

特別研究報告書

相関のある到着過程を持つ  
離散時間待ち行列モデルの解析

指導教官

滝根 哲哉 助教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成12年入学

平成16年3月卒業

前田 繁章

平成16年1月30日提出

# 相関のある到着過程を持つ離散時間待ち行列モデルの解析

前田繁章

## 摘要

インターネットにおける通信トラヒックには長期依存性あるいは自己相似性と呼ばれる長期間にわたる強い相関があることが知られており、このような長期間にわたる相関がシステムの性能に及ぼす影響を量的に評価することが重要な課題となっている。現在までにトラヒックが持つ相関をある程度表現可能で、解析しやすい到着過程がいくつか提案されてきた。しかしながら、それらの到着過程には、自己相関関数が明示的でない、長期間にわたる相関を表現できない、バッチサイズの分布が限定されるなどの欠点がある。

そこで本報告書ではまず、現在までに提案されてきた到着過程とは異なる新たな離散時間到着過程を提案した。この到着過程は、自己相関関数が持つ特徴が捉えやすいことに加えて、短期依存性から長期依存性にわたるまで幅広い性質の相関を表現可能である。したがって、本報告書で提案した到着過程は、ネットワークなどの性能評価のための基礎モデルの到着過程として非常に魅力的であると考えられる。

本報告書では、上記の到着過程を持つ無限バッファ待ち行列および有限バッファ待ち行列の性能指標の解析および数値計算を行い、到着過程の相関構造がシステムの性能に及ぼす影響について考察した。その結果、長期間にわたる強い相関がある到着過程を持つ待ち行列では、そうでない到着過程を持つ待ち行列よりシステムの性能は悪くなることが分かった。さらに、長期間にわたる強い相関がある到着過程を持つ待ち行列では、バッファの容量を増やしても、あるいはサーバの処理能力を高めてもあまりシステムの性能を改善できないことが分かった。また、無限バッファ待ち行列のセル数分布を用いて、有限バッファ待ち行列のセル棄却率を見積もる近似式を提案した。数値実験の結果、提案した近似式は、セル棄却率をよく近似できることが分かった。

# 目次

1	序論	1
2	定常状態におけるモデルの解析	3
2.1	観察スロットの決定	4
2.2	バッファの容量が無限の場合	4
2.3	バッファの容量が有限の場合	7
3	数値実験	9
3.1	$D^{[0]}$ の分布が与える影響	10
3.2	$D$ の分布や平均の違いがもたらす影響	10
3.3	$N$ の変化に対する感度	12
3.4	$\rho$ の変化に対する感度	13
3.5	$Z$ の分布の影響	14
3.6	無限バッファのシステム内セル数分布を用いたセル棄却率の近似	15
4	結論	16
A	自己相関関数	i
A.1	一般の場合	i
A.2	$Z$ と $D$ が独立な場合	ii
A.3	$\Pr(D = v \mid Z \geq 1) = \Pr(D^{[+]} = v)$ の場合	ii
A.3.1	陽表現	ii
A.3.2	漸近特性	iii
B	定理 1 の証明	vi
C	式 (6) の証明	viii
D	定理 4 の証明	ix
E	無限バッファにおけるシステム内セル数分布の平均と 2 次の階乗積率	xii
F	式 (9) の証明	xiv
G	定理 5 の証明	xv
H	定理 7 の証明	xvii
I	式 (13) の証明	xx
J	数値結果	xxi

# 1 序論

インターネットにおける通信トラヒックには長期依存性あるいは自己相似性と呼ばれる長期間にわたる強い相関があることが知られており [15, 19], このような長期間にわたる相関がシステムの性能に及ぼす影響を量的に評価することが重要な課題となっている. 現在までに, トラヒックが持つ相関をある程度表現可能であり, かつ, 解析しやすい到着過程として離散時間マルコフ型集団到着過程 [2] が知られている. この離散時間マルコフ型集団到着過程は表現力に富んだモデルではあるが, 到着に関する相関関数が明示的に表現できないことに加えて, インターネットトラヒックが持つとされる長期依存性といった長期間にわたる相関を表現できない. そこで本研究では, 相関構造の見通しがよく, かつ, 解析可能な離散時間到着過程を提案し, それを入力とする無限バッファ待ち行列及び有限バッファ待ち行列の解析を行う. 以下では, 本報告書で扱う離散時間到着過程を詳述する.

時間軸は均等な長さのスロットに分割されており, 各スロットにおいて複数のセルが到着することが許されているものとする. そして, 1 スロットに到着するセルの個数のことをバッチサイズと呼び, さらに,  $l$  番目 ( $l = 0, 1, \dots$ ) のスロットにおけるバッチの到着時点を時刻  $l$  と呼ぶ. このときセルは以下のようにして到着する.

まず, 時刻 0 におけるバッチサイズ  $Z$  が時刻とは独立な確率関数  $b(u) = \Pr(Z = u)$  ( $u = 0, 1, \dots$ ) によって決定される. さらに, バッチサイズ  $Z$  に依存して, 区間長  $D$  が条件付き確率関数  $d(v | u) = \Pr(D = v | Z = u)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) によって決定され, 時刻 0 から  $D - 1$  までの間に到着するバッチサイズは全て時刻 0 でのバッチサイズに等しいものとする. その後, 同じバッチサイズが継続する区間が終了するたびに, バッチサイズならびにそれが継続する区間長を定めるという手続きを繰り返す.

この到着過程を数学的に記述するためにいくつかの表記を導入する. まず,  $B_l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) を  $l$  番目のスロットにおけるバッチサイズとし, バッチサイズが決定されるスロット番号の集合を  $\{\omega(m); m = 0, 1, \dots\}$  とする. ただし,  $\omega(0) = 0$  かつ  $\omega(m) < \omega(m+1)$  である. このとき,  $Z_m = B_{\omega(m)} = B_{\omega(m)+1} = \dots = B_{\omega(m+1)-1}$  とすると  $Z_m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) は独立で同一な分布に従う確率変数列であり,

$$\Pr(Z_m = u) = b(u), \quad u = 0, 1, \dots$$

となる. また,  $D_m = \omega(m+1) - \omega(m)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) とすると

$$\Pr(D_m = v | Z_m = u) = d(v | u), \quad v = 1, 2, \dots, u = 0, 1, \dots$$

となる. 以下では簡単のために, 独立で同一な確率変数列において, その添え字番号を特に意識しなくても良い場合には, その添え字番号を省略して書くことにする.

ここで,  $D_m$  が  $Z_m$  と独立であり, 独立で同一な分布に従う場合を考える. このとき, 到着に関する自己相関関数  $\gamma(l)$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) は

$$\gamma(l) = \frac{E[B_{m+l}B_m] - E[B]^2}{\text{Var}[B]} = \Pr(\tilde{D} \geq l) \quad (1)$$

となることが簡単に示される (付録 A 参照). ただし  $\tilde{D}$  は  $D$  の前方再帰時間であり, その確率関数は次式で与えられる.

$$\Pr(\tilde{D} = n) = \frac{\Pr(D > n)}{E[D]}$$

また, 逆に式 (1) から,  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(1) < 1$ , を満たし, かつ非負, 非増加で凸である列  $\gamma(k)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) が与えられると,  $\Pr(D = k)$  は一意に定まり,

$$\Pr(D = k) = \frac{\gamma(k-1) - 2\gamma(k) + \gamma(k+1)}{1 - \gamma(1)}$$

となる．すなわち， $D_m$  が  $Z_m$  と独立である場合には，到着に関する相関はバッチサイズの分布とは独立に， $\tilde{D}$  の補分布だけを用いて特徴付けられることが分かる．

このように，相関構造が明示的に与えられる到着過程として，M/G/∞ 入力過程が知られている [11]．M/G/∞ 入力過程を持つ待ち行列モデルは様々な研究がなされているが [11, 12, 14]，バッチサイズがポワソン分布族に限定されるという欠点がある．一方，上記のモデルにおいて  $D$  が独立，同一な幾何分布に従う場合に相当する一次の離散時間自己回帰モデル (DAR(1)) [4] に対する研究も行われている．DAR(1) は，ビデオトラヒックをモデル化するため到着過程として提案され，それを入力とする待ち行列の研究が活発になされている [3, 4, 6, 7, 8]．しかしながら，DAR(1) は相関構造が幾何的であるという制約がある．

本報告書では，上記で述べた到着過程に対して以下の仮定をおく．

仮定 1 平均が有限である確率変数  $D$  は以下の条件 (a) 及び (b) を満たす．

- (a)  $Z = 0$  のとき， $D$  は離散相型分布に従う．すなわち  $\alpha$  及び  $T$  をそれぞれ  $1 \times M$  の確率ベクトル，及び劣確率的な  $M \times M$  行列としたとき，

$$\Pr(D = v \mid Z = 0) = \alpha T^{v-1} \mathbf{1}, \quad v = 1, 2, \dots$$

である．ただし  $\mathbf{1}$  はすべての成分が 1 である適当な次元の列ベクトル  $e$  を用いて  $\mathbf{1} = e - T e$  で与えられる．

- (b)  $Z \geq 1$  のとき， $D$  は  $Z$  とは独立な一般分布  $d(v)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) に従うものとする．すなわち，

$$\Pr(D = v \mid Z \geq 1) = d(v), \quad v = 1, 2, \dots$$

以下では，簡単のため， $Z = 0$  あるいは  $Z \geq 1$  で条件付けられた確率変数  $D$  をそれぞれ  $D^{[0]}$ ， $D^{[+]}$  と書くことにする．

仮定 1 (a) はこの到着過程を持つ待ち行列モデルを解析可能なものにするために導入されている．一方，仮定 1 (b) は到着過程がもつ相関が見通しの良いものになるために導入されている．すなわち， $D^{[+]}$  と  $D^{[0]}$  が同じ離散相型分布に従えば，自己相関関数は式 (1) より，

$$\gamma(l) = \eta T^l e, \quad l = 1, 2, \dots$$

で与えられる．ただし  $\eta$  は  $\eta(T + t\alpha) = \eta$  を満たす確率ベクトルである．

また， $D^{[+]}$  の分布が正則変動する分布族であり，さらに付加的な条件を満たすとき，ある正定数  $c$  が存在し，

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma(l)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l)} = c \quad (2)$$

となることが示される (付録 A 参照)．ただし， $\tilde{D}^{[+]}$  は  $D^{[+]}$  の前方再帰時間であり，その確率関数は次式で与えられる．

$$\Pr(\tilde{D}^{[+]} = n) = \frac{\Pr(D^{[+]} > n)}{E[D^{[+]}]}$$

式 (2) から，自己相関関数  $\gamma(l)$  の漸近的な性質は  $\tilde{D}^{[+]}$  の補分布で特徴付けられることが分かる．さらに， $E[D^{[0]}] = E[D^{[+]}]$  とすると，式 (2) の正定数  $c$  は次式のように  $Z$  の性質のみで定まる．

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma(l)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l)} = 1 - \frac{E[Z]^2}{\text{Var}[Z]} \Pr(Z = 0)$$

以上の議論から分かるように、本報告書で考察する到着過程は、自己相関関数の持つ性質が捉えやすい事に加えて、短期依存性から長期依存性まで幅広い性質の相関を表現可能である。さらに、この到着過程を持つ待ち行列モデルの客数分布、待ち時間分布、セル棄却率などの性能指標の解析及び数値計算が可能である。以上のことから、本報告書で考察される待ち行列モデルは、ネットワーク等の性能評価のための基礎モデルとして非常に魅力的であると考えられる。

本報告書の構成は以下の通りである。2章では、定常な無限バッファならびに有限バッファを持つシステムにおけるシステム内セル数分布とセルの待ち時間分布を導出する。そして、3章では、2章での解析結果に基づいて数値実験を行い、システムパラメータがセル棄却率に及ぼす影響を調べる。最後に、4章で結論を述べる。

## 2 定常状態におけるモデルの解析

本報告書では、セルの到着時点およびサービス規律が次のようなモデルを考察する。まず、セルの到着はスロットの終了直前で起こるものとする。そして、セルのサービス時間は一定で、1スロット長に等しいものとし、そのサービスはスロットの開始直後に始まり、スロットの境界で終わるものとする。なお、サービスを終了したセルはシステムから離脱し、セルの離脱直後にシステム内にセルがあれば、一つのセルが次のスロットからサービスを受けるものとする。そして、サーバは単一であり、セルは到着した順にサービスを受けるものとする。

このようなシステムにおいて1章で与えられたセルの到着過程を持つ待ち行列モデルを仮定1の下で考察する。以下では  $Y_l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) を  $l$  番目のスロットの中央におけるシステム内セル数とする。このとき、バッファの容量が無限である場合には、

$$Y_{l+1} = (Y_l - 1)^+ + B_l$$

が成り立つ。ここで  $(x)^+$  は  $(x)^+ = \max(0, x)$  である。一方、バッファの容量が有限である場合には、バッファのサイズを  $N$  ( $N \geq 2$ ) とすると

$$Y_{l+1} = (Y_l - 1)^+ + \min(B_l, N - Y_l)$$

が成立する。

1スロットあたりの到着率は  $E[B_l]$  であり、サービス率は1であるので、トラヒック強度  $\rho$  は

$$\begin{aligned} \rho &= E[B_l] \\ &= \frac{(1 - b(0))E[Z | Z \geq 1]E[D^{[+]}]}{(1 - b(0))E[D^{[+]}] + b(0)E[D^{[0]}}} \\ &= \frac{E[Z]E[D^{[+]}]}{(1 - b(0))E[D^{[+]}] + b(0)E[D^{[0]}}} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。

これらの待ち行列モデルに対して、定常状態における、任意のスロットでのシステム内セル数分布や待ち時間分布を直接的に求めることは困難である。そこでまず、2.1節で、特殊な性質を持つスロットを観察スロットとして選ぶ。その後、無限バッファの場合については2.2節で、有限バッファの場合については2.3節で、それぞれ選んだ観察スロットにおけるシステム内セル数分布を求め、さらに任意のスロットでのシステム内セル数分布や待ち時間分布を求める。

## 2.1 観察スロットの決定

定常状態におけるシステムの挙動を解析するために、バッチサイズが 0 であるか、もしくはバッチサイズが改めて決定されるスロットを観察スロットとする。すなわち、 $B_l = 0$  であるか  $l = \omega(m)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) であるかの少なくともどちらか一方の条件を満たす  $l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) 番目のスロットを観察スロットに選ぶ。これらの観察スロットに対し  $l$  の小さい順に番号  $n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) をつける。そして、各観察スロットと時間軸上の各スロットを対応づける関数を  $\tau(n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) と定める。すなわち  $n$  番目の観察スロットは第  $\tau(n)$  番目のスロットとなる。 $S_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) は  $n$  番目の観察スロットでの状態を表す確率変数列とし、次のような値をとるものとする。 $\omega(m-1) < \tau(n) \leq \omega(m)$  である  $n$  に対し、 $\tau(n) = \omega(m)$  のときは、 $S_n = 0$  とし、 $\tau(n) \neq \omega(m)$  のときは、 $S_n$  は、そのときの相型分布の状態  $(1, 2, \dots, M)$  をとるものとする。そして、 $X_n$  を  $n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 番目の観察スロットの中央でのセル数を表す確率変数列とする。このとき、 $\tau(n) = l \Rightarrow X_n = Y_l$  が成立することに注意する。

このように観察スロットを選ぶことで、2変数過程  $\{X_n, S_n; n = 0, 1, \dots\}$  はマルコフ連鎖となる。さらに、ある観察スロットのセル数は、その前の観察スロットのセル数と比べて高々 1 しか減少しない。このようなマルコフ連鎖は M/G/1 型マルコフ連鎖 (無限バッファの場合)、あるいは M/G/1/N 型マルコフ連鎖 (有限バッファの場合) と呼ばれ、数値解を求める方法が知られている [13, 17, 18]。そこで、まず観察スロットでの定常状態確率を求め、それを用いて、任意のスロットでの定常状態確率を求める。

そのため、さらに以下の準備をする。まず、 $n$  番目の観察スロットと  $n+1$  番目の観察スロットの間隔を表す確率変数列を  $H_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とする。すなわち  $H_n = \tau(n+1) - \tau(n)$  である。そして、 $A_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を

$A_n = (n \text{ 番目の観察スロットと } n+1 \text{ 番目の観察スロットの間にシステムに到着するセル数}) - H_n + 1$  と定義する。

## 2.2 バッファの容量が無限の場合

本節では、バッファの容量が無限である場合について、定常状態におけるシステム内セル数分布、および待ち時間分布を導出する。そのため、本節では定常状態確率が存在するための条件  $\rho < 1$  を仮定する。

バッファが無限であるので、簡単な考察から、

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_n$$

となることが分かる。

ここで  $A_{i,j}(k)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, M, k = 0, 1, \dots$ ) を  $A_{i,j}(k) = \Pr(A_n = k, S_{n+1} = j \mid S_n = i)$  とし、 $A_{i,j}(k)$  を  $(i, j)$  成分にもつ  $(M+1) \times (M+1)$  行列を、 $A_k$  と定義する。このとき、 $A_k$  を用いると、2変数マルコフ連鎖  $\{X_n, S_n\}$  の状態遷移確率行列  $P_A$  は、以下のように表される。

$$P_A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ O & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ O & O & A_0 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで  $A^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$  と定義する。このとき  $A^*(z)$  は次の定理から求めることができる。

定理 1  $A^*(z)$  は

$$A^*(z) = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b(u)d(v)z^{uv-v+1} + b(0)\alpha t & b(0)\alpha T \\ t & T \end{pmatrix}$$

と表される。

定理 1 の証明は、付録 B に示す。

ここで、 $(M+1) \times (M+1)$  行列  $A$  を、 $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$  と定義する。このとき  $A$  は確率行列となる。そして  $A$  の不変確率ベクトルを  $\pi = (\pi_0, \pi_+)$  と定義する。ただし、 $\pi_+ = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M)$  ( $\pi_j$  は  $\pi$  の第  $j$  成分) である。さらに、 $\beta, \rho_A$  をそれぞれ、 $\beta = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k e$ 、 $\rho_A = \pi \beta$  と定義する。

いま、定理 1 を用いて  $A^*(z)$  が求まると、 $A_k$  が数値的に得られ、状態遷移確率行列  $P_A$  が決定される。こうして得られた状態遷移確率行列  $P_A$  が、式 (4) の形で表される 2 変数マルコフ連鎖の定常状態確率が存在するための必要十分条件に関して以下の定理が知られている。

定理 2 [18]  $P_A$  が式 (4) の形で表される 2 変数マルコフ連鎖  $\{X_n, S_n\}$  の定常状態確率が存在するための必要十分条件は、 $\beta$  が有限でかつ  $\rho_A < 1$  であることである。

定義より、 $\beta$  は定理 1 を用いると、

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} (uv - v + 1)b(u)d(v) & o \\ 0 & O \end{pmatrix} e \\ &= \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし  $\beta_0$  は、

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} (uv - v + 1)b(u)d(v) \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} ub(u)vd(v) - \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b(u)vd(v) + \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b(u)d(v) \\ &= E[Z]E[D^{[+]}] - (1 - b(0))(E[D^{[+]}] - 1) \end{aligned}$$

である。このとき、 $\rho$  と  $\rho_A$  の間には次の関係式が成立する (証明は付録 C 参照)。

$$\frac{1 - \rho_A}{E[H]} = 1 - \rho \quad (6)$$

ここで  $H$  は  $H_n$  と同じ分布に従う確率変数である。

式 (5) より、 $\beta$  は有限である。さらに、 $\rho < 1$  であるから、式 (6) より、 $\rho_A < 1$  となる。したがって、定理 2 より、この 2 変数マルコフ連鎖は安定であり、定常状態確率が存在する。

ここで、 $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) は  $1 \times (M+1)$  ベクトルで、その  $j$  番目の要素  $x_{k,j}$  は

$$x_{k,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = k, S_n = j)$$

であるとする。このとき  $x = (x_0, x_1, \dots)$  とすると、 $x$  はこの 2 変数マルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルとなる。すなわち、

$$x = xP_A, \quad xe = 1$$



を満たす．そして， $G$  と  $\bar{A}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} A_k G^k, \quad \bar{A}_k = \sum_{i=k}^{\infty} A_i G^{i-k}$$

とし， $g$  は  $G$  の不変確率ベクトルであるとする．このとき，2変数マルコフ連鎖  $\{X_n, S_n\}$  の定常状態確率ベクトルの計算方法に関する定理が知られている．その定理を次に示す．

定理 3 [18]  $x_0$  は， $x_0 = (1 - \rho_A)g$  で与えられる．さらに  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は

$$x_k = \left( x_0 \bar{A}_k + \sum_{j=1}^{k-1} x_j \bar{A}_{k-j+1} \right) (I - \bar{A}_1)^{-1}$$

から順次求まる．

定理 3 から，定常状態における観察スロットの状態が求まる．そこで以下では，定理 3 で得られた  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) を用いて，任意のスロットにおけるシステム内セル数分布と先着順サービスの場合の待ち時間分布を求める．そのためにまず， $x^*(z)$  と  $\tilde{x}_0^*(z)$  を

$$x^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k, \quad \tilde{x}_0^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^{(k-1)^+}$$

と定義し，さらに  $\bar{d}(h)$  を  $\bar{d}(h) = \sum_{v=h+1}^{\infty} d(v)$  と定義する．

定常状態において，任意のスロットにおけるシステム内セル数を  $Y$  とし，任意のセルのシステム内での待ち時間を  $W$  とする．さらに  $Y^*(z)$ ， $W^*(z)$  をそれぞれ  $Y^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(Y = k) z^k$ ， $W^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(W = k) z^k$  と定義する．このとき，任意のスロットでのシステム内セル数分布と待ち時間分布は，以下の定理から求まる．

定理 4  $Y^*(z)$  と  $W^*(z)$  はそれぞれ，

$$Y^*(z) = \frac{1}{E[H]} \left( x^*(z) e + z \cdot \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \quad (7)$$

$$W^*(z) = \frac{1}{\rho E[H]} \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \bar{d}(h) b(u) z^{h(u-1)} \frac{1 - z^u}{1 - z} \quad (8)$$

で与えられる．

定理 4 の証明は，付録 D に示す．さらに，式 (7) から，システム内セル数分布の平均と 2 次の階乗積率を求めることができる (付録 E を参照)．

また， $W^*(z)$  と  $Y^*(z)$  の間には，よく知られた次の関係式が成立する [16] ．

$$Y^*(z) = 1 - \rho + \rho z W^*(z) \quad (9)$$

式 (9) の証明は付録 F に示す．

### 2.3 バッファの容量が有限の場合

本節では、バッファが有限である場合の、定常状態におけるシステム内セル数分布および待ち時間分布を導出する。

バッファが有限であるので、簡単な考察から、

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - 1)^+ + \min(A_n, N - X_n), & H_n = 1 \\ \min((X_n - 1)^+ + A_n, N - 1), & H_n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

となることがわかる。

以下では、 $A'_{i,j}(k)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, M, k = 0, 1, \dots$ ) と  $A''_{i,j}(k)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, M, k = 0, 1, \dots$ ) をそれぞれ  $A'_{i,j}(k) = \Pr(A_n = k, S_n = j, H_n = 1 \mid S_n = i)$ ,  $A''_{i,j}(k) = \Pr(A_n = k, S_n = j, H_n \geq 2 \mid S_n = i)$  とする。そして  $A'_{i,j}(k)$  を第  $(i, j)$  成分に持つ行列を  $A'_k$ ,  $A''_{i,j}(k)$  を第  $(i, j)$  成分に持つ行列を  $A''_k$  と定義する。さらに  $U'_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) と  $U''_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ) をそれぞれ  $U'_k = \sum_{l=k}^{\infty} A'_l$ ,  $U''_k = \sum_{l=k}^{\infty} A''_l$  と定義する。このとき、2変数有限状態マルコフ連鎖  $\{X_n, S_n\}$  の状態遷移確率行列  $P_{[N]}$  は

$$P_{[N]} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{N-2} & A_{N-1} & U_N \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{N-2} & U_{N-1} & O \\ O & A_0 & A_1 & \cdots & A_{N-3} & U_{N-2} & O \\ O & O & A_0 & \cdots & A_{N-4} & U_{N-3} & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_0 & U_1 & O \\ O & O & O & \cdots & O & U_0 & O \end{pmatrix} \quad (10)$$

と表される。ただし、

$$\begin{cases} A_k = A'_k + A''_k, & k = 0, 1, \dots, N - 2 \\ A_k = A'_k + U''_k, & k = N - 1 \\ U_k = U'_k + U''_k, & k = 0, 1, \dots, N - 1 \\ U_k = U'_k, & k = N \end{cases}$$

である。さらに  $A'^*(z) = \sum_{k=0}^N A'_k z^k$ ,  $A''^*(z) = \sum_{k=0}^N A''_k z^k$  と定義する。このとき、 $A'^*(z)$  および  $A''^*(z)$  は次の定理から求めることができる。

定理 5  $A'^*(z)$  と  $A''^*(z)$  はそれぞれ以下のように表される。

$$A'^*(z) = \begin{pmatrix} b(0)\alpha t + \sum_{u=1}^{\infty} b(u)d(1)z^u & b(0)\alpha T \\ t & T \end{pmatrix}$$

$$A''^*(z) = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=2}^{\infty} b(u)d(v)z^{uv-v+1} & o \\ \mathbf{0} & O \end{pmatrix}$$

定理 5 の証明は、付録 G に示す。

ここで、 $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) は  $1 \times (M + 1)$  ベクトルで、その  $j$  番目の要素  $x_{k,j}$  は

$$x_{k,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = k, S_n = j)$$

であるとする．このとき  $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$  とすると， $x$  はこの 2 変数有限状態マルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルとなる．すなわち，

$$x = xP_{[N]}, \quad xe = 1$$

を満たす．そして  $G_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) を，

$$G_k = \begin{cases} U_0, & k = N \\ (I - U_1)^{-1} A_0, & k = N - 1 \\ \left( I - A_1 - \sum_{n=2}^{N-k-1} A_n G_{k-1+n} \cdots G_{k+1} \right. \\ \quad \left. - U_{N-k} G_{N-1} \cdots G_{k+1} \right)^{-1} A_0, & k = N - 2, N - 3, \dots, 1 \end{cases}$$

とし，さらに  $L$  を

$$L = A_0 + \sum_{n=1}^{N-1} A_n G_n \cdots G_1 + U_N G_N \cdots G_1$$

と定義する．このとき，2 変数有限状態マルコフ連鎖  $\{X_n, S_n\}$  の定常状態確率ベクトルの計算方法に関する定理が知られている．その定理を以下に示す．

定理 6 [17]  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) は

$$x_k = \frac{\hat{x}_k}{N} \sum_{l=0}^N \hat{x}_l$$

で与えられる．ここで  $\hat{x}_0$  は  $\hat{x}_0 = \hat{x}_0 L$  である確率ベクトルであり， $\hat{x}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) は

$$\hat{x}_k = \begin{cases} \left( \hat{x}_0 \hat{A}_{0,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \hat{x}_j \hat{A}_{j,k} \right) (I - \hat{A}_{k,k})^{-1}, & k = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \hat{x}_0 U_N, & k = N \end{cases}$$

$$\hat{A}_{j,k} = \begin{cases} A_k + \sum_{n=k+1}^{N-1} A_n G_n \cdots G_{k+1} \\ \quad + U_N G_N \cdots G_{k+1}, & k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad j = 0 \\ A_{k-j+1} + \sum_{n=k+1}^{N-2} A_{n+1-j} G_n \cdots G_{k+1} \\ \quad + U_{N-j} G_{N-1} \cdots G_{k+1}, & k = 1, 2, \dots, N - 2, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ U_{N-j}, & k = N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

によって求められる．

定理 6 から無限バッファの場合と同様，定常状態における観察スロットの状態が求まる．そこで定理 6 で得られた  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) を用いて，任意のスロットにおけるシステム内セル数分布と到着順サービスの場合の待ち時間分布を求める．そのため，以下では無限バッファの場合と同様に

$$x^*(z) = \sum_{k=0}^N x_k z^k$$

と定義する．

ここで、定常状態において任意のスロットにおけるシステム内セル数を  $Y$  とし、任意のセルがシステム内に入ることができたという条件の下でそのセルのシステム内での待ち時間を  $W$  とする。さらに  $Y^*(z)$ ,  $W^*(z)$  をそれぞれ  $Y^*(z) = \sum_{k=0}^N \Pr(Y = k)z^k$ ,  $W^*(z) = \sum_{k=0}^N \Pr(W = k)z^k$  と定義する。最後に、 $u = 1, 2, \dots$  に対して、

$$q(k, h, u) = \begin{cases} \min(u, N) - 1, & k = 0, & h = 1, \\ \min(h(u-1) + 1, N-1) - 1, & k = 0, & h = 2, 3, \dots \\ \min(h(u-1) + k, N-1) - 1, & k = 1, \dots, N & h = 1, 2, \dots \end{cases}$$

と定義する。このとき、任意のスロットにおけるシステム内セル数分布と待ち時間分布は以下の定理から求められる。

定理 7  $Y^*(z)$  と  $W^*(z)$  はそれぞれ

$$Y^*(z) = \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^*(z) \mathbf{e} + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k,h,u)+1} \right) \quad (11)$$

$$W^*(z) = \frac{1}{\rho' E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) z^{(k-1)+} \frac{1 - z^{\min(u, N-k)}}{1-z} + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k,h,u)} \frac{1 - z^{\min(u, N-1-q(k,h,u))}}{1-z} \right) \quad (12)$$

で与えられる。

定理 7 の証明は、付録 H に示す。

また、 $W^*(z)$  と  $Y^*(z)$  の間には、よく知られた次の関係式が成立する [16]。

$$Y^*(z) = 1 - \rho' + \rho' z W^*(z) \quad (13)$$

式 (13) の証明は付録 I に示す。

いま、システムが空である確率は  $\Pr(Y = 0)$  であるので、サーバの稼働率を  $\rho'$  とすると、 $\rho'$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho' &= 1 - \Pr(Y = 0) \\ &= 1 - Y^*(0) \end{aligned}$$

$\rho'$  は、1 スロットあたりにシステムに収容される平均セル数 (平均到着数 - 平均棄却数) である。一方、1 スロットあたりの平均到着数はトラヒック強度  $\rho$  である。したがって、セル棄却率  $P_{loss}$  は、

$$P_{loss} = \frac{\rho - \rho'}{\rho}$$

で与えられる。

### 3 数値実験

システムの振る舞いを調べるため、2章での解析結果に基づいて、さまざまな条件の下で数値実験を行った。以下では、 $E[D^{[+]}] = E[D^{[0]}]$  とする。つまり  $E[D] = E[D^{[0]}] (= E[D^{[+]}])$  とする。

### 3.1 $D^{[0]}$ の分布が与える影響

まず,  $D^{[+]}$  がパレート分布の場合に,  $D^{[0]}$  の分布の違いによって, どのようにセル棄却率の違いが生じるのかを調べるために, パレート分布の shape パラメータ  $\theta$  が

$$\theta_L = 1.633442231, \quad \theta_S = 3.010447462$$

で与えられる 2 通りの場合に対して数値実験を行った. ここで,  $E[D] = 4.2$  とし,  $D^{[0]}$  は 2 点分布, 幾何分布, 分散の大きい相型分布の 3 種類とした.  $D^{[+]}$  が  $\theta = \theta_S$  の場合と,  $\theta = \theta_L$  の場合の  $d(v)$  は, それぞれ以下のように表される.

$$\begin{aligned} \theta = \theta_S \text{ の場合: } \quad d(v) &= \begin{cases} 0, & v = 1, 2, 3 \\ \left(\frac{1}{v-3}\right)^{\theta_S} - \left(\frac{1}{v-2}\right)^{\theta_S}, & v = 4, 5, \dots \end{cases} \\ \theta = \theta_L \text{ の場合: } \quad d(v) &= \begin{cases} 0, & v = 1, 2 \\ \left(\frac{1}{v-2}\right)^{\theta_L} - \left(\frac{1}{v-1}\right)^{\theta_L}, & v = 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

また  $D^{[0]}$  が 2 点分布, 幾何分布, 相型分布の場合の  $M, \alpha, T$  はそれぞれ以下のように表される.

$$\begin{aligned} \text{2 点分布の場合: } \quad M &= 5, \quad \alpha = (1, 0, 0, 0, 0), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{幾何分布の場合: } \quad M &= 1, \quad \alpha = 1, \quad T = \frac{15}{21} \\ \text{相型分布の場合: } \quad M &= 2, \quad \alpha = \left(\frac{99}{100}, \frac{1}{100}\right), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{320}{321} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そして,  $\rho = 0.5$  とし,  $Z$  は平均 0.5 の幾何分布に従うものとした. これらに対してセル棄却率  $P_{loss}$  とバッファサイズ  $N$  の関係を調べた. 得られた結果を  $\theta = \theta_S$  の場合については図 1 に,  $\theta = \theta_L$  の場合については図 2 に示す. ここで,  $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり,  $N$  を横軸にとった.

図 1 から  $\theta = \theta_S$  の場合には,  $D^{[0]}$  の分布が 2 点分布, 幾何分布, 相型分布のいずれの場合でも,  $N$  が十分大きいときには, セル棄却率がほぼ等しくなることがわかる. また, 図 2 から  $\theta = \theta_L$  の場合も同様のことがいえる. このことから,  $D^{[+]}$  の分布がパレート分布の場合には, shape パラメータ  $\theta$  が  $1 < \theta < 2$  の場合についても,  $\theta > 2$  の場合についても,  $D^{[0]}$  の分布に対する感度が小さいと考えられる. すなわち,  $D^{[+]}$  がパレート分布の場合,  $D^{[0]}$  の分布がどのようなものかを考えても得られる結果にそれほど差は出ないと考えられる.

### 3.2 $D$ の分布や平均の違いがもたらす影響

$D$  の分布や平均の違いによって, システムの振る舞いにどのような違いがみられるのかを考察するために  $D^{[+]}$  が 2 点分布, 幾何分布,  $\theta = \theta_S$  であるパレート分布,  $\theta = \theta_L$  であるパレート分布の場合について数値実験を行った. ここで,  $Z$  は平均 0.5 の幾何分布に従うものとし, バッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を調べた.

そこで、 $D^{[+]}$  が2点分布の場合は  $D^{[0]}$  も2点分布に従うものとし、これ以降 DT と書くことにする．同様に、 $D^{[+]}$  が幾何分布の場合は  $D^{[0]}$  も幾何分布に従うものとし、これ以降 DG と書くことにする．一方  $D^{[+]}$  がパレート分布の場合は  $D^{[0]}$  は幾何分布に従うものとする．なぜなら 3.1 節で述べたように  $D^{[0]}$  の分布がどの場合でも、それほど得られる結果に差が出ない．また、 $D^{[0]}$  の分布が幾何分布の場合には、 $M = 1, \alpha = 1$  となり、さらに  $T$  は  $E[D^{[+]}$ ] によって一意に決定されるのでもっとも扱いやすい．これらの理由から、 $D^{[+]}$  がパレート分布の場合については、 $D^{[0]}$  の分布は幾何分布に従うものとする．そして以下では、 $\theta = \theta_S$  の場合を DS、 $\theta = \theta_L$  の場合を DL と書くことにする．

ここで DT や DG の場合には  $D$  と  $Z$  の分布が独立であるので付録 A.2 から、 $\gamma(k) = \Pr(\tilde{D} \geq k)$  となる．一方、DS や DL の場合には付録 A.3.2 の式 (14) が成立し、付録 A.3.2 から、 $\gamma(k)$  の漸近特性が考察できる．これらに注意すると、DT、DG、DL それぞれの場合について、自己相関関数  $\gamma(k)$  は  $k \rightarrow \infty$  では

$$\text{DT: } \gamma(k) = 0, \quad k > K$$

$$\text{DG: } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(k)}{C^k} = L_G$$

$$\text{DL: } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(k)}{\left(\frac{1}{k}\right)^{-(\theta_L-1)}} = L_L$$

と表される．ここで  $K$  は自然数の定数であり、 $L_G, L_L, C$  ( $0 < C < 1$ ) は正定数である．一方、DS に関しては、十分大きな  $k$  に対して

$$\text{DS: } 0 < \frac{\gamma(k)}{\left(\frac{1}{k}\right)^{-(\theta_S-1)}} < 1 + L_S$$

となるような正定数  $L_S$  が存在する．また、これより DS の場合は  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(k) < \infty$  となり、長期依存性は持たないことが分かる．一方 DL の場合は  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(k) = \infty$  となり、長期依存性を持つことが分かる．

そこでまず、 $E[D] = 4.2$  の場合に対して、DT、DG、DS、DL の4通りの場合に対して数値実験を行った．このとき、DT、DG、DS、DL はそれぞれ具体的には以下のように表される．

$$\text{DT: } M = 5, \quad \alpha = (1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(v) = \begin{cases} \frac{4}{5}, & v = 4 \\ \frac{1}{5}, & v = 5 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$\text{DG: } M = 1, \quad \alpha = 1, \quad \mathbf{T} = \frac{15}{21}, \quad d(v) = \left(1 - \frac{16}{21}\right) \left(\frac{16}{21}\right)^{v-1}, \quad v = 1, 2, \dots$$

$$\text{DS: } M = 1, \quad \alpha = 1, \quad \mathbf{T} = \frac{15}{21}, \quad d(v) = \begin{cases} 0, & v = 1, 2, 3 \\ \left(\frac{1}{v-3}\right)^{\theta_S} - \left(\frac{1}{v-2}\right)^{\theta_S}, & v = 4, 5, \dots \end{cases}$$

$$\text{DL: } M = 1, \quad \alpha = 1, \quad T = \frac{15}{21}, \quad d(v) = \begin{cases} 0, & v = 1, 2 \\ \left(\frac{1}{v-2}\right)^{\theta_L} - \left(\frac{1}{v-1}\right)^{\theta_L}, & v = 3, 4, \dots \end{cases}$$

その結果得られたバッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を図 3 に示す．ここで， $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり， $N$  を横軸にとった．

同じように， $E[D] = 1.2$  の場合に対して，DT，DG，DS の 3 通りについて数値実験を行った．このとき，DT，DG，DS はそれぞれ具体的には以下のように表される．

$$\text{DT: } M = 2, \quad \alpha = (1, 0), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(v) = \begin{cases} \frac{4}{5}, & v = 1 \\ \frac{1}{5}, & v = 2 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$\text{DG: } M = 1, \quad \alpha = 1, \quad T = \frac{1}{6}, \quad d(v) = \left(1 - \frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{v-1}, \quad v = 1, 2, \dots$$

$$\text{DS: } M = 1, \quad \alpha = 1, \quad T = \frac{1}{6}, \quad d(v) = \begin{cases} 0, & v = 1, 2, 3 \\ \left(\frac{1}{v-3}\right)^{\theta_S} - \left(\frac{1}{v-2}\right)^{\theta_S}, & v = 4, 5, \dots \end{cases}$$

その結果得られたバッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係をを図 4 に示す．ここでも， $E[D] = 4.2$  の場合と同様に  $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり， $N$  を横軸にとった．

図 3 と図 4 から， $E[D]$  が等しくても， $D$  の分布の違いによってセル棄却率には大きな差が出るのがわかる．すなわち， $E[D]$  の値が等しくても， $D$  の分布が DT，DG，DS，DL のどれであるかでセル棄却率  $P_{loss}$  は全く異なる値をとる．さらに，バッファサイズ  $N$  の増加に対する，セル棄却率  $P_{loss}$  の減少の仕方も DT，DG，DS，DL で異なる．このことから  $E[D]$  のみを用いてシステムの振る舞いを議論することはできず， $D$  の分布そのものを用いてシステムの振る舞いを議論するべきであると考えられる．

一方，図 3 と図 4 を比較すると， $E[D] = 4.2$  と  $E[D] = 1.2$  のどちらの場合においても，DT，DG，DS の順で，バッファのサイズの増加に対するセル棄却率の減少の度合いが小さくなっている．さらに， $E[D] = 4.2$  の場合も， $E[D] = 1.2$  の場合も，DT，DG は直線的に，DS は下に凸な曲線を描いている．すなわち，DT，DG，DS のいずれであるかが決定されると， $E[D] = 4.2$  であっても  $E[D] = 1.2$  であっても，(セル棄却率の値そのものは異なるが) バッファサイズの変化に対するセル棄却率の変化の仕方は同じであることがわかる．そのため，これ以降は  $E[D] = 4.2$  の場合に対して議論をすることにする．

### 3.3 $N$ の変化に対する感度

バッファサイズ  $N$  を増やすことで，システムの性能がどう改善するのかをみるために， $E[D] = 4.2$  とし， $D$  が 3.2 節の DT，DG の場合について数値実験を行った．ここで  $\rho$  は， $\rho = 0.5$  と  $\rho = 0.8$  の 2 通りの場合に対して行い， $Z$  は平均が  $\rho$  の幾何分布に従うものとした．それぞれ場合についてバッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を調べた．その得られた結果を，まず DT の場合については図 5 に，DG の場合については図 6 に示す．ここで， $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり， $N$  を横軸にとった．

図5, 図6より,  $\rho = 0.5$  の場合でも,  $\rho = 0.8$  の場合でも DT, DG の場合はバッファのサイズが大きくなるにしたがって, セル棄却率は指数的に減少することがわかる. このことから, 相関がある値までしか続かない場合や相関が指数的に減少する場合には, バッファのサイズを  $n$  倍にすることで, セル棄却率を  $1/c^n$  ( $c$  は定数) に下げることができることがわかる.

次に,  $E[D] = 4.2$  とし,  $D$  が 3.2 節の DS, DL の場合について数値実験を行った. DT や DG の場合と同様に  $\rho$  は,  $\rho = 0.5$  と  $\rho = 0.8$  の 2 通りの場合に対して行い,  $Z$  は平均が  $\rho$  の幾何分布に従うものとした. それぞれ場合についてバッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を調べた. 得られた結果を DS の場合については図7に, DL の場合については図8に示す. ここで,  $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり,  $N$  は DT, DG の場合とは異なり, 対数軸で横軸にとったことに注意する.

図7と図8から, DS と DL の場合には, バッファサイズを増やしたときのセル棄却率は, どちらの場合でも,  $P_{loss}$  と  $N$  を対数軸でとった場合には, 直線を描いていることがわかる. すなわち, バッファサイズを増やしても, セル棄却率を指数的に減少させることはできないことがわかる. では具体的に, バッファサイズとセル棄却率の間にはどのような関係があるのか考察する. そのために, 図7には,  $P_{loss} = 0.23/N^{\theta_S-1}$ ,  $P_{loss} = 0.56/N^{\theta_S-1}$  の曲線を, 図8には,  $P_{loss} = 0.19/N^{\theta_L-1}$ ,  $P_{loss} = 0.31/N^{\theta_L-1}$  の曲線を同時に描いた. 図7と図8から, バッファサイズ  $N$  が大きいところでは,  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係が  $P_{loss} = c/N^{\theta-1}$  ( $\theta$  はパレート分布のパラメータで,  $c$  は定数) の曲線に近づいていくことがわかる. このことは, バッファのサイズを  $n$  倍にしてもセル棄却率は  $1/n^{\theta-1}$  にしか下げられないことを示している. ここで自己相関関数とセル棄却率との関連性について考察する. DS や DL の場合,  $N$  が十分大きい場合には, 3.2 節で見たように, 自己相関関数は緩慢変動 (slowly varying) する  $L(N)$  を用いて,  $\gamma(N) = L(N)/N^{\theta-1}$  と表される. このことから, DS や DL の場合にはバッファサイズ  $N$  が十分大きなところでは自己相関関数に重み付けをしたものでセル棄却率が表現できると考えられる.

以上のことから, 自己相関関数が劣指数的に減衰する場合は, 長期依存性を持つ場合も持たない場合も, バッファのサイズを増やすことでシステムの性能を改善させることは困難であると考えられる.

### 3.4 $\rho$ の変化に対する感度

自己相関関数が指数的に減衰していくものと, 劣指数的に減衰していくものとの間では  $\rho$  の変化に対する感度がどのように異なるかを調べるために  $\rho$  とセル棄却率  $P_{loss}$  との関係を調べた.

まず, バッファのサイズが,  $N = 200$  の場合に対して,  $E[D] = 4.2$  で,  $D$  は 3.2 節の DT, DG, DS, DL の 4 通りに対して調べた.  $Z$  は平均  $\rho$  の幾何分布に従うものとした. その結果得られた  $\rho$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を図9に示す. ここで,  $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり,  $\rho$  を横軸にとった.

図9から, DT, DG, DS, DL の順で,  $\rho$  に対する感度が穏やかになっていくことがわかる. たとえば, DT や DG の場合, 図9においてセル棄却率は直線的に変化していることがわかる. これは,  $\rho$  を減少させるとセル棄却率は指数的に減衰することを示している. すなわち,  $\rho$  を  $1/n$  にすると (サーバの処理能力を  $n$  倍すると), セル棄却率は  $1/c^n$  ( $c$  は定数) に下げられることがわかる. 一方, DS や DL の場合, 図9においてセル棄却率は上に凸である曲線を描いており, DT や DG に比べて変化が穏やかである. これは,  $\rho$  を減少させてもセル棄却率を指数的に減衰させることはできないことを示している. このように, ある値を越えると相関がなくなったり, 自己相関関数が指数的に減衰したりする場合には,  $\rho$  を下げることで指数的にセル棄却率を減少させることができると考えられる. 一方, 自己相関関数が劣指数的にしか減少しない場合には, 長期



依存性を持つ場合もそうでない場合も、 $\rho$  を下げることで指数的にセル棄却率を減少させることはできないと考えられる。

次に、劣指数的に自己相関関数が減少する場合には  $\rho$  とセル棄却率  $P_{loss}$  が具体的にはどのような関係があるのかをみるために、DS と DL の場合についてバッファのサイズが  $N = 200$  に対して、 $\rho$  と  $P_{loss}$  の関係を調べた。得られた、 $1/\rho$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を図 10 に示す。ここで、 $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり、 $1/\rho$  もまた対数軸で横軸にとった。

図 10 では、DS の場合は、およそ  $1/\rho > 4/3$  (すなわち  $\rho < 3/4$ )、DL の場合は、およそ  $1/\rho > 10/9$  (すなわち  $\rho < 9/10$ ) の範囲ではほぼ直線を描いている。このことは  $1/\rho$  が  $n$  倍になると、セル棄却率は  $1/n^c$  ( $c$  は定数) になることを示している。すなわち、サーバの処理能力を  $n$  倍にしても、セル棄却率は  $1/n^c$  ( $c$  は定数) 程度にしかならない。

以上のことから、自己相関関数が劣指数的に減衰する場合は、長期依存性を持つ場合もそうでない場合も自己相関関数が指数的に減衰する場合と比べて、サーバの処理能力を高めることでシステムの性能を改善させることは難しいと考えられる。

### 3.5 $Z$ の分布の影響

$Z$  の分布がシステムの性能にどのような影響をもたらすか、および  $D$  の分布によって  $Z$  の分布から受ける影響の度合いがどう異なるのかを調べるために  $\rho = 0.5$  の場合について数値実験を行った。 $Z$  は、0 と 3 をとる 2 点分布 (ZT3)、幾何分布 (ZG)、0 と 2 をとる 2 点分布 (ZT2)、二項分布 (ZB) の 4 通りとした。それぞれの場合における  $b(u)$  は具体的には以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{ZT3: } \quad b(u) &= \begin{cases} \frac{1}{6}, & u = 3 \\ \frac{5}{6}, & u = 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ \text{ZG: } \quad b(u) &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^u, \quad u = 0, 1, \dots \\ \text{ZT2: } \quad b(u) &= \begin{cases} \frac{1}{4}, & u = 2 \\ \frac{3}{4}, & u = 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ \text{ZB: } \quad b(u) &= \begin{cases} \binom{10}{u} \left(\frac{1}{20}\right)^u \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{10-u}, & u = 0, 1, \dots, 10 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

このとき、ZT3 の場合は ( $\text{Var}[Z] = 1.25$ ) であり、ZG の場合と ZT2 の場合はどちらも ( $\text{Var}[Z] = 0.75$ ) である。そして ZB の場合には ( $\text{Var}[Z] = 0.475$ ) である。

ここで、 $E[D] = 4.2$  で、 $D$  は 3.2 節の DL, DS, DG, DT の 4 通りとした。それぞれに対して、バッファサイズ  $N$  とセル棄却率  $P_{loss}$  の関係を調べた。DT の場合を図 11 に、DG の場合を図 12 に、DS の場合を図 13 に、DL の場合を図 14 に示す。ここで、 $P_{loss}$  を対数軸で縦軸にとり、 $N$  を横軸にとった。

まず、図 11 ~ 図 14 をみるとわかるように、 $Z$  の平均や分散が同じでもセル棄却率の大きさは異なることがわかる。すなわち、 $Z$  の平均や分散でセル棄却率が決定されるのではなく、 $Z$  の分

布そのものによって、セル棄却率は決定されると考えられる。

次に、 $Z$  の分布の違いに対する感度について考察する。まず、図 11 と図 12 から、DT や DG の場合には、 $Z$  が ZG, ZT3, ZT2, ZB のどれであるかによって傾きの異なる曲線となる。たとえば、図 11 から分かるように、DT の場合には、ZB, ZT2, ZG, ZT3 の順に傾きが穏やかになっていく。さらに、描かれた曲線は、 $N = 5$  付近で ZG と ZT2 の曲線が交差する。図 12 から分かるように、DG の場合には、ZT2, ZB, ZT3, ZG の順に傾きが穏やかになっていく。描かれた直線は、 $N = 60$  付近で ZT2 と ZB の曲線が、 $N = 120$  付近で ZT3 と ZG の曲線が交差している。このように、ある値で相関がなくなったり、自己相関関数が指数的に減衰するような場合には、 $Z$  の分布が異なるとシステムの振る舞いも大きく異なる。したがって、これらの場合には  $Z$  に対する感度は鋭いといえる。

一方、図 13, 図 14 から、DS や DL の場合には、 $Z$  の分布が ZT3, ZT2, ZG, ZB のどの場合にも同じような形状の曲線となる。すなわち、セル棄却率の値そのものは異なるものの、バッファのサイズを変化させたときのセル棄却率の変化の仕方は  $Z$  の分布がどの場合でも同じである。またバッファのサイズがどの場合においても、 $Z$  の分散が大きいものほどセル棄却率は大きくなる傾向がある。このことから、自己相関関数が指数的に減衰する場合と比べると、自己相関関数が劣指数的に減衰するような場合は、それが長期依存性を持つか持たないかに関わらず  $Z$  の分布に対する感度は鈍いものだと考えられる。

### 3.6 無限バッファのシステム内セル数分布を用いたセル棄却率の近似

無限バッファのシステム内セル数分布と、有限バッファのセル棄却率との間にはどのような関係があり、無限バッファのシステム内セル数分布を用いたどのような近似式で、有限バッファのセル棄却率を近似できるのか考察する。このように、有限バッファのセル棄却率を無限バッファの分布から見積もる近似式を考察する理由は以下の通りである。一般に、打ち切り誤差や計算量、記憶量の観点から、有限バッファのセル棄却率を求める方が向くモデルと無限バッファのシステム内セル数分布を求める方が向くモデルがある。そのなかで、有限バッファのセル棄却率を求めるのに向かないようなモデルの場合、もし無限バッファの分布から有限バッファのセル棄却率が近似できれば、それを利用して少ない計算量や記憶量でセル棄却率の評価をできる。このような利点があるため、有限バッファのセル棄却率を無限バッファの分布から見積もる近似式を考察する。まず、近似式 (AY) と (AX) を以下のように定める [9]。

$$AY = \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{F_{AY}(N)}{1 - F_{AY}(N)}$$

$$AX = \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{\pi_0 b(0) + \pi_+ e - F_{AX}(N)}{F_{AX}(N)}$$

ここで、 $F_{AY}(N)$  と  $F_{AX}(N)$  は、

$$F_{AY}(N) = \sum_{k=N}^{\infty} \Pr(Y = k), \quad F_{AX}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k,0} b(0) + x_{k,+} e) + x_{0,0} \bar{b}(N) d(1)$$

である。ただし、 $\bar{b}(N) = \sum_{u=N}^{\infty} b(u)$  である。これらの近似式に対して、さらに誤差  $error_{AY}$  と  $error_{AX}$  をそれぞれ

$$error_{AY} = \frac{AY - P_{loss}}{P_{loss}}, \quad error_{AX} = \frac{AX - P_{loss}}{P_{loss}},$$

とする．このとき， $error_{AY}$  や  $error_{AX}$  が正であれば，セル棄却率に対する近似式は安全側の評価を与えることを示しており， $error_{AY}$  や  $error_{AX}$  が負であれば，危険側の評価となっていることを示している．

ここで， $\rho = 0.8$  とし， $Z$  は平均 0.8 の幾何分布に従うものとした． $D$  が 3.2 節の DT, DG, DS, DL の場合に対して  $P_{loss}$  と， $AY$ ,  $AX$ ，さらに  $error_{AY}$ ,  $error_{AX}$  を求めた．その得られた結果を，DT については表 1 に，DG については表 2 に，DS については表 3 に，DL については表 4 に示す． $error_{AY}$ ,  $error_{AX}$  については百分率で示した．

まず， $AY$  について考察する．表 1~表 4 より， $D$  の分布がどの場合でも誤差  $error_{AY}$  はおよそ 10% かそれ以下となっており，さらにどの場合においても安全側の評価となっている．また，バッファサイズ  $N$  が大きくなるにつれて誤差  $error_{AY}$  が小さくなっていく傾向がある．したがって， $AY$  はよい近似式であるといえる．

次に， $AX$  について考察する．表 1~表 4 より， $D$  の分布がどの場合でも誤差  $error_{AX}$  はおよそ 1% かそれ以下となっており， $AY$  よりもさらによりよい近似式になっている．DT の場合には誤差  $error_{AX}$  がマイナスになっているが，絶対値が 1% 以下でありほとんど問題とならないと考えられる．また，DG, DS, DL の場合には，厳密に  $error_{AX} = P_{loss}$  が成立している．これは，DG, DS, DL の場合はすべて， $D^{[0]}$  の分布が幾何分布であるからだと考えられる [9]．

以上のように，ここであげた近似式  $AY$  と  $AX$  はともによりよい近似式であるといえる．

## 4 結論

本報告書では，セルの到着過程に相関があり，その自己相関関数の見通しがよい離散時間単一サーバ待ち行列モデルに対して考察を行った．自己相関関数が劣指数的に減衰するモデルと指数的に減衰するモデルとを比較し，主に有限バッファのセル棄却率について数値実験を行い，自己相関関数の漸近的な特性がシステムの性能に与える影響について考察した．

その結果，自己相関関数が劣指数的にしか減衰しないモデルでは，指数的に減衰するモデルとは異なり，バッファのサイズを増やしてもセル棄却率を指数的に減少させることはできないことが分かった．同様に，サーバの処理能力を高めても，セル棄却率を指数的に減少させることはできないことが分かった．また，自己相関関数が劣指数的にしか減衰しないモデルでは，指数的に減衰するモデルと比べて，パッチサイズの分布に対する感度も鈍いことが分かった．さらに，無限バッファのシステム内セル数分布を用いて，有限バッファのセル棄却率を近似する近似式が見つかった．

このように，自己相関関数  $\gamma(k)$  が劣指数的にしか減衰しないシステムでは，そうでないシステムとは，全く異なった振る舞いをする事，セル棄却率を減少させるのは困難であることが分かった．また，自己相関関数が劣指数的に減衰するシステムならば，長期依存性を持つ場合もそうでない場合も，同じような振る舞いをする事も分かった．

本報告書では，単一サーバの待ち行列モデルを扱ったが，複数サーバの待ち行列モデルに対しても同様に解析し，計算手法を構築することが今後の課題である．

## 謝辞

本報告書の作成全般にわたり，細部に至るまで貴重なご指摘と熱心なご指導を頂いた滝根哲哉助教授，ならびに日頃からご教授頂き，本研究に対しても熱心なご指導を賜った福嶋雅夫教授に心より感謝致します．また，日頃からお世話頂いた山下信雄助手，本研究を進める上で数多くの助言を頂いた博士課程の増山博之さんをはじめとする最適化数理研究室の皆様は厚く御礼申し上げます．

## 参考文献

- [1] A. Baltrūnas and E. Omey, “Second-order renewal theorem in the finite-means case,” *Theory of Probability and Its Application*, vol.47, pp.127–132, 2003.
- [2] C. Blondia, “A discrete-time batch Markovian arrival process as B-ISDN traffic model,” *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, vol.32, pp.3–23, 1993.
- [3] B. D. Choi, B. Kim, G. U. Hwang and J.-K. Kim, “The analysis of a multiserver queue fed by a discrete autoregressive process of order 1,” *Operations Research Letters*, vol.32, pp.85–93, 2004.
- [4] A. Elwalid, D. Heyman, T. V. Lakshman, D. Mitra and A. Weiss, “Fundamental bounds and approximations for ATM multiplexers with applications to video teleconferencing,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol.13, pp.1004–1016, 1995.
- [5] D. Heath, S. Resnick and G. Samorodnitsky, “Heavy tails and long range dependence in on/off processes and associated fluid models,” *Mathematics of Operations Research*, vol.23, pp.145–165, 1998.
- [6] G. U. Hwang, B. D. Choi and J.-K. Kim, “The waiting time analysis of a discrete-time queue with arrivals as a discrete autoregressive process of order 1,” *Journal of Applied Probability*, vol.39, pp.619–629, 2002.
- [7] G. U. Hwang and K. Sohraby, “On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs,” *Queueing Systems*, vol.43, pp.29–41, 2003.
- [8] G. U. Hwang and K. Sohraby, “On the queueing behavior of multiple first-order autoregressive inputs,” in preparation.
- [9] F. Ishizaki and T. Takine, “Cell loss probability approximations and their application to call admission control,” *Advances in Performance Analysis*, vol.2, pp.225–258, 1999.
- [10] C. Klüppelberg, “Subexponential distributions and integrated tails,” *Journal of Applied Probability*, vol.25, pp.132–141, 1988.
- [11] M. M. Krunz and A. M. Makowski, “Modeling video traffic using M/G/∞ input processes: A compromise between Markovian and LRD models,” *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, vol.16, pp.733–748, 1998.

- [12] Z. Liu, P. Nain, D. Towsley and Z.-L. Zhang, “Asymptotic behavior of a multiplexer fed by a long-range dependent process,” *Journal of Applied Probability*, vol.36, pp.105–118, 1999.
- [13] M. F. Neuts, *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. Marcel Dekker, New York, 1989.
- [14] M. Parulekar and A. M. Makowski, “Tail probabilities for M/G/ $\infty$  input processes (I): Preliminary asymptotics,” *Queueing Systems*, vol.27 pp.271–296, 1997.
- [15] V. Paxson and S. Floyd, “Wide area traffic: the failure of Poisson modeling,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol.3, pp.226–244, 1995.
- [16] B. Sengupta, “An invariance relationship for the G/G/1 queue,” *Advances in Applied Probability*, vol.21, pp.956–957, 1989.
- [17] 滝根哲哉, “有限状態マルコフ連鎖の数値解法とその応用,” 1995.
- [18] 滝根哲哉, “M/G/1 パラダイムと MAP/G/1 待ち行列,” 1994.
- [19] W. Willinger, M. S. Taqqu, R. Sherman, and D. Wilson, “Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol.5, pp.71–86, 1997.

## A 自己相関関数

### A.1 一般の場合

まず  $D$  が  $Z$  に依存する一般的な場合について考察する．この場合，定常状態において

$$E[D] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(Z = k)E[D | Z = k], \quad \Pr(B_n = k) = \frac{\Pr(Z = k)E[D | Z = k]}{E[D]}$$

である．さらに

$$\begin{aligned} E[B_n B_{n+l}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(B_n = k, \tilde{D} = j) E[B_n B_{n+l} | B_n = k, \tilde{D} = j] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} k \Pr(B_n = k, \tilde{D} = j) E[B_{n+l} | B_n = k, \tilde{D} = j] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(B_n = k, \tilde{D} = j) E[B_{n+l} | B_n = k, \tilde{D} = j] \right. \\ &\quad \left. + \Pr(B_n = k, \tilde{D} \geq l) E[B_{n+l} | B_n = k, \tilde{D} \geq l] \right] \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(B_n = k, \tilde{D} = j) E[B_{l-j}^*] + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Pr(B_n = k, \tilde{D} \geq l) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D} = j) E[B_n | \tilde{D} = j] E[B_{l-j}^*] + \Pr(\tilde{D} \geq l) E[B_n^2 | \tilde{D} \geq l] \end{aligned}$$

を得る．ここで  $B_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は 0 番目のスロットで新たな  $Z$  が決定されるという条件の下での  $n$  番目のスロットでの到着数を表す．表記の簡単化のため  $B_0^* = 0$  としておく．定義より以下の再生方程式を得る．

$$\begin{aligned} E[B_n^*] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(Z = k, D \geq n) + \sum_{m=1}^{n-1} \Pr(D = m) E[B_{n-m}^*] \\ &= P(D \geq n) E[Z | D \geq n] + \sum_{m=1}^n \Pr(D = m) E[B_{n-m}^*] \end{aligned}$$

よって  $E[B_n^*]$  は次式で与えられる．

$$E[B_n^*] = \sum_{m=1}^n z(n-m) \Pr(D \geq m) E[Z | D \geq m]$$

ただし  $z(m)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) は

$$f^{(0)}(0) = 1, \quad f^{(0)}(m) = 0 \quad (m \geq 1), \quad f^{(k)}(m) = \sum_{l=1}^m \Pr(D = l) f^{(k-1)}(m-l) \quad (m \geq 0, k \geq 1)$$

を用いて，形式的に  $z(m) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(m)$  で与えられる． $f^{(k)}(m)$  は  $D$  の確率関数の  $k$  重畳み込みであるので，

$$z(m) = \sum_{k=0}^m f^{(k)}(m)$$

を得る．

## A.2 $Z$ と $D$ が独立な場合

もし、 $Z$  と  $D$  が独立ならば  $E[Z] = E[B]$  である。さらに、

$$\begin{aligned} E[B_n^*] &= E[Z] \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{n-m} f^{(k)}(n-m) \Pr(D \geq m) \\ &= E[Z] \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-k} f^{(k)}(n-m) \Pr(D \geq m) \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{m=1}^{n-k} f^{(k)}(n-m) \Pr(D \geq m)$  が  $k+1$  番目の再生点で、初めて  $n$  以上となる確率を表しているため

$$E[B_n^*] = E[Z]$$

となる。よって

$$\begin{aligned} E[B_n B_{n+l}] &= \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D} = j) E[B_n | \tilde{D} = j] E[B_{l-j}^*] + \Pr(\tilde{D} \geq l) E[B_n^2 | \tilde{D} \geq l] \\ &= E[Z]^2 \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D} = j) + \Pr(\tilde{D} \geq l) E[Z^2] \\ &= E[Z]^2 + \Pr(\tilde{D} \geq l) \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

を得る。以上より、相関関数  $\gamma(k)$  は

$$\begin{aligned} \gamma(l) &= \frac{E[B_n B_{n+l}] - E[B]^2}{\text{Var}[B]} \\ &= \Pr(\tilde{D} \geq l) \end{aligned}$$

で与えられる。

## A.3 $\Pr(D = v | Z \geq 1) = \Pr(D^{[+]} = v)$ の場合

### A.3.1 陽表現

$\Pr(D = v | Z \geq 1) = \Pr(D^{[+]} = v)$  の場合について、自己相関関数の陽表現を求める。この場合、

$$E[B] = \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} E[Z], \quad E[B^2] = \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} E[Z^2]$$

となる。また、

$$\begin{aligned} E[B_n B_{n+l}] &= \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(B_n = k, \tilde{D} = j) E[B_{l-j}^*] + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Pr(B_n = k, \tilde{D} \geq l) \\ &= E[B] \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) E[B_{l-j}^*] + \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) E[B^2] \\ &= E[B] \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) E[B_{l-j}^*] + \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) E[B]^2 + \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) \text{Var}[B] \\ &= E[B] \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) E[B_{l-j}^*] - E[B]^2 \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) \\ &\quad + E[B]^2 + \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) \text{Var}[B] \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\gamma(l) &= \frac{E[B_n B_{n+l}] - E[B]^2}{\text{Var}[B]} \\
&= \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) + \frac{E[B]}{\text{Var}[B]} \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) \{E[B_{l-j}^*] - E[B]\} \\
&= \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) + \frac{E[Z]}{E[Z^2] - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} E[Z]^2} \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) \{E[B_{l-j}^*] - E[B]\} \\
&= \Pr(\tilde{D}^{[+]} \geq l) + \frac{E[Z]}{\text{Var}[Z] + \left(1 - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]}\right) E[Z]^2} \sum_{j=0}^{l-1} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) \{E[B_{l-j}^*] - E[B]\}
\end{aligned}$$

を得る.

一方,

$$\begin{aligned}
E[B_n^*] &= \sum_{m=1}^n z(n-m) \left[ \Pr(D \geq m, Z=0) E[Z | D \geq m, Z=0] \right. \\
&\quad \left. + \Pr(D \geq m, Z \geq 1) E[Z | D \geq m, Z \geq 1] \right] \\
&= \sum_{m=1}^n z(n-m) \Pr(D^{[+]} \geq m) \Pr(Z \geq 1) E[Z | Z \geq 1] \\
&= \sum_{m=1}^n z(n-m) \Pr(D^{[+]} \geq m) \Pr(Z \geq 1) \frac{E[Z]}{\Pr(Z \geq 1)} \\
&= E[Z] \sum_{m=1}^n z(n-m) \Pr(D^{[+]} \geq m) \\
&= E[Z] \sum_{m=0}^{n-1} z(n-1-m) \Pr(D^{[+]} > m)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\gamma(l+1) = \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) + \frac{E[Z]^2}{\text{Var}[Z] + \left(1 - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]}\right) E[Z]^2} f(l), \quad l = 0, 1, \dots$$

を得る. ただし

$$\begin{aligned}
f(l) &= \sum_{j=0}^l \Pr(\tilde{D}^{[+]} = j) \sum_{m=0}^{l-j} z(l-j-m) \Pr(D^{[+]} > m) - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(\tilde{D}^{[+]} \leq l) \\
&= \frac{1}{E[D^{[+]}]} \sum_{j=0}^l z(l-j) \sum_{m=0}^j \Pr(D^{[+]} > m) \Pr(D^{[+]} > j-m) - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(\tilde{D}^{[+]} \leq l)
\end{aligned}$$

である.

### A.3.2 漸近特性

$\gamma(l)$  の漸近特性を考察するために必要な準備を行う. まず, 記号  $\sim$  を導入する.

$$f_n \sim g_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{g_n} = 1$$



以下では  $D^{[+]}$  が正則変動 (regularly-varying) する裾野をもち (パレート分布はその特別な場合に対応) ,  $D^{[0]}$  が

$$\Pr(D^{[0]} > n) = o(\Pr(D^{[+]} > n))$$

であるとする . また

$$q(j) = \sum_{m=0}^j \Pr(D^{[+]} > m) \Pr(D^{[+]} > j - m)$$

と置く . ここで

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k) = E[D^{[+]}]^2$$

に注意すると

$$\begin{aligned} f(l) &= \frac{1}{E[D^{[+]}]} \sum_{j=0}^l z(l-j)q(j) - \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(\tilde{D}^{[+]} \leq l) \\ &= \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) - \frac{1}{E[D^{[+]}]} \left( \frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} - \sum_{j=0}^l z(l-j)q(j) \right) \end{aligned}$$

と書き換えることができる .

まず , [10] の p.133 の結果から

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q(j)}{\Pr(D^{[+]} > j)} = 2E[D^{[+]}]$$

である . よって , [1] の系 3.3 より

$$\sum_{j=0}^l z(l-j)q(j) - \frac{1}{E[D]} \sum_{k=0}^l q(k) = O(1) \left[ q(l) \sum_{k=0}^l \Pr(\tilde{D}^{[+]} > k) + \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) \sum_{k=0}^l q(k) \right]$$

を得る . 書き換えると

$$\begin{aligned} &\frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} - \sum_{j=0}^l z(l-j)q(j) \\ &= \frac{1}{E[D]} \sum_{k=l+1}^{\infty} q(k) + O(1) \left[ q(l) \sum_{k=0}^l \Pr(\tilde{D}^{[+]} > k) + \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) \sum_{k=0}^l q(k) \right] \end{aligned}$$

となる . ここで  $q(j) \sim 2E[D^{[+]}] \Pr(D^{[+]} > j)$  , さらに , [10] の p.136 の結果より

$$\sum_{k=j}^{\infty} q(k) \sim 2E[D^{[+]}]^2 \Pr(\tilde{D}^{[+]} > j)$$

である . これらに注意して , 両辺を  $\Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)$  で割って  $l \rightarrow \infty$  の極限をとると ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} - \sum_{j=0}^l z(l-j)q(j)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)} = \frac{2E[D^{[+]}]^2}{E[D]} + O(1)E[D^{[+]}]^2$$

を得る . ここで

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\Pr(D^{[+]} > l)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)} \sum_{k=0}^l \Pr(\tilde{D}^{[+]} > k) = 0$$

を用いた．すなわち，ある正定数  $K$  が存在し

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{f(l)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)} < K$$

となる．

特に  $\alpha > 1$  なる  $\alpha$  と  $n \rightarrow \infty$  で緩慢変動 (slowly varying) する  $L(n)$  に対して

$$\Pr(D^{[+]} > n) = n^{-\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

である (すなわち指数  $-\alpha$  をもつ正則変動である) 場合を考える．このとき

$$\Pr(\tilde{D}^{[+]} = n) = \frac{n^{-\alpha}}{E[D^{[+]}]} L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

であるので，

$$\begin{aligned} \frac{\Pr(\tilde{D}^{[+]} > n)}{n^{-(\alpha-1)}} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Pr(\tilde{D}^{[+]} = k)}{n^{-(\alpha-1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)^{-\alpha} \Pr(\tilde{D}^{[+]} = n+k)}{n^{-(\alpha-1)} (n+k)^{-\alpha}} \end{aligned}$$

となる．さらに

$$\frac{\Pr(\tilde{D}^{[+]} = n+k)}{(n+k)^{-\alpha}} = \frac{1}{E[D^{[+]}]} L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

であり，

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(\alpha-1)} = \int_{1+1/n}^{\infty} x^{-\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)^{-\alpha}}{n^{-(\alpha-1)}} \leq \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

であるので

$$\Pr(\tilde{D}^{[+]} > n) = \frac{1}{(\alpha-1)E[D^{[+]}]} n^{-(\alpha-1)} L(n), \quad n \rightarrow \infty \quad (14)$$

を得る．

一方，

$$q(n) \sim \frac{2E[D^{[+]}]}{\Pr(Z \geq 1)} \Pr(D > n)$$

となる．これより  $1 < \alpha < 2$  の場合には，[5] の定理 3.1 より

$$\begin{aligned} \frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} - \sum_{j=0}^l z(l-j)q(j) &= \frac{1}{(\alpha-1)E[D]} \left( \frac{2E[D^{[+]}]}{\Pr(Z \geq 1)} - \frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} \right) l^{-(\alpha-1)} \Pr(Z \geq 1) L(l) \\ &= \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \left( 2E[D^{[+]}] - \frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} \Pr(Z \geq 1) \right) \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l), \quad l \rightarrow \infty \end{aligned}$$

を得る．ここで式 (14) を用いた．よって

$$\begin{aligned}
f(l) &\sim \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) - \frac{1}{E[D^{[+]}]} \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \left( 2E[D^{[+]}] - \frac{E[D^{[+]}]^2}{E[D]} \Pr(Z \geq 1) \right) \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) \\
&= \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \left( 1 + \frac{E[D^{[+]}]}{E[D]} \Pr(Z \geq 1) - 2 \right) \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) \\
&= -\frac{E[D^{[+]}]}{E[D]^2} \left( E[D] - \Pr(Z \geq 1)E[D^{[+]}] \right) \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l) \\
&= -\frac{E[D^{[+]}]E[D^{[0]}]}{E[D]^2} \Pr(Z = 0) \Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)
\end{aligned}$$

を得る．

以上のことから  $1 < \alpha < 2$  なる  $\alpha$  と  $n \rightarrow \infty$  で緩慢変動 (slowly varying) する  $L(n)$  に対して

$$\Pr(D^{[+]} > n) = n^{-\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

である場合，

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma(l+1)}{\Pr(\tilde{D}^{[+]} > l)} = 1 - \frac{E[Z]^2}{\text{Var}[Z] + \left(1 - \frac{E[D^{[+]}}{E[D]}\right) E[Z]^2} \frac{E[D^{[0]}]E[D^{[+]}}{E[D]^2} \Pr(Z = 0)$$

となる．

## B 定理 1 の証明

証明 まず，(i)  $S_n = i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) と (ii)  $S_n = 0$  の場合に分けて， $\sum_{k=0}^{\infty} A_{i,j}(k)z^k$  を求める．

(i)  $S_n = i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) の場合

まず  $\Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$  を求めると

$$\Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \begin{cases} T_{i,j}, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ t_i, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 0 \end{cases}$$

となる．次に  $\Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = i)$  を求める． $S_n = i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) のとき， $S_{n+1}$  の値に関わらず  $H_n = 1$  であり，その間に到着するセルの個数は 0 である．このとき  $A_n = 0$  であるので，

$$\Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = i) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} A_{i,j}(k)z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = i) \Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = i)z^k \\
&= \begin{cases} T_{i,j}, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ t_i, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．

(ii)  $S_n = 0$  の場合

まず  $\Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = 0)$  を求めると,

$$\Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = 0) = \begin{cases} b(0)[\alpha T]_j, & j = 1, 2, \dots, M \\ 1 - b(0) + b(0)\alpha t, & j = 0 \end{cases}$$

である。ただし  $[\alpha T]_j$  は  $\alpha T$  の第  $j$  成分 ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) である。次に,  $\Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = 0)$  を (a)  $S_{n+1} = j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) と, (b)  $S_{n+1} = 0$  の場合に分けて求める。

(a)  $S_n = 0, S_{n+1} = j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) のとき

$H_n = 1$  であり, その間に到着するセル数は 0 である。つまり  $A_n = 0$  であるので,

$$\Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = 0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, M$$

である。

(b)  $S_n = 0, S_{n+1} = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \Pr(B_{\tau(n)} = u \mid S_{n+1} = 0, S_n = 0) &= \frac{\Pr(B_{\tau(n)} = u, S_{n+1} = 0 \mid S_n = 0)}{\Pr(S_{n+1} = 0 \mid S_n = 0)} \\ &= \begin{cases} \frac{b(0)\alpha t}{1 - b(0) + b(0)\alpha t}, & u = 0 \\ \frac{b(u)}{1 - b(0) + b(0)\alpha t}, & u = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

となる。もし,  $B_{\tau(n)} = 0$  ならば, 必ず  $H_n = 1$  であり, 次の観察スロットまでに到着するセル数は 0, つまり  $A_n = 0$  である。一方,  $B_{\tau(n)} \geq 1$  ならば,  $H_n = v$  である確率は  $\Pr(D^{[+]} = v) = d(v)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) である。そして  $B_{\tau(n)} = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ),  $H_n = v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) のとき,  $A_n = uv - v + 1$  である。したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = 0, S_n = 0) z^k \\ = \frac{b(0)\alpha t}{1 - b(0) + b(0)\alpha t} + \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b(u)d(v)}{1 - b(0) + b(0)\alpha t} z^{uv-v+1} \end{aligned}$$

となる。

(a) と (b) より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_{0,j}(k) z^k &= \Pr(S_{n+1} = j \mid S_n = 0) \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(A_n = k \mid S_{n+1} = j, S_n = 0) z^k \\ &= \begin{cases} b(0)[\alpha T]_j, & j = 1, 2, \dots, M \\ b(0)\alpha t + \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b(u)d(v) z^{uv-v+1}, & j = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(i), (ii) より,

$$\mathbf{A}^*(z) = \begin{pmatrix} b(0)\alpha t + \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} b(u)d(v)z^{uv-v+1} & b(0)\alpha T \\ t & T \end{pmatrix}$$

となる.

□

## C 式(6)の証明

証明 定義より,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*(1)$  であるので,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b(0)\alpha t + 1 - b(0) & b(0)\alpha T \\ t & T \end{pmatrix}$$

となる. ここで,  $\pi$  が  $\mathbf{A}$  の不変確率ベクトルであることから

$$(\pi_0, \pi_+) \begin{pmatrix} b(0)\alpha t + 1 - b(0) & b(0)\alpha T \\ t & T \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_+), \quad (\pi_0, \pi_+)e = 1$$

となる. これより,

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_+e = 1 \\ \pi_0(b(0)\alpha t + 1 - b(0)) + \pi_+t = \pi_0 \\ \pi_0b(0)\alpha T + \pi_+T = \pi_+ \end{cases}$$

が成立する. この第3式から,

$$\pi_+ = \pi_0 b(0)\alpha T (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$$

となり, 第1式に代入すると,

$$\pi_0 (1 + b(0)\alpha T (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e) = 1$$

となる. したがって

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + b(0)\alpha T (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e}$$

となる. ここで,  $\alpha(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e = E[D^{[0]}]$  であることから,

$$\begin{aligned} \alpha T (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e &= \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e - \alpha \mathbf{I} (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e + \alpha T (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e \\ &= \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e - \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{T})(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}e \\ &= E[D^{[0]}] - 1 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + b(0)(E[D^{[0]}] - 1)}$$

となる.

一方,  $\sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} = \pi_0$ ,  $\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,j} = 1 - \pi_0$  となることを用いると, 定義から

$$\begin{aligned} E[H_n] &= \Pr(S_n = 0)E[H_n | S_n = 0] + \sum_{i=1}^M \Pr(S_n = i)E[H_n | S_n = i] \\ &= \pi_0 (b(0) \cdot 1 + (1 - b(0))E[D^{[+]}]) + (1 - \pi_0) \cdot 1 \\ &= 1 + \pi_0(1 - b(0))(E[D^{[+]}] - 1) \end{aligned}$$

である．これより，式 (3) から

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_0 E[D^{[+]}]E[Z]}{E[H]} &= \frac{E[D^{[+]}]E[Z]}{E[H]/\pi_0} \\
&= \frac{E[D^{[+]}]E[Z]}{1/\pi_0 + (1 - b(0))(E[D^{[+]}] - 1)} \\
&= \frac{E[D^{[+]}]E[Z]}{b(0)E[D^{[0]}] + (1 - b(0))E[D^{[+]}]} \\
&= \rho
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．よって式 (5) , (15) を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \rho_A}{E[H]} &= \frac{1 - \pi\beta}{E[H]} \\
&= \frac{1 - \pi_0\beta_0}{E[H]} \\
&= \frac{1 - \pi_0(E[Z]E[D^{[+]}] - (1 - b(0))(E[D^{[+]}] - 1))}{E[H]} \\
&= \frac{(1 + \pi_0(1 - b(0))(E[D^{[+]}] - 1)) - \pi_0E[Z]E[D^{[+]}]}{E[H]} \\
&= \frac{E[H] - \pi_0E[Z]E[D^{[+]}]}{E[H]} \\
&= 1 - \rho
\end{aligned}$$

となる．よって，式 (6) は成立する．

□

## D 定理 4 の証明

証明 まず，式 (7) を示す．そのためにまず，定常状態における任意のあるスロットでのシステム内セル数を  $Y$  とし，そのスロットとそのスロット以前で一番近い観察スロットとの間隔を  $\tilde{H}$  とする．そして，その観察スロットにおけるシステム内セル数を  $X$ ，観察スロットの状態を  $S$  とし，その観察スロットにおいて到着したセルのバッチサイズを  $B$  とする．このとき

$$\Pr(\tilde{H} = h) = \frac{\Pr(H > h)}{E[H]}, \quad h = 0, 1, \dots$$

が成立する．そこでまず  $\Pr(\tilde{H} = h)$  を求める．いま，

$$\Pr(H = v \mid X = k) = \begin{cases} \frac{1}{x_k e} \left( \sum_{j=1}^M x_{k,j} + x_{k,0}b(0) + x_{k,0}(1 - b(0))d(1) \right), & v = 1 \\ \frac{1}{x_k e} x_{k,0}(1 - b(0))d(v), & v = 2, 3, \dots \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

であるので

$$\Pr(H = v) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(H = v \mid X = k) \Pr(X = k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(H = v | X = k) \mathbf{x}_k \mathbf{e} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^M x_{k,j} + x_{k,0} b(0) + x_{k,0} (1 - b(0)) d(1) \right), & v = 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} (1 - b(0)) d(v), & v = 2, 3, \dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1 - \pi_0) + \pi_0 b(0) + \pi_0 (1 - b(0)) d(1), & v = 1 \\ \pi_0 (1 - b(0)) d(v), & v = 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．ここで， $\pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0}$ ， $1 - \pi_0 = \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,j}$  となることを用いた．  
また

$$\begin{aligned}
\Pr(H > h) &= \sum_{v=h+1}^{\infty} \Pr(H = v) \\
&= \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} (1 - b(0)) \sum_{v=h+1}^{\infty} d(v), & h = 1, 2, \dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \pi_0 (1 - b(0)) \bar{d}(h), & h = 1, 2, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

が成立する．よって

$$\Pr(\tilde{H} = h) = \begin{cases} \frac{1}{E[H]}, & h = 0 \\ \frac{\pi_0 (1 - b(0)) \bar{d}(h)}{E[H]}, & h = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

となる．

ここで  $\tilde{H} = 0$  の場合を考える． $k = 0, 1, \dots$  に対して

$$\Pr(X = k, S = j | \tilde{H} = 0) = x_{k,j}, \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (17)$$

が成立する．一方  $\tilde{H} \geq 1$  ならば必ず  $S = 0$  であるので， $k = 0, 1, \dots$  に対して

$$\begin{aligned}
\Pr(X = k, S = j | \tilde{H} = h) &= \begin{cases} \frac{x_{k,0} (1 - b(0))}{\sum_{l=0}^{\infty} x_{l,0} (1 - b(0))}, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} & h = 1, 2, \dots \\
&= \begin{cases} \frac{x_{k,0}}{\pi_0}, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} & h = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (18)
\end{aligned}$$

が成立する．

以上の準備のもとで， $\tilde{H}$ ， $S$ ， $X$  が得られた場合， $Y$  はどのように表されるのか以下のように場合分けをして考察する．

(i)  $\tilde{H} = 0$ ， $S = j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ )， $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) のとき

$Y = k$  となる．

(ii)  $\tilde{H} = 0, S = 0, X = k, (k = 0, 1, \dots)$  のとき

$Y = k$  となる .

(iii)  $\tilde{H} = h (h = 1, 2, \dots), S = 0, X = 0$  の場合

$B = u (u = 1, 2, \dots)$  に対して ,  $Y = 1 + h(u - 1)$  となる .

(iv)  $\tilde{H} = h (h = 1, 2, \dots), S = 0, X = k (k = 1, 2, \dots)$  の場合

$B = u (u = 1, 2, \dots)$  に対して ,  $Y = k + h(u - 1)$  となる .

ここで ,  $y_{k,j} (k = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, M)$  を ,  $y_{k,j} = \Pr(Y = k, S = j)$  と定義する . このとき , (i) から式 (16) , (17) を用いると ,  $j = 1, 2, \dots, M$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} y_{k,j} z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(\tilde{H} = 0) \Pr(X = k, S = j | \tilde{H} = 0) z^k \\ &= \frac{1}{E[H]} \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,j} z^k \end{aligned}$$

となる . 一方 (ii) , (iii) , (iv) から , 式 (16) , (17) , (18) を用いると ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} y_{k,0} z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(\tilde{H} = 0) \Pr(X = k, S = 0 | \tilde{H} = 0) z^k \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \Pr(\tilde{H} = h) \Pr(X = 0, S = 0 | \tilde{H} = h) \\ &\quad \quad \quad \cdot \Pr(B = u | X = 0, S = 0, \tilde{H} = h) z^{1+h(u-1)} \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \Pr(\tilde{H} = h) \Pr(X = k, S = 0 | \tilde{H} = h) \\ &\quad \quad \quad \cdot \Pr(B = u | X = k, S = 0, \tilde{H} = h) z^{k+h(u-1)} \\ &= \frac{1}{E[H]} \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^k + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\pi_0(1-b(0))\bar{d}(h)}{E[H]} \frac{x_{0,0}}{\pi_0} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{b(u)}{1-b(0)} z^{1+h(u-1)} \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\pi_0(1-b(0))\bar{d}(h)}{E[H]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k,0}}{\pi_0} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{b(u)}{1-b(0)} z^{k+h(u-1)} \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^k + z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^{(k-1)+} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \end{aligned}$$

となる . したがって ,  $Y^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(Y = k) z^k$  とすると ,

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_{k,0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^M y_{k,j} z^k \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^*(z) \mathbf{e} + z \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \end{aligned}$$

となる . よって式 (7) は成立する .

続いて , 式 (8) を示す . そこでまず , システムに到着したあるセルに着目する . そして ,  $\bar{H} (\bar{H} = 1, 2, \dots)$  をその着目したセルが到着したスロットと , それより前の観察スロットで一番近い観察ス



ロットとの間隔とする．そしてその着目したセルが含まれるバッチのサイズを  $B$  ( $B = 1, 2, \dots$ ) とし，着目したセルは，そのバッチの中で  $l$  番目に処理を受けるものとする．

セルが到着する場合，観察スロットでのマルコフ連鎖の状態は必ず 0 であり，バッチサイズは 1 以上である．さらに，着目したセルが含まれるバッチのサイズが  $u$  である確率は  $ub(u)/E[Z]$  であるので，

$$\begin{aligned} \Pr(B = u, \bar{H} = h, X = k) &= \Pr(B = u, \bar{H} = h, X = k \mid S = 0, Z \geq 1) \\ &= \frac{1}{\Pr(S = 0, Z \geq 1)} \Pr(X = k, S = 0, B = u, \bar{H} = h) \\ &= \frac{1}{\pi_0(1 - b(0))} \cdot x_{k,0} \cdot \frac{ub(u)}{E[Z]} \cdot \bar{d}(h - 1) \\ &= \frac{x_{k,0} \bar{d}(h - 1) ub(u)}{\pi_0 E[D^{[+]}] E[Z]} \end{aligned}$$

となる．到着したバッチサイズが  $u$  であるという条件の下で，そのセルがバッチの中で  $l$  番目に処理される確率は  $1/u$  ( $l = 1, 2, \dots, u$ ) である．したがって，

$$\begin{aligned} \Pr(L = l, B = u, \bar{H} = h, X = k) &= \Pr(B = u, \bar{H} = h, X = k) \Pr(L = l \mid B = u, \bar{H} = h, X = k) \\ &= \frac{x_{k,0} \bar{d}(h - 1) ub(u)}{\pi_0 E[D^{[+]}] E[Z]} \cdot \frac{1}{u}, \quad l = 1, 2, \dots, u \\ &= \frac{x_{k,0} b(u) \bar{d}(h - 1)}{\pi_0 E[D^{[+]}] E[Z]}, \quad l = 1, 2, \dots, u \end{aligned}$$

となる．

$X = k$  ( $k = 0, 1, \dots$ )， $\bar{H} = h$  ( $h = 1, 2, \dots$ )， $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ )， $L = l$  ( $l = 1, 2, \dots, u$ ) の時，待ち時間は  $(k - 1)^+ + (h - 1)(u - 1) + l - 1$  であるから，式 (15) を用いると，

$$\begin{aligned} W^*(z) &= \frac{1}{\pi_0 E[D^{[+]}] E[Z]} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{l=1}^u x_{k,0} b(u) \bar{d}(h - 1) z^{(k-1)^+ + (h-1)(u-1) + l - 1} \\ &= \frac{1}{\pi_0 E[D^{[+]}] E[Z]} \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^{(k-1)^+} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \sum_{l=1}^u z^{l-1} \\ &= \frac{1}{\rho E[H]} \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \sum_{l=1}^u z^{l-1} \end{aligned}$$

となる．よって式 (8) は成立する． □

## E 無限バッファにおけるシステム内セル数分布の平均と 2 次の階乗積率

ここでは，無限バッファにおけるシステム内セル数分布の平均と 2 次の階乗積率を与える．まず，

$$\mathbf{x}^{(m)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^m}{dz^m} \mathbf{x}^*(z), \quad \mathbf{A}^{(m)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^m}{dz^m} \mathbf{A}^*(z)$$

を定義する．このとき， $\mathbf{x}(z)$  の微分公式が知られており，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{x}^{(1)} \mathbf{e} &= \frac{1}{2(1 - \rho)} \left( \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{e} + 2\mathbf{x}_0 \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{e} + 2\{\mathbf{x}_0 \mathbf{A} - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(1)})\} [\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{e} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(1)} \mathbf{e} \pi + \{x_0 \mathbf{A} - \pi(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(1)})\} [\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{e} \pi]^{-1} \\
\mathbf{x}^{(2)} \mathbf{e} &= \frac{1}{3(1-\rho)} \left( \pi \mathbf{A}^{(3)} \mathbf{e} + 3\mathbf{x}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{e} + 3x_0 \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{e} \right. \\
&\quad \left. + 3\{\pi \mathbf{A}^{(2)} + 2x_0 \mathbf{A}^{(1)} - 2\mathbf{x}^{(1)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(1)})\} [\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{e} \pi]^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{e} \right) \\
\mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(2)} \mathbf{e} \pi + \{x_0 \mathbf{A}^{(2)} + 2x_0 \mathbf{A}^{(1)} - 2\mathbf{x}^{(1)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(1)})\} [\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{e} \pi]^{-1}
\end{aligned}$$

となる [18].

ここで,

$$b^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k) z^k, \quad d^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k) z^k, \quad b^{(m)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^m}{dz^m} b^*(z), \quad d^{(m)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^m}{dz^m} d^*(z)$$

と定義し, さらに

$$x_0^{(m)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^m}{dz^m} x_0^*(z)$$

と定義する.

定理 8 システム内セル数分布の平均  $Y^{(1)}$  と, 2 次の階乗積率  $Y^{(2)}$  は以下の式で表される.

$$\begin{aligned}
Y^{(1)} &= \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^{(1)} \mathbf{e} + (x_0^{(1)} + x_{0,0})(1 - b(0))(d^{(1)} - 1) + \pi_0 \frac{1}{2} (b^{(1)} - (1 - b(0))) d^{(2)} \right) \\
Y^{(2)} &= \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^{(2)} \mathbf{e} + x_0^{(2)}(1 - b(0))(d^{(1)} - 1) + 2(x_0^{(1)} + x_{0,0}) (b^{(1)} - (1 - b(0))) d^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + \pi_0 \left( b^{(2)} \left( \frac{1}{3} d^{(3)} + \frac{1}{2} d^{(2)} \right) - (b^{(1)} - (1 - b(0))) \left( \frac{1}{3} d^{(3)} + d^{(2)} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

証明 式 (7) より,

$$Y^*(z) = \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^*(z) \mathbf{e} + (x_0^*(z) - x_{0,0} + zx_{0,0}) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right)$$

となる. この両辺を微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} Y^*(z) &= \frac{1}{E[H]} \left( \frac{d}{dz} \mathbf{x}^* \mathbf{e} + \left( \frac{d}{dz} x_0^*(z) + x_{0,0} \right) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right. \\
&\quad \left. + (x_0^*(z) - x_{0,0} + zx_{0,0}) \frac{d}{dz} \left( \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

なる. さらに, 微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} Y^*(z) &= \frac{1}{E[H]} \left( \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{x}^* \mathbf{e} + \left( \frac{d^2}{dz^2} x_0^*(z) \right) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \frac{d}{dz} x_0^*(z) + x_{0,0} \right) \frac{d}{dz} \left( \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + (x_0^*(z) - x_{0,0} + zx_{0,0}) \frac{d^2}{dz^2} \left( \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

となる．これら二つの式に対して，それぞれ両辺  $z \rightarrow 1$  の極限をとることにより， $Y^{(1)}$  と  $Y^{(2)}$  を得る．ただし，

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) \\ &= (1 - b(0)) (d^{(1)} - 1) \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (h(u-1)) b(u) \bar{d}(h) \\ &= \frac{1}{2} (b^{(1)} - (1 - b(0))) d^{(2)} \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left( \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (h(u-1)) (h(u-1) - 1) b(u) \bar{d}(h) \\ &= b^{(2)} \left( \frac{1}{3} d^{(3)} + \frac{1}{2} d^{(2)} \right) \\ &\quad - (b^{(1)} - (1 - b(0))) \left( \frac{1}{3} d^{(3)} + d^{(2)} \right) \end{aligned}$$

を用いた．

□

## F 式 (9) の証明

証明 まず  $x_0^*(z)$ ， $x_+^*(z)$ ， $\tilde{x}_+^*(z)$  を，

$$x_0^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^k, \quad x_+^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k,+} z^k, \quad \tilde{x}_+^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k,+} z^{(k-1)^+}$$

と定義する．ただし， $\mathbf{x}_{k,+}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) は  $1 \times M$  ベクトルで， $\mathbf{x}_{k,+} = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,M})$  である．さらに， $b^*(z)$  を  $b^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k) z^k$  と定義する．

定常状態においては，あるスロットにおけるシステム内セル数分布とその次のスロットにおけるシステム内セル数分布が等しいので

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) b^*(z) + z \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \cdot z^{u-1} + \tilde{x}_+^*(z) \mathbf{e} \right) \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_+^*(z) \mathbf{e} + \tilde{x}_0^* b^*(z) + \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)+u} \right) \end{aligned}$$

が成立する．一方，式 (8) より，

$$\begin{aligned} \rho W^*(z) (1 - z) &= \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \cdot (1 - z^u) \right) \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) - \tilde{x}_0^*(z) \sum_{u=1}^{\infty} b(u) z^u + \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)+u} \right) \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) - \tilde{x}_0^* b^*(z) + \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \end{aligned}$$

$$- \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)+u}$$

となる．これらを両辺加えると，

$$Y^*(z) + \rho(1-z)W^*(z) = \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z)\mathbf{e} + \tilde{x}_0^*(z) + \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right)$$

となる．定義より，

$$x_0^*(z) = z\tilde{x}_0^*(z) - zx_0^*(0) + x_0^*(0), \quad \mathbf{x}_+^*(z) = z\tilde{\mathbf{x}}_+^*(z) - z\mathbf{x}_+^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0),$$

であるから，式 (7) より

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \frac{1}{E[H]} \left( z\tilde{x}_0^*(z) - zx_0^*(0) + x_0^*(0) + z\tilde{\mathbf{x}}_+^*(z)\mathbf{e} - z\mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e} + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e} \right. \\ &\quad \left. + z \cdot \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \\ &= \frac{1}{E[H]} (x_0^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e}) - z \cdot \frac{1}{E[H]} (x_0^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e}) \\ &\quad + z \cdot \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z)\mathbf{e} + \tilde{x}_0^*(z) + \tilde{x}_0^*(z) \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{h(u-1)} \right) \\ &= \frac{1}{E[H]} (x_0^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e}) - z \cdot \frac{1}{E[H]} (x_0^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e}) + z(Y^*(z) + \rho(1-z)W^*(z)) \end{aligned}$$

となる．ゆえに， $(x_0^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0)\mathbf{e})/E[H] = Y^*(0) = 1 - \rho$  であることから

$$(1-z)Y^*(z) = 1 - \rho - z(1-\rho) + z\rho(1-z)W^*(z)$$

となる．これより式 (9) が成立する． □

## G 定理5の証明

証明 付録Bと同様にして，(i)  $S_n = i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) の場合と，(ii)  $S_n = 0$  の場合に分けて  $\sum_{k=0}^{\infty} A'_{i,j}(k)z^k$  と， $\sum_{k=0}^{\infty} A''_{i,j}(k)z^k$  を求める．

(i)  $S_n = i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) である場合

必ず  $H_n = 1$  である．したがって，付録Bと同様にして

$$\sum_{k=0}^{\infty} A'_{i,j}(k)z^k = \begin{cases} T_{i,j}, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ t_i, & i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 0 \end{cases}$$

となり

$$\sum_{k=0}^{\infty} A''_{i,j}(k)z^k = 0$$

となる．

(ii)  $S_n = 0$  である場合

さらに場合分けをして考える．

- (a)  $S_{n+1} = j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) である場合  
必ず  $H_n = 1$  である。したがって, 付録 B と同様にして

$$\sum_{k=0}^{\infty} A'_{0,j}(k)z^k = b(0)[\alpha \mathbf{T}]_j, j = 1, 2, \dots, M$$

となり

$$\sum_{k=0}^{\infty} A''_{0,j}(k)z^k = 0$$

となる。

- (b)  $S_{n+1} = 0$  かつ  $H_n = 1$  となる場合

$B_{\tau(n)} = 0$  かつ  $H_n = 1$  の場合か,  $B_{\tau(n)} = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) かつ  $H_n = 1$  の場合のいずれかである。 $B_{\tau(n)} = 0$  の場合, 必ず  $H_n = 1$  で  $A_n = 0$  であるので,

$$\begin{aligned} \Pr(A_n = 0, S_{n+1} = 0, H_n = 1 | S_n = 0) &= \Pr(B_{\tau(n)} = 0, S_{n+1} = 0 | S_n = 0) \\ &= b(0)\alpha t \end{aligned}$$

となる。 $B_{\tau(n)} = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) かつ  $H_n = 1$  の場合,  $A_n = u$  であるので,

$$\begin{aligned} \Pr(A_n = u, S_{n+1} = 0, H_n = 1 | S_n = 0) &= \Pr(B_{\tau(n)} = u, S_{n+1} = 0, H_n = 1 | S_n = 0) \\ &= b(u)d(1) \end{aligned}$$

となる。以上のことから,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A'_{0,0}(k)z^k = b(0)\alpha t + \sum_{u=1}^{\infty} b(u)d(1)z^u$$

となる。

- (c)  $S_{n+1} = 0$  かつ  $H_n \geq 2$  となる場合

$B_{\tau(n)} \geq 1$  の時に限る。 $B_{\tau(n)} = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) かつ  $H_n = v$  ( $v = 2, 3, \dots$ ) ならば  $A_n = v(u-1) + 1$  となることから,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A''_{0,0}(k)z^k = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=2}^{\infty} b(u)d(v)z^{v(u-1)+1}$$

となる。

(i), (ii) より

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^*(z) &= \begin{pmatrix} b(0)\alpha t + \sum_{u=1}^{\infty} b(u)d(1)z^u & b(0)\alpha \mathbf{T} \\ \mathbf{t} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}''^*(z) &= \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=2}^{\infty} b(u)d(v)z^{uv-v+1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

□

## H 定理7の証明

証明 まず, 式 (11) を示す. そのため, 定常状態における任意のロットにおけるシステム内セル数を  $Y$  とする. そのロットとそのロット以前で一番近い観察ロットとの間隔を  $\tilde{H}$  とする. このとき, 式 (16) が成立する. また,  $k = 0, 1, \dots, N$  に対して, 式 (17), (18) が成立する.

そこで以下では,  $\tilde{H}, S, X$  が得られた場合  $Y$  はどのように表されるのか以下のように場合分けをして考察する.

(i)  $\tilde{H} = 0, S = j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ),  $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) のとき  
 $Y = k$  となる.

(ii)  $\tilde{H} = 0, S = 0, X = k$ , ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) のとき  
 $Y = k$  となる.

(iii)  $\tilde{H} = 1, S = 0, X = 0$  の場合

直前のロットでのセル数が 0 であるので, システム内セル数は高々  $N$  である. したがって,  $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) に対して,  $Y = \min(u, N) = q(0, 1, u) + 1$  となる.

(iv)  $\tilde{H} = h$  ( $h = 2, 3, \dots$ ),  $S = 0, X = 0$  の場合

直前のロットでのセル数が 1 以上であるので, システム内セル数は高々  $N - 1$  である. したがって,  $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) に対して,  $Y = \min(hu - (h - 1), N - 1) = q(0, h, u) + 1$  となる.

(v)  $\tilde{H} = h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ),  $S = 0, X = k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) の場合

直前のロットでのセル数が 1 以上であるので, システム内セル数は高々  $N - 1$  である. したがって,  $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) に対して,  $Y = \min(k + hu - h, N - 1) = q(k, h, u) + 1$  となる.

ここで,  $y_{k,j}$  ( $k = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$ ) を,  $y_{k,j} = \Pr(Y = k, S = j)$  と定義する. このとき, (i) より,  $j = 1, 2, \dots, M$  の場合, 式 (16), (17) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N y_{k,j} z^k &= \sum_{k=0}^N \Pr(\tilde{H} = 0) \Pr(X = k, S = j | \tilde{H} = 0) z^k \\ &= \frac{1}{E[H]} \sum_{k=0}^N x_{k,j} z^k \end{aligned}$$

となる. 一方 (ii), (iii), (iv), (v) から, 式 (16), (17), (18) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N y_{k,0} z^k &= \sum_{k=0}^N \Pr(\tilde{H} = 0) \Pr(X = k, S = 0 | \tilde{H} = 0) z^k \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} \Pr(\tilde{H} = h) \sum_{k=0}^N \Pr(X = k, S = 0 | \tilde{H} = h) \\ &\quad \cdot \sum_{u=1}^{\infty} \Pr(B = u | X = 0, S = 0, \tilde{H} = 0) z^{q(k,h,u)+1} \\ &= \frac{1}{E[H]} \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,0} z^k + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\pi_0(1-b(0))\bar{d}(h)}{E[H]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k,0}}{\pi_0} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{b(u)}{1-b(0)} z^{q(k,h,u)+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} z^k + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k,h,u)+1} \right)$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} Y^*(z) &= \sum_{k=0}^N y_{k,0} z^k + \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^M y_{k,j} z^k \\ &= \frac{1}{E[H]} \left( \mathbf{x}^*(z) e + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k,h,u)+1} \right) \end{aligned}$$

となる．よって式 (11) は成立する．

続いて，式 (12) を示す．そこでまず，システムに到着したあるセルに着目する．そして， $\bar{H}$  ( $\bar{H} = 1, 2, \dots$ ) をそのセルが到着したスロットと，それより前の観察スロットで一番近い観察スロットとの間隔とする．いま， $\mathcal{I}$  は指示関数とし，着目したセルがシステムに入れる場合は  $\mathcal{I} = 1$ ，入れない場合は  $\mathcal{I} = 0$  とする．そしてその着目したセルが含まれるバッチのサイズを  $B$ ，着目したセルが含まれるバッチの中でシステム内に入れたセルの個数を  $B^{[in]}$  とする．さらに，着目したセルは（もしシステム内に入れれば）そのバッチの中で  $L$  番目に処理を受けるものとする．このとき，

$$\begin{aligned} &\Pr(X = k, \bar{H} = h, B = u, B^{[in]} = n \mid \mathcal{I} = 1) \\ &= \Pr(\bar{H} = h, X = k, B = u, B^{[in]} = n \mid S = 0, B \geq 1, \mathcal{I} = 1) \\ &= \frac{\Pr(\bar{H} = h, X = k, B = u, B^{[in]} = n, S = 0, B \geq 1, \mathcal{I} = 1)}{\Pr(S = 0, B \geq 1, \mathcal{I} = 1)} \\ &= \frac{\Pr(X = k, S = 0) \Pr(B \geq 1, \bar{H} = h \mid X = k, S = 0)}{\Pr(\mathcal{I} = 1) \Pr(S = 0) \Pr(B \geq 1 \mid S = 0)} \\ &\quad \cdot \Pr(\mathcal{I} = 1, B = u, B^{[in]} = n \mid X = k, S = 0, B \geq 1, \bar{H} = h) \end{aligned}$$

が成立する．

ここで， $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ )， $\bar{H} = 1$  で，なおかつ  $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) である場合，システムに入れるセル数は， $\min(u, N - k)$  である．したがって，式 (15) を用いると．

$$\begin{aligned} &\Pr(X = k, \bar{H} = 1, B = u, B^{[in]} = n \mid \mathcal{I} = 1) \\ &= \begin{cases} \frac{x_{k,0}(1-b(0))}{(\rho'/\rho)\pi_0(1-b(0))} \cdot \frac{\bar{d}(0)}{E[D^{[+]}]} \cdot \frac{nb(n)}{E[Z]}, & u < N - k, \quad n = u \\ \frac{x_{k,0}(1-b(0))}{(\rho'/\rho)\pi_0(1-b(0))} \cdot \frac{\bar{d}(0)}{E[D^{[+]}]} \cdot \frac{nb(u)}{E[Z]}, & u \geq N - k, \quad n = N - k \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho' E[H]} x_{k,0} n b(u), & u < N - k, \quad n = u \\ \frac{1}{\rho' E[H]} x_{k,0} n b(u), & u \geq N - k, \quad n = N - k \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho' E[H]} x_{k,0} n b(u), & n = \min(u, N - k) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となる．一方， $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ )， $\bar{H} = h$  ( $h = 2, 3, \dots$ ) で，なおかつ  $B = u$  ( $u = 1, 2, \dots$ ) である場合，着目したセルが到着するスロットにおけるシステム内セル数は  $q(k, h-1, u) + 1$  である．よって，システムに入れるセル数は  $\min(u, N - (q(k, h-1, u) + 1)) = \min(u, N - 1 - q(k, h-1, u))$  である．したがって， $k = 0, 1, \dots, N-1$ ， $h = 2, 3, \dots$ ， $u = 1, 2, \dots$  に対して，式 (15) を用いると，

$$\begin{aligned} & \Pr(X = k, \bar{H} = h, B = u, B^{[in]} = n \mid \mathcal{I} = 1) \\ &= \begin{cases} \frac{x_{k,0}(1-b(0))}{(\rho'/\rho)\pi_0(1-b(0))} \\ \quad \cdot \frac{\bar{d}(h-1)}{E[D^{[+]}]} \cdot \frac{nb(n)}{E[Z]}, & u < N-1-q(k, h-1, u), \quad n = u \\ \frac{x_{k,0}(1-b(0))}{(\rho'/\rho)\pi_0(1-b(0))} \\ \quad \cdot \frac{\bar{d}(h-1)}{E[D^{[+]}]} \cdot \frac{nb(u)}{E[Z]}, & u \geq N-1-q(k, h-1, u), \quad n = N-1-q(k, h-1, u) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho'E[H]} x_{k,0} \bar{d}(h-1) nb(n), & u < N-1-q(k, h-1, u), \quad n = u \\ \frac{1}{\rho'E[H]} x_{k,0} \bar{d}(h-1) nb(u), & u \geq N-1-q(k, h-1, u), \quad n = N-1-q(k, h-1, u) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho'E[H]} x_{k,0} \bar{d}(h-1) nb(u), & n = \min(u, N-1-q(k, h-1, u)) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となる．

以上より， $\Pr(L = l \mid B^{[in]} = n) = 1/n$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) であるから， $k = 0, 1, \dots$ ，に対して

$$\begin{aligned} & \Pr(X = k, \bar{H} = h, B = u, B^{[in]} = n, L = l \mid \mathcal{I} = 1) \\ &= \begin{cases} \frac{x_{k,0}b(u)}{\rho'E[H]}, & h = 1, \quad n = \min(u, N-k), \quad l = 1, 2, \dots, n \\ \frac{x_{k,0}\bar{d}(h-1)b(u)}{\rho'E[H]}, & h = 2, 3, \dots, \quad n = \min(u, N-1-q(k, h-1, u)), \quad l = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となる． $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots$ )， $\bar{H} = 1$ ， $L = l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) の時，待ち時間は  $(k-1)^+ + l - 1$  である．また， $X = k$  ( $k = 0, 1, \dots$ )， $\bar{H} = h$  ( $h = 2, 3, \dots$ )， $L = l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) の時，待ち時間は  $q(k, h-1, u) + l - 1$  である．以上のことから

$$\begin{aligned} W^*(z) &= \frac{1}{\rho'E[H]} \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \sum_{l=1}^{\min(u, N-k)} z^{(k-1)^+ + l - 1} \\ &\quad + \frac{1}{\rho'E[H]} \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=2}^{\infty} b(u) \bar{d}(h-1) \sum_{l=1}^{\min(u, N-1-q(k, h-1, u))} z^{q(k, h-1, u) + l - 1} \\ &= \frac{1}{\rho'E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \sum_{l=1}^{\min(u, N-k)} z^{(k-1)^+ + l - 1} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h-1) \sum_{l=1}^{\min(u, N-1-q(k, h, u))} z^{q(k, h, u)+l-1} \\
= & \frac{1}{\rho' E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) z^{(k-1)^+} \frac{1 - z^{\min(u, N-k)}}{1-z} \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} \frac{1 - z^{\min(u, N-1-q(k, h, u))}}{1-z} \right)
\end{aligned}$$

となり，式 (12) が成立する．

□

## I 式 (13) の証明

証明 バッファが無限である場合と同様に， $x_0^*(z)$ ， $\mathbf{x}_+^*(z)$ ， $\tilde{x}_0^*(z)$ ， $\tilde{\mathbf{x}}_+^*(z)$  を，

$$x_0^*(z) = \sum_{k=0}^N x_{k,0} z^k, \quad \mathbf{x}_+^*(z) = \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_{k,+} z^k, \quad \tilde{x}_0^*(z) = \sum_{k=0}^N x_{k,0} z^{(k-1)^+}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z) = \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_{k,+} z^{(k-1)^+}$$

と定義する．ただし， $\mathbf{x}_{k,+}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) は  $1 \times M$  ベクトルで， $\mathbf{x}_{k,+} = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,M})$  である．さらに， $b_n^*(z)$  を， $b_n^*(z) = \sum_{u=0}^{\infty} b(u) z^{\min(u, n)}$  と定義する．

定常状態においては，あるスロットにおけるシステム内セル数分布と，その次のスロットにおけるシステム内セル数分布が等しいので，

$$\begin{aligned}
Y^*(z) = & \frac{1}{E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} z^{(k-1)^+} b_{N-k}^*(z) + \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z) \mathbf{e} \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} \cdot z^{\min(u, N-1-q(k, h, u))} \right)
\end{aligned}$$

となる．一方，式 (12) から，

$$\begin{aligned}
\rho' W^*(z)(1-z) = & \frac{1}{E[H]} \left( \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) z^{(k-1)^+} (1 - z^{\min(u, N-k)}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} (1 - z^{\min(u, N-1-q(k, h, u))}) \right) \\
= & \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) - \sum_{k=0}^N x_{k,0} z^{(k-1)^+} b_{N-k}^*(z) + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} \cdot z^{\min(u, N-1-q(k, h, u))} \right)
\end{aligned}$$

となる．これらを両辺加えると，

$$Y^*(z) + \rho'(1-z)W^*(z) = \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) + \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z) \mathbf{e} + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u) \bar{d}(h) z^{q(k, h, u)} \right)$$

となる．ここで，定義より

$$x_0^*(z) = z \tilde{x}_0^*(z) - z x_0^*(0) + x_0^*(0), \quad \mathbf{x}_+^*(z) = z \tilde{\mathbf{x}}_+^*(z) - z \mathbf{x}_+^*(0) + \mathbf{x}_+^*(0),$$

であるから , 式 (11) より

$$\begin{aligned}
Y^*(z) &= \frac{1}{E[H]} \left( z\tilde{x}_0^*(z) - zx_0^*(0) + x_0^*(0) + z\tilde{x}_+^*(z)e - zx_+^*(0)e + x_+^*(0)e \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u)\bar{d}(h)z^{q(k,h,u)} \right) \\
&= \frac{1}{E[H]} \left( x_0^*(0) + x_+^*(0)e \right) - z \cdot \frac{1}{E[H]} \left( x_0^*(0) + x_+^*(0)e \right) \\
&\quad + z \cdot \frac{1}{E[H]} \left( \tilde{x}_0^*(z) + \tilde{x}_+^*(z)e + \sum_{k=0}^N x_{k,0} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} b(u)\bar{d}(h)z^{q(k,h,u)} \right) \\
&= \frac{1}{E[H]} \left( x_0^*(0) + x_+^*(0)e \right) - z \cdot \frac{1}{E[H]} \left( x_0^*(0) + x_+^*(0)e \right) + z \left( Y^*(z) + \rho'(1-z)W^*(z) \right)
\end{aligned}$$

となる . ゆえに ,  $(x_0^*(0) + x_+^*(0)e)/E[H] = Y^*(0) = 1 - \rho'$  であることから

$$(1-z)Y^*(z) = 1 - \rho' - z(1 - \rho') + \rho'z(1-z)W^*(z)$$

となる . これより , 式 (13) が成立する . □

## J 数値結果

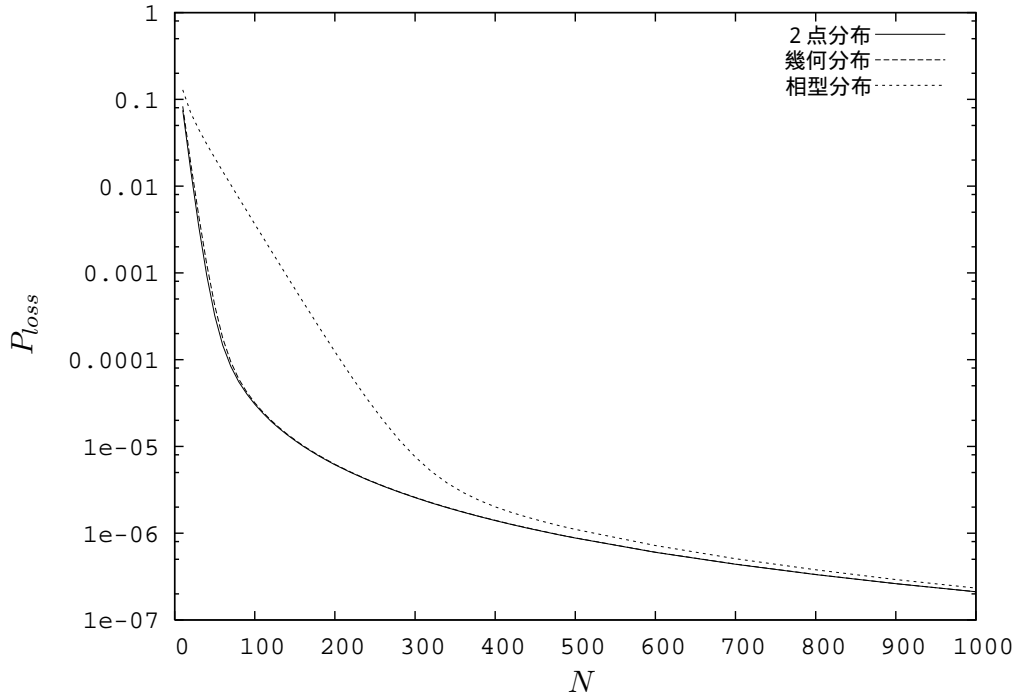


図 1:  $D^{[0]}$  の分布が与える影響 ( $\theta = \theta_S$ )

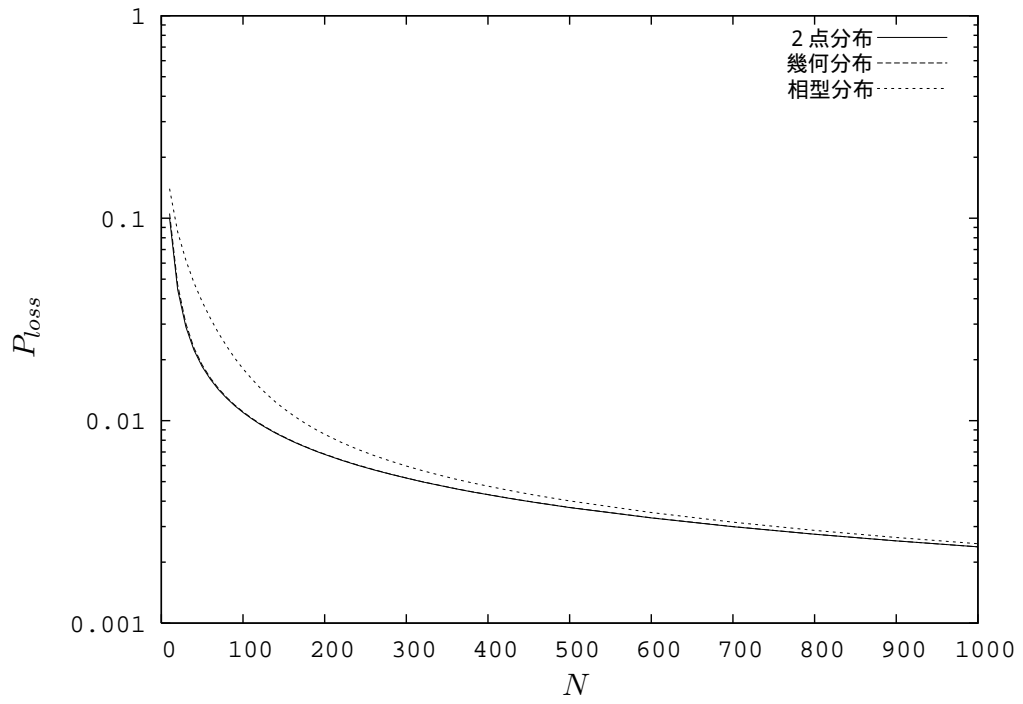


図 2:  $D^{[0]}$  の分布が与える影響 ( $\theta = \theta_L$ )

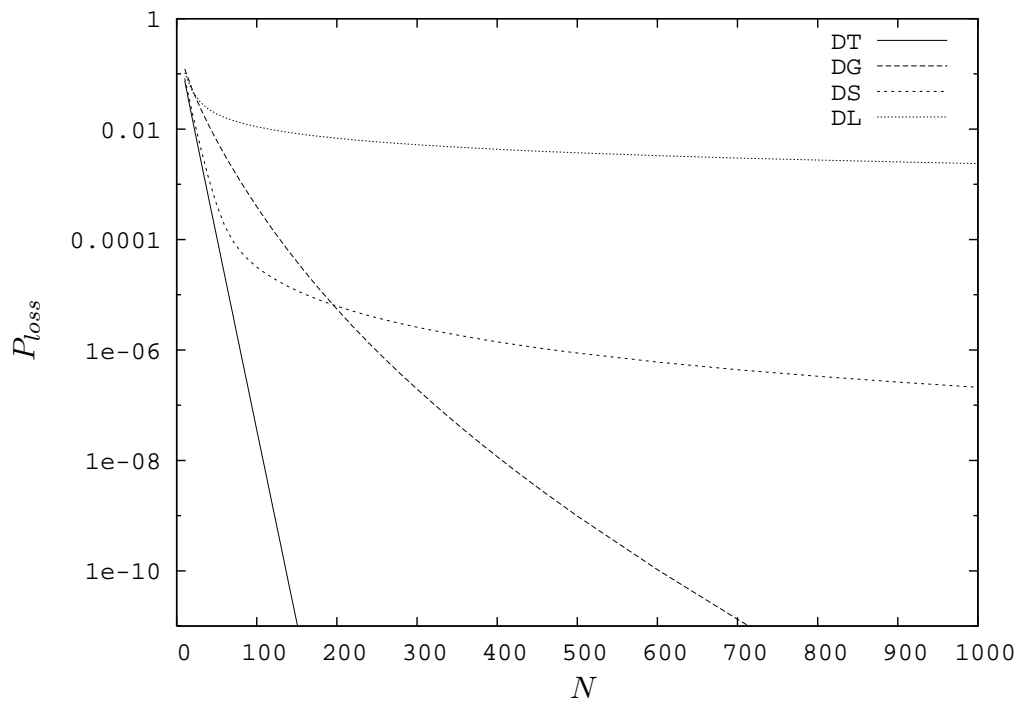


図 3:  $D$  の分布が与える影響 ( $E[D] = 4.2$ )

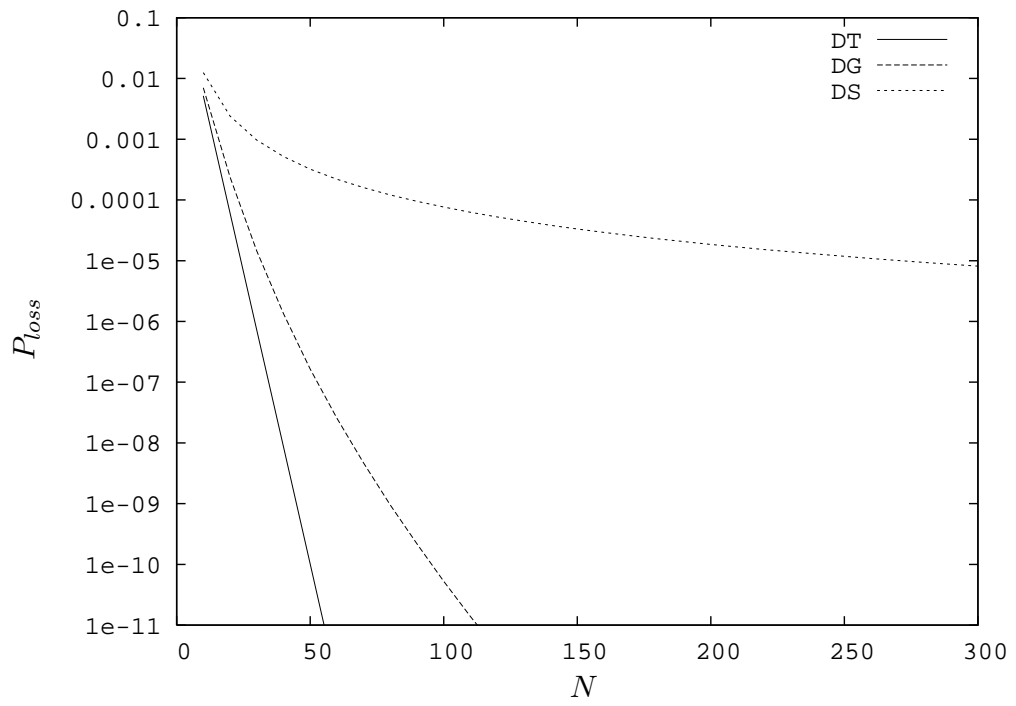


図 4:  $D$  の分布が与える影響 ( $E[D] = 1.2$ )

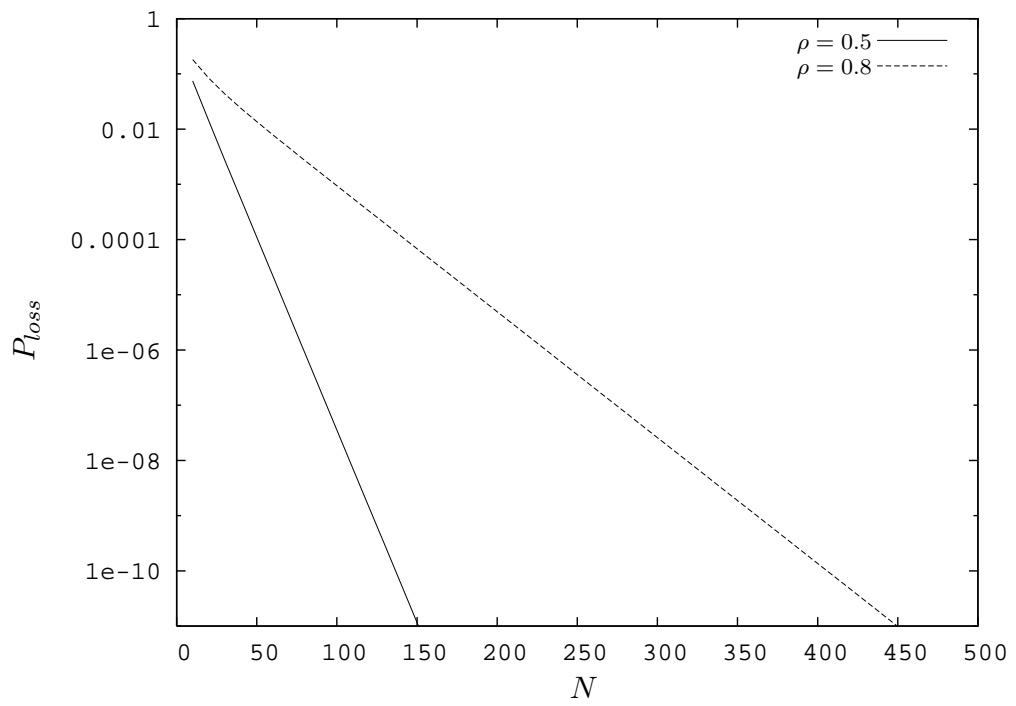


図 5:  $N$  に対する感度 (DT)

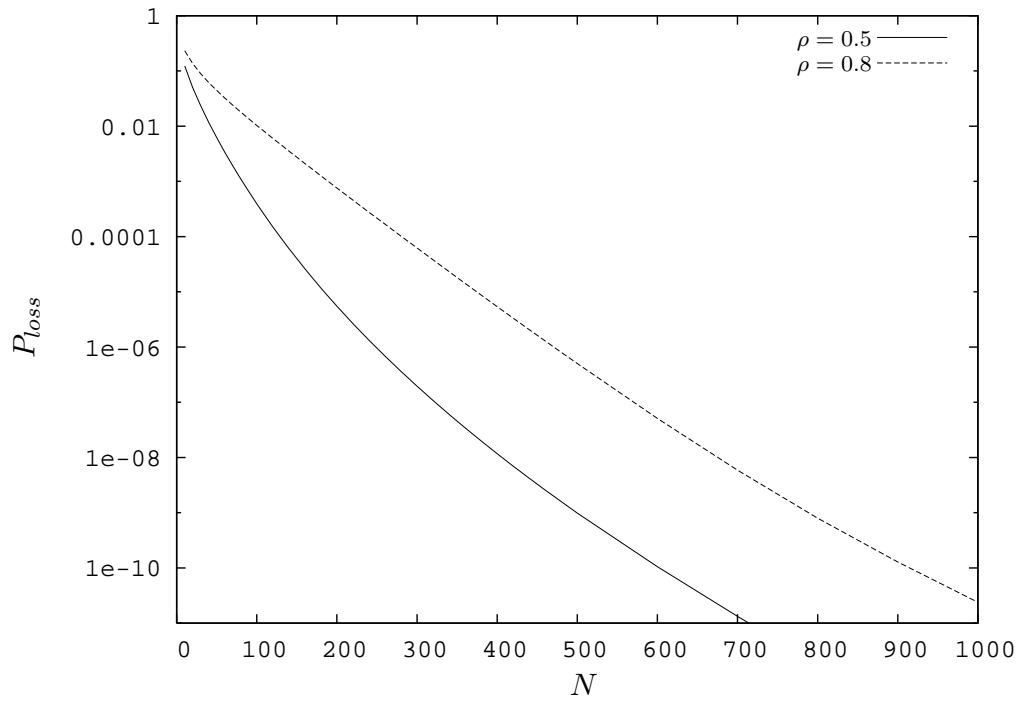


図 6:  $N$  に対する感度 (DG)

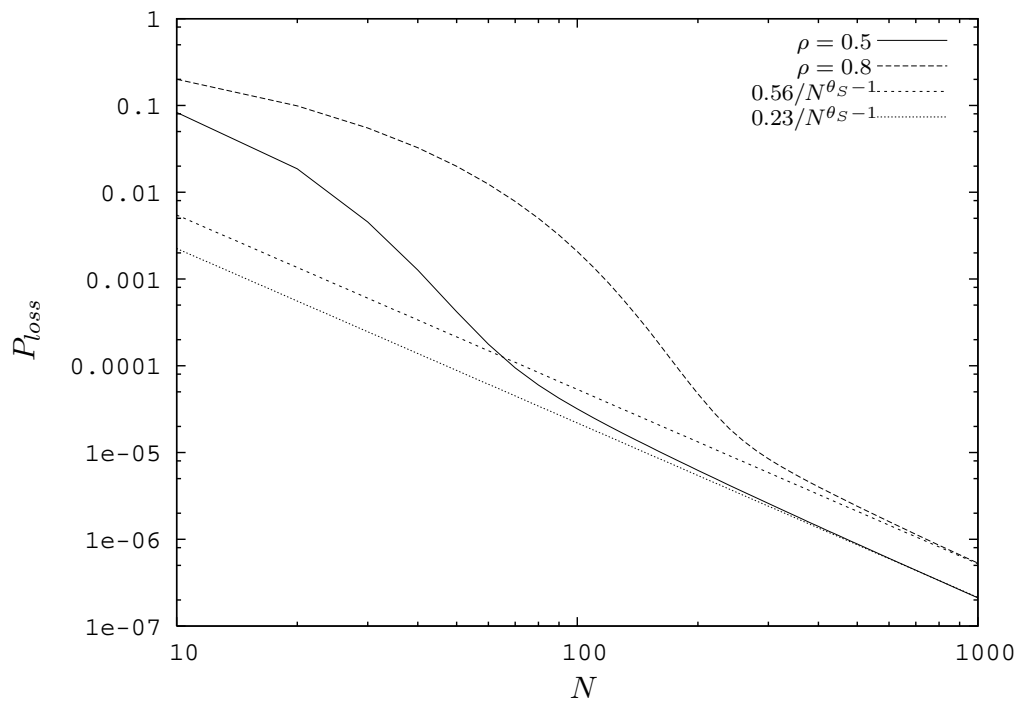


図 7:  $N$  に対する感度 (DS)

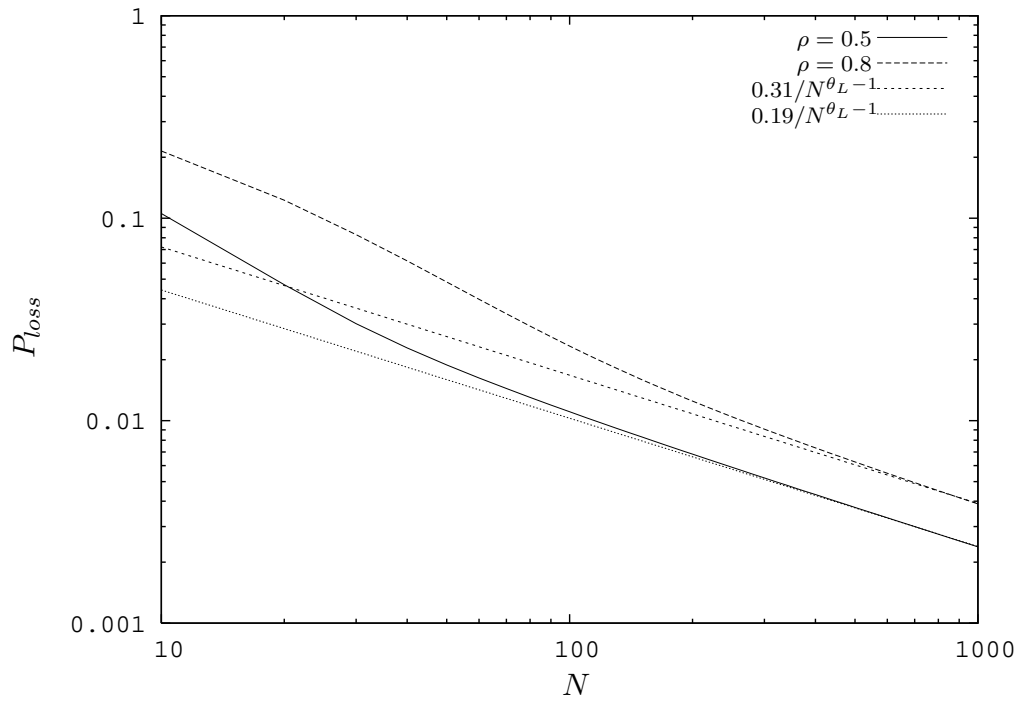


図 8:  $N$  に対する感度 (DL)

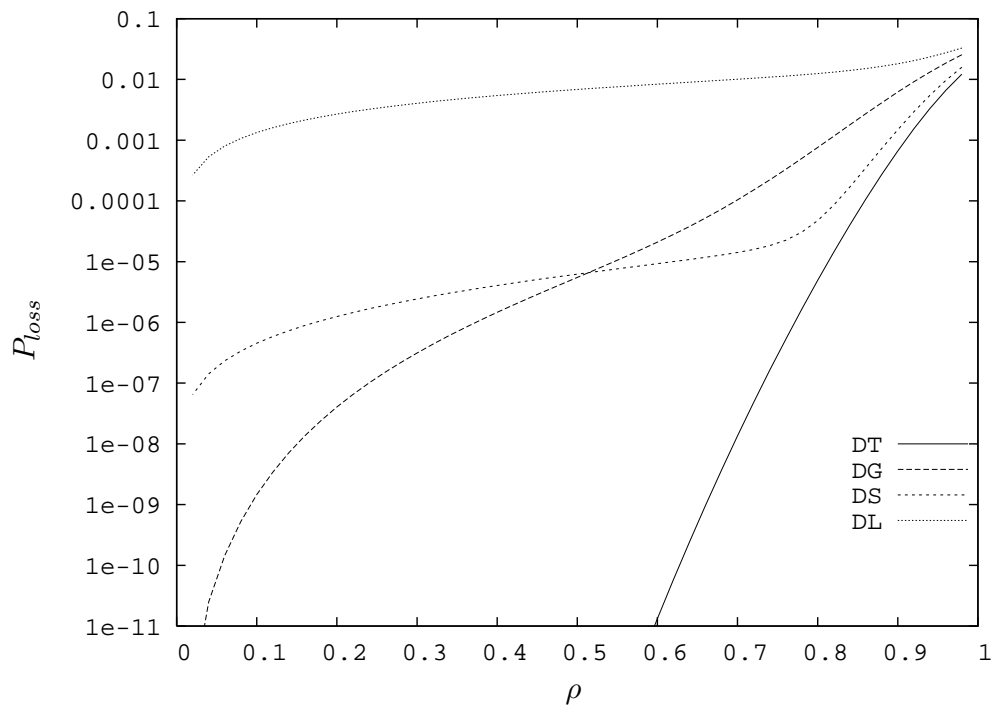


図 9:  $\rho$  に対する感度 ( $N = 200$ )

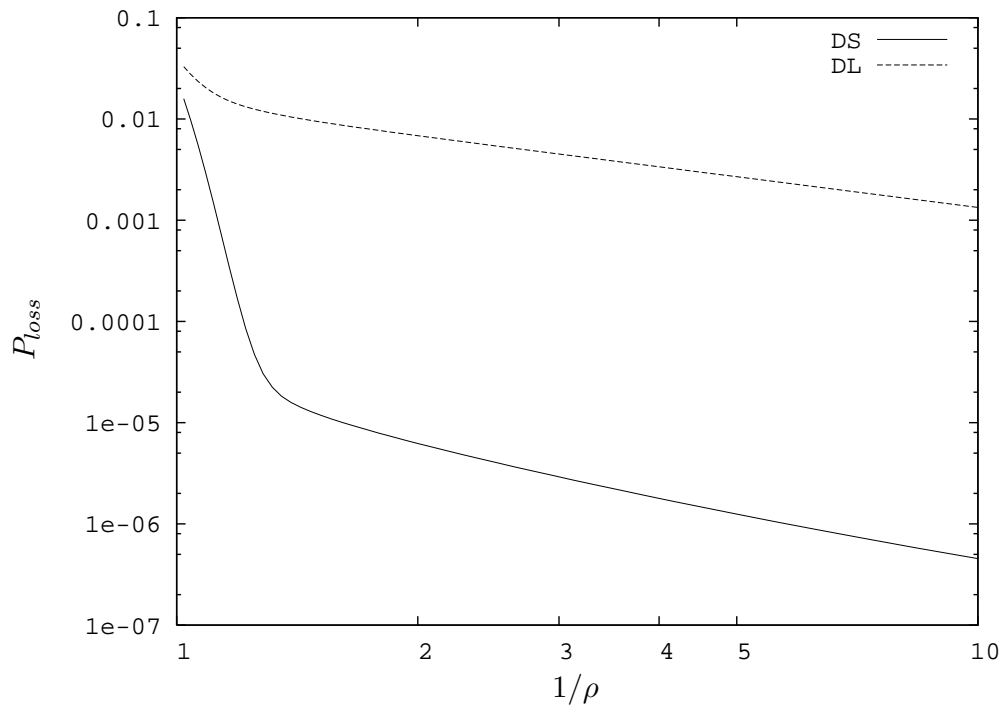


図 10:  $1/\rho$  に対する感度 ( $N = 200$ )

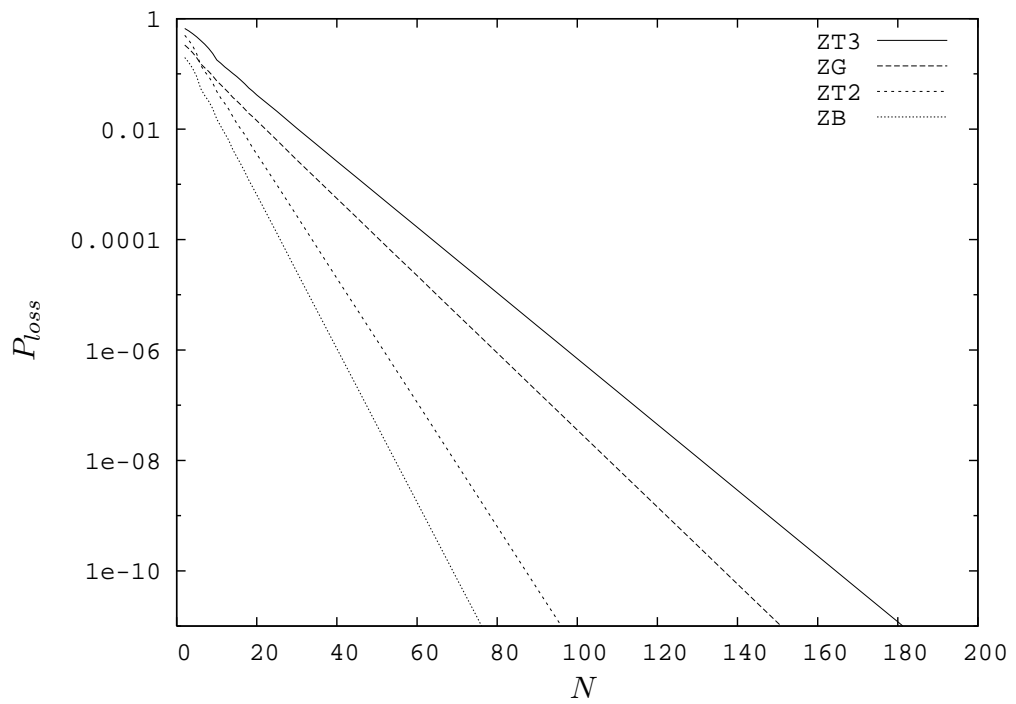


図 11:  $Z$  の分布が与える影響 (DT)

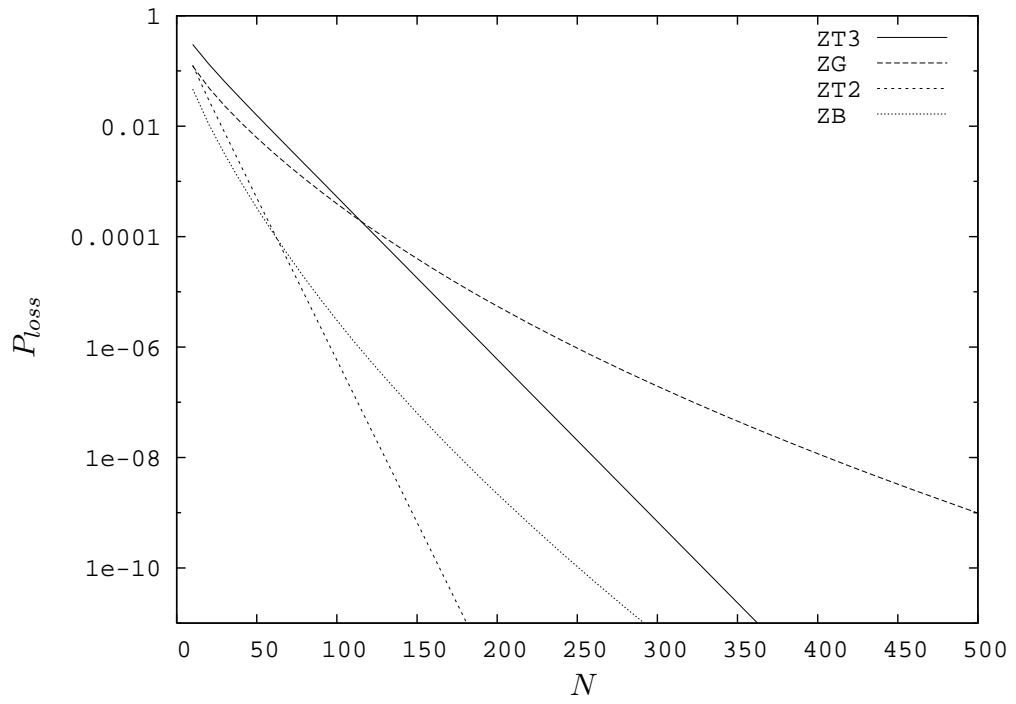


図 12:  $Z$  の分布が与える影響 (DG)

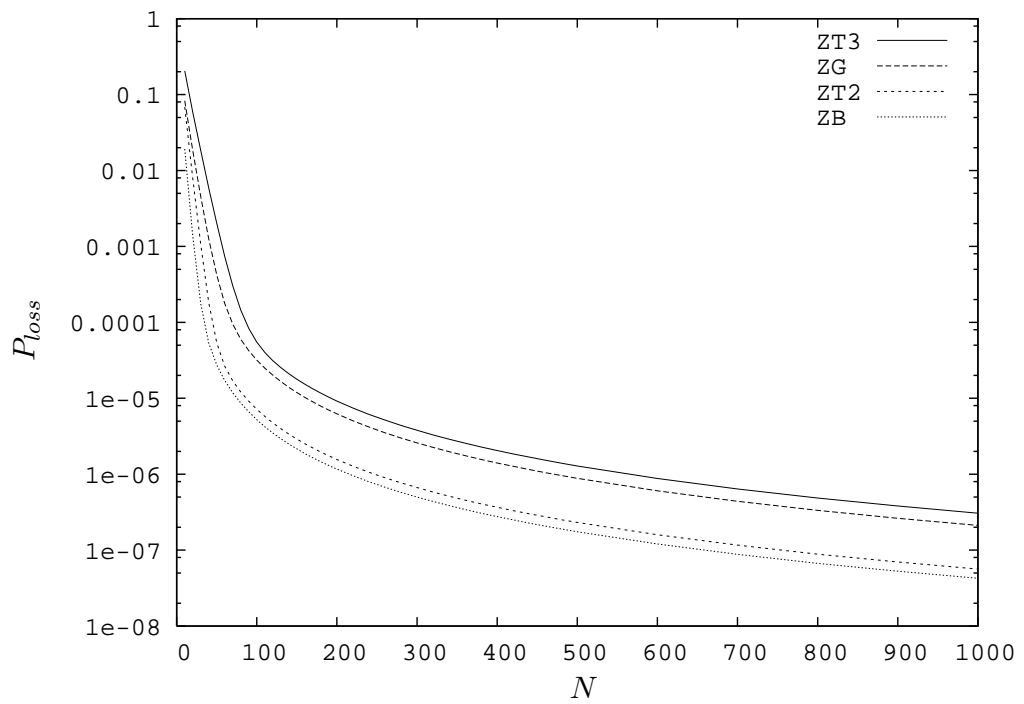


図 13:  $Z$  の分布が与える影響 (DS)



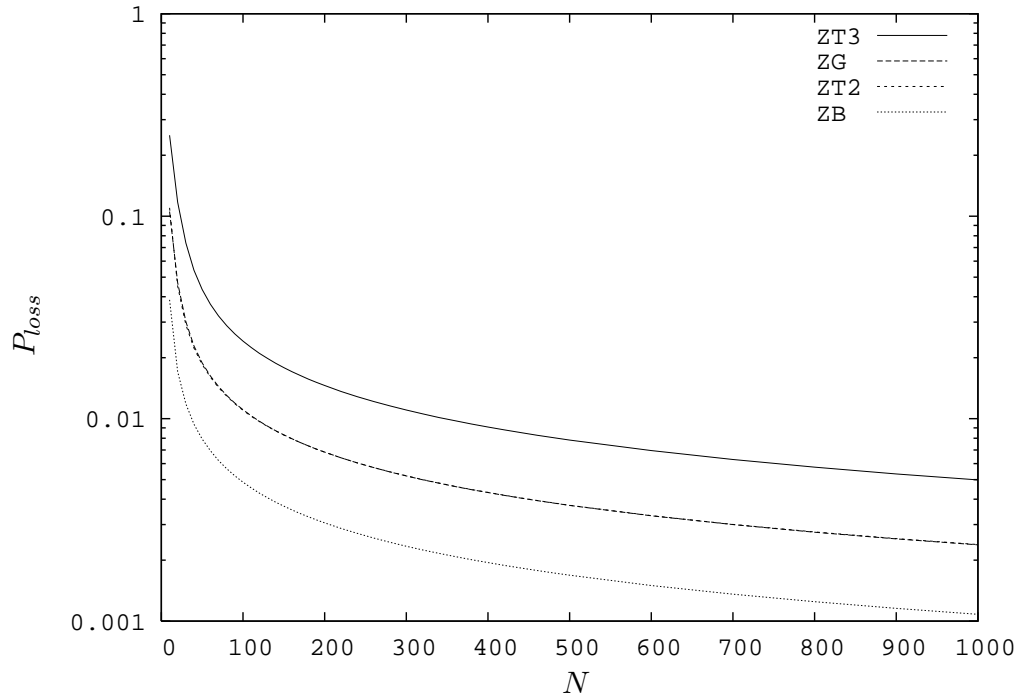


図 14:  $Z$  の分布が与える影響 (DL)

表 1: セル棄却率と裾野分布の関係 (DT)

$N$	$P_{loss}$	$AY$ ( $error_{AY}$ )	$AX$ ( $error_{AX}$ )
50	1.3669e-02	1.4741e-02 ( 7.84 %)	1.3619e-02 (-0.37 %)
100	9.4287e-04	1.0134e-03 ( 7.48 %)	9.3952e-04 (-0.35 %)
150	6.8081e-05	7.3150e-05 ( 7.45 %)	6.7840e-05 (-0.35 %)
200	4.9319e-06	5.2990e-06 ( 7.44 %)	4.9144e-06 (-0.35 %)
250	3.5735e-07	3.8395e-07 ( 7.44 %)	3.5609e-07 (-0.35 %)
300	2.5893e-08	2.7821e-08 ( 7.45 %)	2.5802e-08 (-0.35 %)

表 2: セル棄却率と裾野分布の関係 (DG)

$N$	$P_{loss}$	$AY$ ( $error_{AY}$ )	$AX$ ( $error_{AX}$ )
50	4.4322e-02	4.8893e-02 (10.31 %)	4.4322e-02 ( 0.00 %)
100	1.0317e-02	1.1209e-02 ( 8.65 %)	1.0317e-02 ( 0.00 %)
150	2.7402e-03	2.9651e-03 ( 8.21 %)	2.7402e-03 ( 0.00 %)
200	7.6005e-04	8.2104e-04 ( 8.02 %)	7.6005e-04 ( 0.00 %)
250	2.1553e-04	2.3258e-04 ( 7.91 %)	2.1553e-04 ( 0.00 %)
300	6.2109e-05	6.6965e-05 ( 7.82 %)	6.2109e-05 ( 0.00 %)

表 3: セル棄却率と裾野分布の関係 (DS)

$N$	$P_{loss}$	$AY$ ( $error_{AY}$ )	$AX$ ( $error_{AX}$ )
50	1.9896e-02	2.2030e-02 (10.72 %)	1.9896e-02 (0.00 %)
100	2.0777e-03	2.2807e-03 (9.77 %)	2.0777e-03 (0.00 %)
150	2.6250e-04	2.8677e-04 (9.25 %)	2.6250e-04 (0.00 %)
200	4.7471e-05	5.1344e-05 (8.16 %)	4.7471e-05 (0.00 %)
250	1.5791e-05	1.6879e-05 (6.89 %)	1.5791e-05 (0.00 %)
300	8.4609e-06	8.9900e-06 (6.25 %)	8.4609e-06 (0.00 %)

表 4: セル棄却率と裾野分布の関係 (DL)

$N$	$P_{loss}$	$AY$ ( $error_{AY}$ )	$AX$ ( $error_{AX}$ )
50	4.8437e-02	5.4045e-02 (11.58 %)	4.8437e-02 (0.00 %)
100	2.3363e-02	2.5727e-02 (10.12 %)	2.3363e-02 (0.00 %)
150	1.5968e-02	1.7512e-02 (9.67 %)	1.5968e-02 (0.00 %)
200	1.2495e-02	1.3678e-02 (9.47 %)	1.2495e-02 (0.00 %)
250	1.0449e-02	1.1427e-02 (9.35 %)	1.0449e-02 (0.00 %)
300	9.0819e-03	9.9246e-03 (9.28 %)	9.0819e-03 (0.00 %)