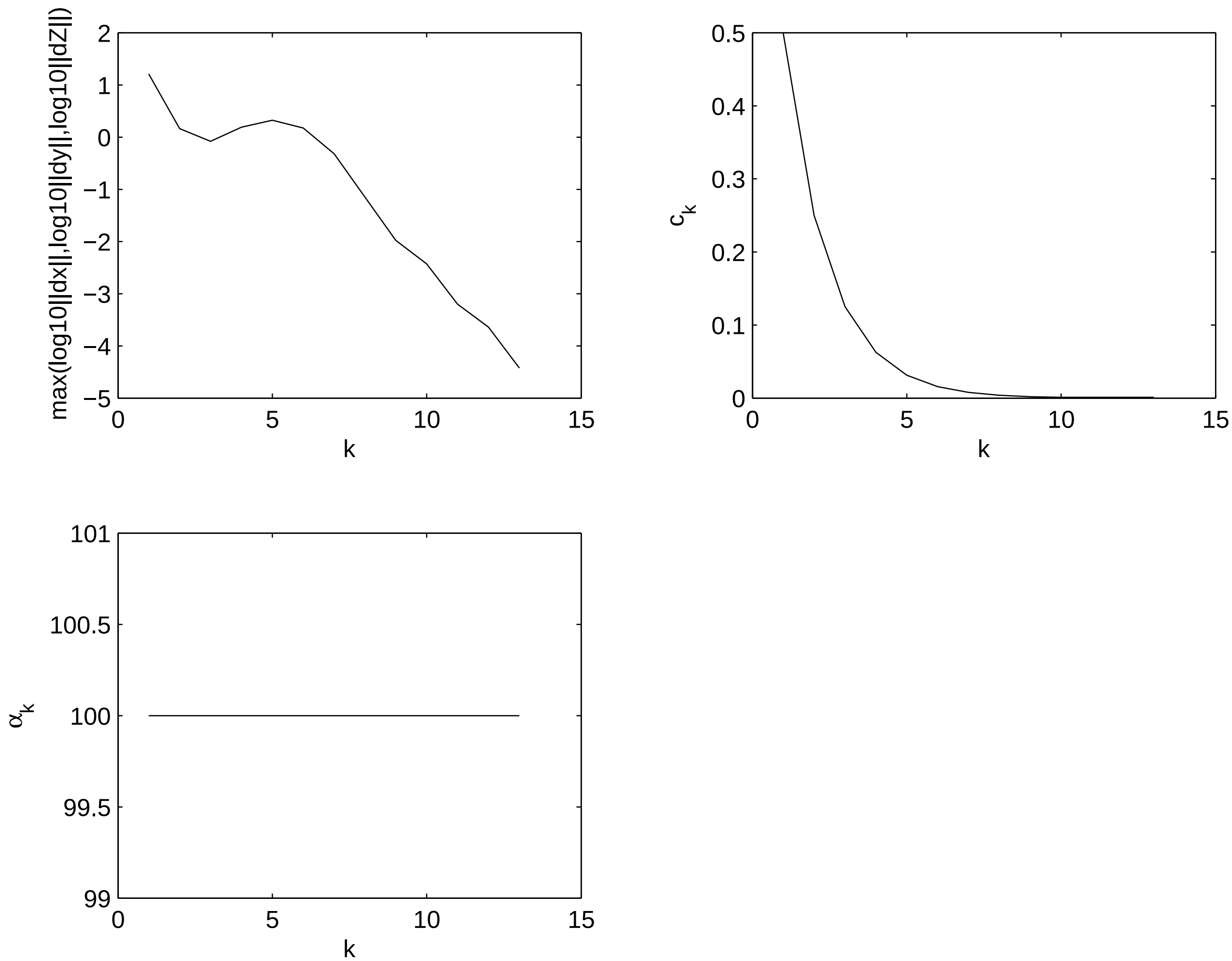

図 2: 問題例 2

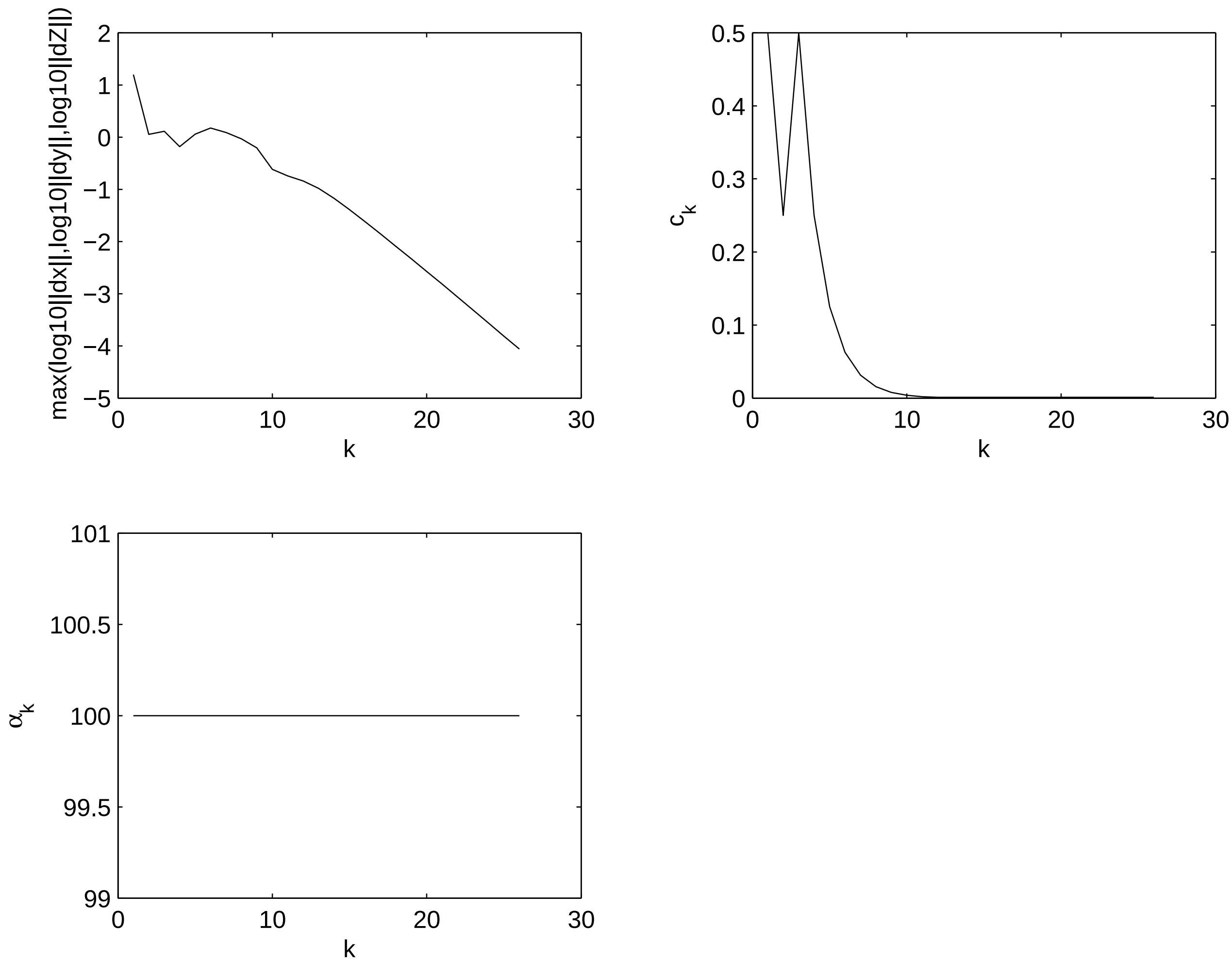

図 3: 問題例 3

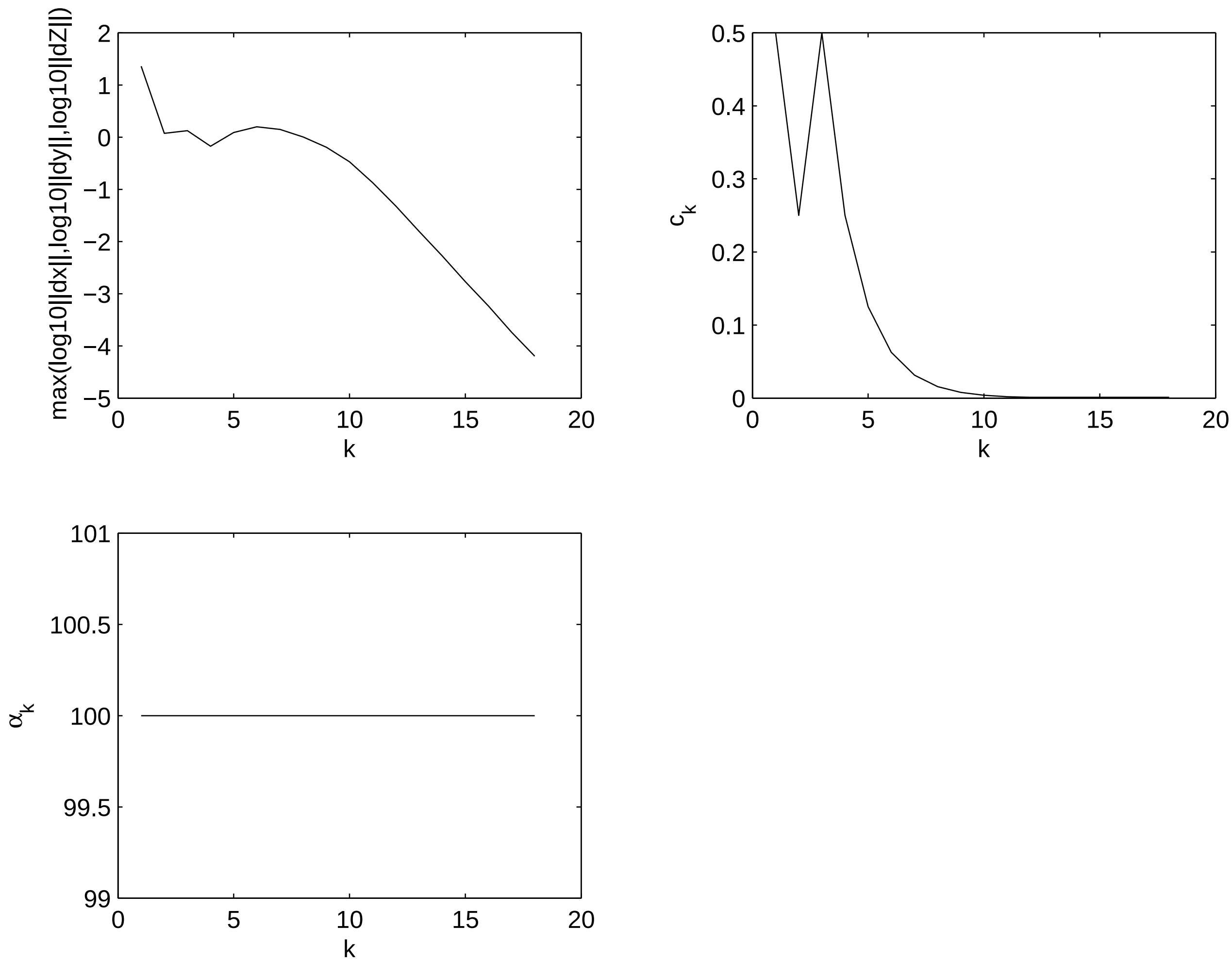

図 4: 問題例 4

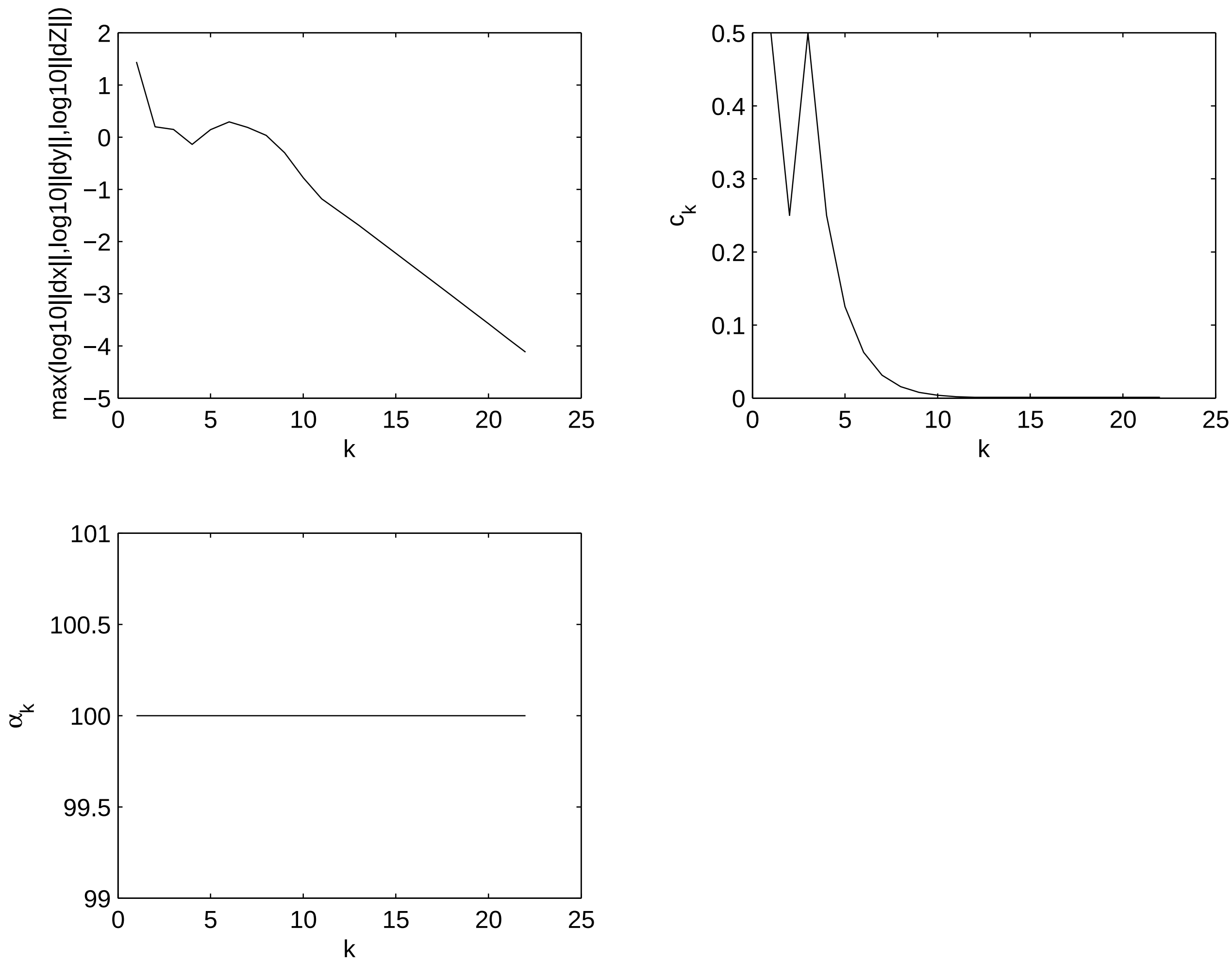

図 5: 問題例 5