

特別研究報告書

再定式化と平滑化による
一般化半無限計画問題の解法

指導教員

福島 雅夫 教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成12年入学

平成17年3月卒業

道古 真也

道古 真也

摘要

半無限計画問題 (SIP: Semi-Infinite Program) とは有限次元の変数と無限個の制約を持つ最適化問題である。数学, 経済, 工学など様々な分野で SIP としてモデル化できる問題が数多く存在し, 近年活発に研究されている。さらに一般化半無限計画問題 (GSIP: Generalized Semi-Infinite Program) と呼ばれる, より広いクラスの問題があり, GSIP に対する解法は SIP に適用することができる。一般に凸でない最適化問題の解法アルゴリズムにおいて大域的収束性を保証することはできない。そこで現実には局所的最適解や停留点を求めるようなアルゴリズムの研究が重要となる。本報告書では GSIP の停留点への収束を保証する, 効率的かつ容易に実行可能な計算手法を考察する。この手法では GSIP をまず主問題と副問題という二段階の構造を持つ問題とみなし, 均衡制約付き数理計画問題 (MPEC) として再定式化する。さらに, その制約に現れる相補性条件をパラメータを用いて平滑化する。このようにして得られたパラメトリック最適化問題は微分可能な通常非線形計画問題であるため汎用のソフトウェアで解くことができる。ここでパラメータを 0 に近づけたときのパラメトリック非線形計画問題の解の極限として, GSIP の解を求めることができる。GSIP として定式化されたデザインセンタリング問題とロバスト最適化問題に対し数値実験を行い, このアルゴリズムの有効性を確認した。

目次

1	序論	1
2	一般化半無限計画問題	2
2.1	副問題と解集合	2
2.2	Fritz John の条件	3
2.3	副問題の正則性の仮定	5
2.4	NCP 関数	5
3	数値解法	6
3.1	再定式化	6
3.2	アルゴリズム	9
4	収束解析	9
5	数値実験	13
5.1	問題例	13
5.1.1	デザインセンタリング問題	13
5.1.2	ロバスト最適化問題	14
5.2	実験方法	15
5.3	結果の考察	16
6	結論	18

1 序論

半無限計画問題 (SIP: Semi-Infinite Program) とは有限個の変数 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ に対する無限個の制約不等式で表現される実行可能領域上で、目的関数を最小化する最適化問題であり、次のように書くことができる。

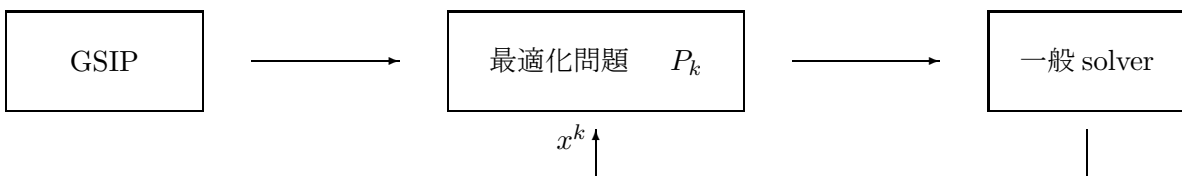
$$\min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y$$
$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, g: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^p$$

ここで Y は無限個の要素を持つ添字集合である。さらに無限添字集合が x に依存するとき、一般化半無限計画問題 (GSIP: Generalized Semi-Infinite Program) と呼ぶ。すなわち GSIP は次のように表現される。

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y(x)$$

様々な分野で (一般化) 半無限計画問題としてモデル化できる問題が数多く存在し、近年活発に研究されている。例を挙げるとまず数学においては関数を別の (より次元の低い) 多項式で近似するチェビシェフの近似問題がある。工学においてはロボットの軌道制御、経済においてはロバスト最適化によるポートフォリオ決定問題など応用可能な分野は非常に幅広い [1, 2]。

一般に凸でない問題の解法アルゴリズムにおいて大域的収束性を保証することはできない。そこで現実的な問題として局所的最適解や停留点を求めるようなアルゴリズムの研究が重要となる。本報告書では GSIP の停留点への収束を保証する効率的な計算手法を紹介する。GSIP は SIP よりも広いクラスの問題であるので GSIP に対する解法は SIP に対しても適用することができる。ほとんどの (一般化) 半無限計画問題の数値解法においては、まず解くべき問題を (局所的に) 等価な最適化問題の列に帰着させる。概念としては次のようになる。



本報告書で紹介する手法においてもこのように通常の最適化問題の列を生成する。この手法では GSIP をまず主問題と副問題という二段階の構造を持つ問題とみなし、均衡制約付き数理計画問題 (MPEC) として再定式化する。さらにその制約に現れる相補性条件をパラメータを用いて平滑化する。このようにして得られたパラメトリック最適化問題は微分可能な通常の非線

形計画問題であるため汎用のソフトウェアで解くことができる。ここでパラメータを0に近づけた時のパラメトリック非線形計画問題の解の極限として、GSIPの解を求めることができる[3].

本報告書の構成を記す。第2節では一般化半無限計画問題の定式化及び数学的準備を行う。第3節において本報告書の核となるアルゴリズムを紹介し、第4節では収束解析、第5節では数値実験結果を記す。最後に第6節で結論を述べる。

2 一般化半無限計画問題

2.1 副問題と解集合

本節では、本報告書における主な仮定と最適性の1次の必要条件を表すFJ点 (Fritz John point) を説明する。まず解くべき問題を改めて定義する。

$$GSIP: \quad \min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in M \quad (1)$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x, y) \leq 0, \forall y \in Y(x), j \in J\} \quad (2)$$

$$Y(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid v_l(x, y) \leq 0, l \in L\} \quad (3)$$

すべての関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in J = \{1, \dots, p\}$, $v_l: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in L = \{1, \dots, s\}$ は連続的微分可能な実数値関数であると仮定する。以下では実行可能領域 M の境界上でかつ実行可能な点 \bar{x} を考える。すなわち ∂M を M の境界として $\bar{x} \in \partial M \cap M$ であるとする。

点 \bar{x} のある近傍 U が存在して $\cup_{x \in U} Y(x)$ が有界であるとき点集合写像 Y は \bar{x} の周りで局所的に有界であるという。

仮定 A 点集合写像 Y は \bar{x} の周りで局所的に有界である。

本報告書を通じて仮定 A が成立するとし、 \bar{x} の近傍 U は有界開集合であるとする。与えられた点 x と $j \in J$ に対して、GSIPの副問題を次のように定義する。

$$Q^j(x): \quad \max_y g_j(x, y) \quad \text{s.t.} \quad y \in Y(x) \quad (4)$$

問題 $Q^j(x)$ に対する最適値関数を次のように定義する。

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \max_{y \in Y(x)} g_j(x, y), & \text{if } Y(x) \neq \phi \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

$Q^j(x)$ の最適解の集合を次のように定義する。

$$Y_\star^j(x) = \{y \in Y(x) \mid g_j(x, y) = \varphi_j(x)\} \quad (6)$$

明らかに $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_j(x) \leq 0, j \in J\}$ が成立する. よって 集合 $M \cap U$ と集合 $\{x \in U \mid \varphi_j(x) \leq 0, j \in J_0(\bar{x})\}, J_0(\bar{x}) = \{j \in J \mid \varphi_j(\bar{x}) = 0\}$ が一致するように U をとることができる. さらに $j \in J_0(\bar{x})$ に対して, 問題 $Q^j(\bar{x})$ の最適値は 0 になるので最適解の集合 $Y_\star^j(\bar{x})$ は次のように書ける.

$$Y_\star^j(\bar{x}) = Y_0^j(\bar{x}) =: \{y \in Y(\bar{x}) \mid g_j(\bar{x}, y) = 0\} \quad (7)$$

2.2 Fritz John の条件

続いて副問題 $Q^j(\bar{x})$ におけるある正則性の仮定の下で M が \bar{x} の近傍で有限個の滑らかな不
等式制約によって表現できることを示す. まず制約想定, 最適性の条件について述べる [4].

ベクトル $\nabla_y v_l(\bar{x}, \bar{y}), l \in L_0(\bar{x}, \bar{y})$ がすべて 1 次独立であるとき $\bar{y} \in Y(\bar{x})$ において 1 次独立制
約想定 (LICQ: linear independence constraint qualification) 成り立つという. $\nabla_y v_l(\bar{x}, \bar{y})\eta <$
 $0, l \in L_0(\bar{x}, \bar{y})$ を満たすベクトル η が存在するとき Mangasarian-Fromovitz 制約想定 (MFCQ)
が成り立つという. ただし $L_0(\bar{x}, \bar{y}) = \{l \in L \mid v_l(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$ は副問題 $Q^j(\bar{x})$ のアクティブな制約
の添字集合である.

ここで $v(x, y) = (v_1(x, y), \dots, v_s(x, y))^T$ と表し, $\gamma \in \mathbb{R}^s$ の各成分を対角成分とする $s \times s$ 対角
行列を $diag(\gamma), j \in J_0(\bar{x})$ とする. すると問題 $Q^j(\bar{x})$ のラグランジュ関数は次のように書ける.

$$L_j(\bar{x}, y, \gamma) = g_j(\bar{x}, y) - \gamma^T v(\bar{x}, y) \quad (8)$$

また $\bar{y} \in Y_0^j(\bar{x})$ は問題 $Q^j(\bar{x})$ の解であるので, \bar{y} において MFCQ が成立するならば, 次の KKT
条件 (9)~(12) をみたすベクトル γ が存在する.

$$\nabla_y L_j(\bar{x}, \bar{y}, \gamma) = 0 \quad (9)$$

$$-diag(\gamma)v(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (10)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (11)$$

$$-v(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad (12)$$

さらに LICQ が成立するとき γ はただ一つに決まる. \bar{x}, \bar{y} に対する KKT ベクトルの集合を次
のように表す.

$$KT^j(\bar{x}, \bar{y}) = \{\gamma \in \mathbb{R}^s \mid \gamma \text{ satisfies } (9) \sim (12)\}$$

さらに $\gamma_l > 0, l \in L_0(\bar{x}, \bar{y})$ が成立するとき \bar{y} は狭義相補性条件 (SCS: strict complementary
slackness) を満たすという. 次に LICQ の成立を仮定する. このとき (\bar{x}, \bar{y}) に対する KKT ベク
トル $\bar{\gamma}$ がただ一つ存在する. この $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\gamma})$ に対して次の条件が成り立つとき \bar{y} は最適性の二次
の十分条件 (SOSC: second order sufficiency condition) を満たすという.

$$\eta^T \nabla_y^2 L_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\gamma}) \eta < 0, \forall \eta \in T_{\bar{y}} Y(\bar{x})$$

ただし, $T_{\bar{y}} Y(\bar{x}) = \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid \nabla_y v_l(\bar{x}, \bar{y})\eta = 0, l \in L_0(\bar{x}, \bar{y})\}$ である.

定義 2.1 $\bar{x} \in \partial M \cap M, j \in J_0(\bar{x})$ とする. $\bar{y} \in Y_0^j(\bar{x})$ において *LICQ*, *SCS*, *SOSC* が満たされるとき, \bar{y} は問題 $Q^j(\bar{x})$ の非退化な大域的最適解であるという.

仮定 B $Q^j(\bar{x})$ のすべての大域的最適解は非退化である.

仮定 B の下で $Q^j(\bar{x})$ の大域的最適解は孤立極大解であり, また $Y(\bar{x})$ はコンパクト集合であるので大域的最適解は有限個しか存在しない. よって最適解の集合は

$$Y_0^j(\bar{x}) = \{\bar{y}^{j,k}, k \in J_0^j(\bar{x})\}$$

と表現できる. ここで $J_0^j(\bar{x})$ は有限添字集合である. さらに, 最適解 $\bar{y}^{j,k}$ に対応するラグランジュ乗数を $\bar{\gamma}^{j,k}$ とすれば陰関数定理 [5] と連続性の仮定より $\bar{y}^{j,k}, \bar{\gamma}^{j,k}, \forall k \in J_0^j(\bar{x})$ に対し $y^{j,k}(\bar{x}) = \bar{y}^{j,k}, \gamma^{j,k}(\bar{x}) = \bar{\gamma}^{j,k}$ を満たし $y^{j,k}(x), \gamma^{j,k}(x)$ が $Q^j(x)$ のそれぞれ最適解, KKT ベクトルとなるような微分可能な関数 $y^{j,k}(\cdot), \gamma^{j,k}(\cdot)$ が存在する. この陰関数 $y^{j,k}(\cdot)$ を用いて \bar{x} の近傍で定義される次の最適値関数を考えることができる.

$$\varphi_{j,k}(x) = g_j(x, y^{j,k}(x)), k \in J_0^j(\bar{x}), j \in J_0(\bar{x})$$

補題 2.1 $\varphi_{j,k}$ は連続的微分可能であり, 勾配は次の式で与えられる.

$$\nabla \varphi_{j,k}(\bar{x}) = \nabla_x L_j(\bar{x}, \bar{y}^{j,k}, \bar{\gamma}^{j,k})$$

定理 2.1 \bar{x} において仮定 B が満たされているとする. このとき \bar{x} の近傍で集合 M と

$$M_{\bar{x}} = \{x \in U \mid \varphi_{j,k}(x) \leq 0, k \in J_0^j(\bar{x}), j \in J_0(\bar{x})\}$$

は一致する.

定理 2.1 は仮定 B の下で元の *GSIP* が局所的に, 有限個の制約条件を持つ次の最適化問題と等価であることを示している [6].

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in M_{\bar{x}}$$

よって通常非線形計画問題に対する局所最適性の条件を *GSIP* に適用することができる. 特に最適性の 1 次の必要条件として Fritz John の条件が得られる [7].

定理 2.2 \bar{x} は *GSIP* の局所最適解であり仮定 B が満たされているとする. このときすべてが 0 ではないような $\kappa \geq 0, \lambda_{j,k} \geq 0, k \in J_0^j(\bar{x}), j \in J_0(\bar{x})$ が存在して次式を満たす.

$$\kappa \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \sum_{k \in J_0^j(\bar{x})} \lambda_{j,k} \nabla_x L_j(\bar{x}, \bar{y}_{j,k}, \gamma_{j,k}) = 0 \quad (13)$$

定理 2.2 に示された条件を満たす点を *GSIP* の FJ 点 (Fritz John point) と呼ぶ.

2.3 副問題の正則性の仮定

以下に本報告書における重要な仮定を記す.

仮定 C 副問題 $Q_j(x)$ において $-g_j(x, \cdot), v_l(x, \cdot), l \in L$ は任意の $x \in \mathfrak{R}^n$ に対して凸である.

仮定 C が成立するとき問題 $Q^j(x)$ は凸であるという.

定義 2.2 仮定 C の下ですべての $l \in L$ に対し \hat{y} が存在して $v_l(x, \hat{y}) < 0$ が成立するとき, 集合 $Y(x)$ はスレイター条件を満たすという.

仮定 D 任意の $x \in \mathfrak{R}^n$ に対して集合 $Y(x)$ は有界でありかつスレイター条件を満たす.

仮定 C, D の下で $Y_\star^j(x)$ は空でなく, \bar{x} の周りで局所的に有界である. よって実行可能集合 M は閉集合である.

仮定 B, C, D の下で $Q^j(\bar{x}), j \in J_0(\bar{x})$ に対する最適解 \bar{y}^j と KKT ベクトル $\bar{\gamma}^j$ のペアがただひとつに決定されることが知られている. さらに定理 2.2 より直ちに次の系が得られる.

系 2.1 \bar{x} は GSIP の局所最適解であり仮定 B, C, D が満たされているとする. このときすべてが 0 ではないような $\kappa \geq 0, \lambda_j \geq 0, j \in J_0(\bar{x})$ が存在して次式を満たす.

$$\kappa \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \lambda_j \nabla_x L_j(\bar{x}, \bar{y}^j, \bar{\gamma}^j) = 0 \quad (14)$$

次の補題はよく知られている [8].

補題 2.2 仮定 C, D が成立するとする. このとき \bar{y}^j が問題 $Q^j(\bar{x})$ に対する非退化な大域的最適解であるための必要十分条件は対応する KKT ベクトルを $\bar{\gamma}^j$ とすると,

$$A^j = A^j(\bar{x}, \bar{y}^j, \bar{\gamma}^j) = \begin{pmatrix} \nabla_y^2 L_j(\bar{x}, \bar{y}^j, \bar{\gamma}^j) & -\nabla_y v(\bar{x}, \bar{y}^j) \\ -\text{diag}(\bar{\gamma}^j) \nabla_y v(\bar{x}, \bar{y}^j)^T & -\text{diag}(v(\bar{x}, \bar{y}^j)) \end{pmatrix}$$

が正則でありかつ (9)~(12) が成立することである.

2.4 NCP 関数

関数 $\phi: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ は次の条件を満たすとき NCP 関数と呼ばれる [9].

$$\phi(a, b) = 0 \quad \text{if and only if} \quad a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

次式で定義される関数 $\psi: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ は min 関数と呼ばれ, 代表的な NCP 関数の一つである.

$$\psi(a, b) = \frac{1}{2} \left(a + b - \sqrt{(a - b)^2} \right)$$

min 関数 ψ に対して, パラメータ $\tau \in \mathfrak{R}$ を導入することにより, 平滑化関数 $\psi_\tau : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ が定義できる.

$$\psi_\tau(a, b) = \frac{1}{2} \left(a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4\tau^2} \right)$$

関数 ψ_τ はすべての $\tau \neq 0$ に対し微分可能であり, 次の性質を持つ.

性質 1 (i) $\psi_\tau(a, b) = 0$ if and only if $a > 0, b > 0, ab = \tau^2$

(ii) $\psi_\tau(a, b) = 0$ を満たす (a, b) に対し $\nabla \psi_\tau(a, b)$ は陽には τ に依存せず, $(a + b)^{-1}(b, a)^T$ で与えられる.

3 数値解法

本報告書で考察する方法は *GSIP* をあるパラメータを含む数値的に扱いやすい通常の非線形最適化問題に置き換えるものである. すなわち副問題の解集合を KKT 条件で表し, さらにそれをパラメータを用いて平滑化することにより近似する. そのためにこの節を通して仮定 C, D が成立するとする.

3.1 再定式化

まず *GSIP* を 2 段階の構造を持つ Stackelberg game と呼ばれる等価な問題として次のように再定式化する.

$$SG : \min_{x, y^1, \dots, y^p} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x, y^j) \leq 0, \text{ and } y^j \text{ solves } Q^j(x), j \in J$$

副問題 $Q^j(x)$ は凸なので $\{y^j \text{ solves } Q^j(x)\}$ という制約は KKT 条件 (9)~(12) によって置き換えることができる. よって SG は以下の均衡制約付き最適化問題 (MPEC: mathematical program with equilibrium constraints) と等価である.

$$\begin{aligned} MPEC : \quad \min_{x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p} f(x) \quad \text{s.t.} \quad & g_j(x, y^j) \leq 0 \\ & \nabla_y L_j(x, y^j, \gamma^j) = 0 \\ & -\text{diag}(\gamma^j)v(x, y^j) = 0 \\ & \gamma^j \geq 0 \\ & -v(x, y^j) \geq 0, j \in J \end{aligned}$$

ここまでで *GSIP* を等価な MPEC で置き換えることができた. しかし MPEC においては制約に相補性条件があることによって MFCQ を満たす実行可能解が存在しないため, 標準的な手法を適用した場合, 最適解が得られる保証がない. MFCQ が満たされることは数値計算法が安定であるための必要条件であることが知られている [10].

NCP 関数をベクトル形式で以下のように表す.

$$\begin{aligned}\Psi(a, b) &= (\psi(a_1, b_1), \dots, \psi(a_s, b_s))^T \\ \Psi_\tau(a, b) &= (\psi_\tau(a_1, b_1), \dots, \psi_\tau(a_s, b_s))^T\end{aligned}$$

NCP 関数を用いて MPEC を表現すると次のようになる.

$$\begin{aligned}P : \quad & \min_{x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x, y^j) \leq 0 \\ & \nabla_y L_j(x, y^j, \gamma^j) = 0 \\ & \Psi(\gamma^j, -v(x, y^j)) = 0, \quad j \in J\end{aligned}$$

問題 P を平滑化関数を用いて近似すると次のようになる.

$$\begin{aligned}P_\tau : \quad & \min_{x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x, y^j) \leq 0 \\ & \nabla_y L_j(x, y^j, \gamma^j) = 0 \\ & \Psi_\tau(\gamma^j, -v(x, y^j)) = 0, \quad j \in J\end{aligned}$$

次の命題が示すように P_τ は P の等式制約における非正則性が取り払われているため数值的に扱いやすい. 証明は ψ_τ の性質 1(ii) から直接導くことができる.

命題 3.1 $\tau \neq 0$ として

$$A^j = A^j(x, y^j, \gamma^j) = \begin{pmatrix} \nabla_y^2 L_j(x, y^j, \gamma^j) & -\nabla_y v(x, y^j) \\ -\text{diag}(\gamma^j) \nabla_y v(x, y^j)^T & -\text{diag}(v(x, y^j)) \end{pmatrix}$$

が正則となるような P_τ の実行可能解を $(x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p)$ とする. このとき $(x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p)$ における P_τ の等式制約の勾配は 1 次独立となる.

問題 P_τ は次のように書き換えることができる.

$$\nabla_y L_j(x, y^j, \gamma^j) = 0 \quad (15)$$

$$-\text{diag}(\gamma^j) v(x, y^j) = \tau^2 e_s \quad (16)$$

$$\gamma^j \geq 0 \quad (17)$$

$$-v(x, y^j) \geq 0 \quad (18)$$

ただし $e_s = (1, \dots, 1)^T \in \mathfrak{R}^s$ である. ここで (15)~(18) と等価な, バリア関数を用いて表現される大域的最適化問題 $Q_\tau^j(x)$ を考える.

$$Q_\tau^j(x) : \max_y b_\tau^j(x, y) := g_j(x, y) + \tau^2 \sum_{l \in L} \ln(-v_l(x, y))$$

問題 $Q_\tau^j(x)$ に対する最適性の 1 次の必要条件は次式で表され、凸性の仮定より最適性の必要十分条件となる。

$$0 = \nabla_y b_\tau^j(x, y) = \nabla_y g_j(x, y) + \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{v_l(x, y)} \nabla_y v_l(x, y)$$

さらに y に関する $b_\tau^j(x, y)$ のヘッセ行列は次のようになる。

$$\nabla_y^2 b_\tau^j(x, y) = \nabla_y^2 g_j(x, y) + \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{v_l(x, y)} \nabla_y^2 v_l(x, y) - \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{[v_l(x, y)]^2} \nabla_y v_l(x, y) \nabla_y v_l(x, y)^T$$

補題 3.1 $j \in J, \tau \neq 0$ とする。

(i) y^j が問題 $Q_\tau^j(x)$ の解であるための必要十分条件は (y^j, γ^j) , $\gamma^j = -\tau^2/v(x, y^j)$, $l \in L$ が (15)~(18) の解となることである。さらに $\nabla_y^2 b_\tau^j(x, y^j)$ が正則となるための必要十分条件は $A^j(x, y^j, \gamma^j)$ が正則となることである。

(ii) $\nabla_y^2 g_j(x, y), \nabla_y^2 v_l(x, y), l \in L$ の少なくとも一つが正則であれば $A^j(x, y^j, \gamma^j)$ は正則である。

証明 まず (i) を証明する。前半は $\nabla_y L_j(x, y^j, \gamma^j) = 0$ と $\nabla_y^2 b_\tau^j(x, y^j) = 0$ との比較より明らかである。次に性質 1(i) より行列 $-\text{diag}(v(x, y^j))$ は正則であるので、 $A^j = A^j(x, y^j, \gamma^j)$ が正則であるための必要十分条件は A^j における $-\text{diag}(v(x, y^j))$ の Schur complement S^j が正則であることである。

$$\begin{aligned} S^j &= \nabla_y^2 L_j(x, y^j, \gamma^j) + \nabla_y v(x, y^j) (\text{diag}(v(x, y^j)))^{-1} \text{diag}(\gamma^j) \nabla_y v(x, y^j)^T \\ &= \nabla_y^2 g_j(x, y^j) - \sum_{l \in L} \gamma_l^j \nabla_y^2 v_l(x, y^j) + \nabla_y v(x, y^j) \text{Diag} \left(\frac{\gamma_l^j}{v_l(x, y^j)} \right) \nabla_y v(x, y^j)^T \\ &= \nabla_y^2 g_j(x, y^j) + \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{v_l(x, y^j)} \nabla_y^2 v_l(x, y^j) - \nabla_y v(x, y^j) \text{Diag} \left(\frac{\tau^2}{[v_l(x, y^j)]^2} \right) \nabla_y v(x, y^j)^T \\ &= \nabla_y^2 g_j(x, y^j) + \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{v_l(x, y^j)} \nabla_y^2 v_l(x, y^j) - \sum_{l \in L} \frac{\tau^2}{[v_l(x, y^j)]^2} \nabla_y v_l(x, y^j) \nabla_y v_l(x, y^j)^T \\ &= \nabla_y^2 b_\tau^j(x, y^j) \end{aligned}$$

ただし $\text{Diag}(x_l)$ は (l, l) 成分が x_l である対角行列を表す。よって $S^j = \nabla_y^2 b_\tau^j(x, y^j)$ であるので後半部も示された。

続いて (ii) を証明する。凸性の仮定により S^j は半負定値行列の和となることが容易にわかる。(ii) の仮定が成り立つ、すなわち $\nabla_y^2 g_j(x, y), \nabla_y^2 v_l(x, y), l \in L$ の少なくとも一つが正則であるとき、その正則な行列は負定値行列である。また $\tau^2/v_l(x, y), l \in L$ はすべて負であるので S^j は負定値行列である。さらに (i) より (ii) が示された。 ■

GSIP に対して次のアルゴリズムを考える。

3.2 アルゴリズム

アルゴリズム*

ステップ 1. : $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu = 0$ となるような正数列 $\{\tau_\nu\}$ と初期点 $x^{0,0} \in \mathbb{R}^n$ を選ぶ.

ステップ 2. : P_{τ_0} の初期点 $(x^{0,0}, y^{1,0,0}, \gamma^{1,0,0}, \dots, y^{p,0,0}, \gamma^{p,0,0})$ を計算し, $\nu := 0$ とする.

ステップ 3. : P_{τ_ν} の解 $(x^{\nu,*}, y^{1,\nu,*}, \gamma^{1,\nu,*}, \dots, y^{p,\nu,*}, \gamma^{p,\nu,*})$ を求める.

ステップ 4. : $(x^{\nu+1,0}, y^{1,\nu+1,0}, \gamma^{1,\nu+1,0}, \dots, y^{p,\nu+1,0}, \gamma^{p,\nu+1,0}) := (x^{\nu,*}, y^{1,\nu,*}, \gamma^{1,\nu,*}, \dots, y^{p,\nu,*}, \gamma^{p,\nu,*})$,
 $\nu := \nu + 1$, とおきステップ 3 へ.

ステップ 2 において $(y^{1,0,0}, \gamma^{1,0,0}, \dots, y^{p,0,0}, \gamma^{p,0,0})$ を求めるためには, 例えば

$$\begin{aligned} \nabla_y L_j(x^0, y^j, \gamma^j) &= 0 \\ \Psi_{\tau_0}(\gamma^j, -v(x^0, y^j)) &= 0 \end{aligned}$$

を解くことが考えられる. しかし数値的に求めるにあたっての適切な初期点を得ることは容易ではない. そこで $Q_{\tau_0}^j(x^0)$ を解き $y^{j,0,0}$ を求め, $\gamma_l^{j,0,0}$ を

$$\gamma_l^{j,0,0} = -\frac{\tau_0^2}{v_l(x^0, y^{j,0,0})}$$

として求めればよい. $Q_{\tau_0}^j(x^0)$ の初期点は $Y(x^0)$ のスレイター点を用いれば良く, 次の凸計画問題を解くことによって容易に求められる.

$$\min_{y, \eta} \eta \quad \text{s.t.} \quad v_l(x^0, y) - \eta \leq 0, \quad l \in L$$

ステップ 3 に対しては非線形最適化問題を解く一般的なソフトウェアを適用することができる. ただしステップ 2 およびステップ 4 より, 実行不可能な初期点を用いることができることが必要である.

4 収束解析

3 節においては $GSIP$ を MPEC に再定式化しさらに平滑化法によりその近似問題である P_τ を構成した. 本節ではまず $GSIP$ の直接的な緩和問題を導く. 本節を通して仮定 C, D が成立するとする.

3 節での考察によって問題 $P_\tau, \tau \neq 0$ は次の問題と等価である.

$$SG_\tau: \quad \min_{x, y^1, \dots, y^p} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x, y^j) \leq 0, \quad y^j \text{ solves } Q_\tau^j(x), \quad j \in J$$

仮定 B の下で $GSIP$ の実行可能解 \bar{x} のある近傍内の各点 x において (15)~(18) を満たす (y^j, γ^j) , $j \in J$ が一意に決定される.

命題 4.1 $\bar{x} \in \partial M \cap M$ とする. 各 j に対して $\bar{y}^j, \bar{\gamma}^j$ はそれぞれ $Q^j(\bar{x})$ の解, KKT ベクトルであり, $A^j(\bar{x}, \bar{y}^j, \bar{\gamma}^j)$ は正則であるとする. このとき \bar{x} の近傍 U , $\bar{\tau} = 0$ の近傍 T , 写像 $y^j : V \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma^j : V \rightarrow \mathbb{R}^s$ ($V := U \times T$) が存在して, $y^j(\bar{x}, 0) = \bar{y}^j, \gamma^j(\bar{x}, 0) = \bar{\gamma}^j$ が成立し, さらに各々の $(x, \tau) \in V$ に対して $(y^j(x, \tau), \gamma^j(x, \tau))$ は (15)~(18) の一意的な解となる.

証明 等式 (15),(16) のヤコビ行列 $A^j(\bar{x}, \bar{y}^j, \bar{\gamma}^j)$ が正則なので陰関数定理によって直ちに証明される. ■

補題 2.2 によって仮定 B の下で命題 4.1 の仮定 (A^j の正則性) は各 $j \in J_0(\bar{x})$ に対して成立する. 補題 3.1(i) よりすべての $(x, \tau) \in V$ に対して次の 2 つの条件は等価である.

$$g_j(x, y^j) \leq 0, \quad y^j \text{ solves } Q_\tau^j(x)$$

$$g_j(x, y^j(x, \tau)) \leq 0$$

仮定 C,D のもとで $j \in J \setminus J_0(\bar{x})$ に対し $Q_\tau^j(x)$ の最適値関数 $\tilde{\varphi}_j(x, \tau)$ は $(\bar{x}, 0)$ の近傍 $U \times T$ において連続である. よって任意の $\tau \in T$ に対し問題 P_τ は \bar{x} の近傍 U において次の問題と等価である.

$$GSIP_\tau(\bar{x}) \quad \min_{x \in U} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_j(x, y^j(x, \tau)) \leq 0, \quad \forall j \in J_0(\bar{x})$$

以上をまとめて, 収束解析の基本となる次の補題を得る.

補題 4.1 $\bar{x} \in \partial M \cap M$ において仮定 B が成立しているとする. このとき任意の $\tau \in T$ に対し x_τ が $GSIP_\tau(\bar{x})$ の最適解であるための必要十分条件は $(x_\tau, y^1, \dots, y^p), x_\tau \in U$ が SG_τ の最適解であることである. よって $(\bar{x}, 0)$ の近傍 $U \times T$ において P_τ は $GSIP_\tau(\bar{x})$ と等価である. 特に $GSIP_0(\bar{x})$ は集合 U 内において SG_0 と等価であり, 従って SG , さらに $GSIP$ と等価である.

次の定理は SG_τ の解の振る舞いに関するものである. ここでは補題 4.1 とパラメトリック最適化問題に関するよく知られた結果 [11] を用いて証明する. 以降, \mathcal{N} は自然数全体の集合を表すものとする.

定理 4.1 $\{\tau_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ を $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu = 0$ となるような正数列とし $\{(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ を $P_{\tau_\nu}, \nu \in \mathcal{N}$ の大域的最適解の列とする. このとき x^* は点列 $\{x^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ の集積点でありかつ仮定 B を満たしているとし, さらに $MFCQ$ をみたすような $GSIP_0(x^*)$ の解が存在するとする. このとき x^* は $GSIP$ の大域的最適解である.

証明 (x^ν, τ_ν) は $\nu \rightarrow \infty$ のとき $(x^*, 0)$ に収束するとしても一般性を失わない. 命題 4.1 より, 十分大きな $\nu, y^{j,\nu}, j \in J_0(x^*)$ に対して $y^{j,\nu} = y(x^\nu, \tau_\nu)$ かつ x^ν は $GSIP_{\tau_\nu}(x^*)$ の解となる. 連続性の議論により x^* は $GSIP_0(x^*)$ の実行可能解となり, 従って $(x^*, 0)$ の近傍 U 内において $GSIP_0(x^*)$ と等価な $GSIP$ の実行可能解となる. 仮定より $MFCQ$ をみたすような $GSIP_0(x^*)$ の解が存在するので, Gauvin and Dubeau [11] の結果から $GSIP_\tau(x^*)$ の最適値関数 $\omega(\tau)$ は τ

に関して連続となる. よって $\omega(\tau_\nu) = f(x^\nu) \rightarrow \omega(0)$ であり, さらに x^* は $GSIP$ の解である. ■

定理 4.1 は理論上成立するが標準的なソフトウェアでは必ずしも $P_{\tau_\nu}, \nu \in \mathcal{N}$ の大域的最適解を求めることはできないため, 実際上は $GSIP$ の大域的最適解への収束を保証するものではない. 結論から述べると 3.2 節のアルゴリズムに対し収束が保証されるのはせいぜい $GSIP$ の FJ 点までである.

続いて問題 P_τ の FJ 点 x が $GSIP_\tau(\bar{x})$ および $GSIP$ のそれとどのような関係があるかを考察する.

補題 4.2 $\bar{x} \in \partial M \cap M$ において仮定 B が成立し, $(\bar{x}, 0)$ に十分近い点 (x, τ) が存在して $(x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p)$ は P_τ の FJ 点であるとする. さらに

$$A^j = \begin{pmatrix} \nabla_y^2 L_j(x, y^j, \gamma^j) & -\nabla_y v(x, y^j) \\ -\text{diag}(\gamma^j) \nabla_y v(x, y^j)^T & -\text{diag}(v(x, y^j)) \end{pmatrix}, \quad j \in J \setminus J_0(\bar{x})$$

は正則であるとする. このとき x は $GSIP_\tau(\bar{x})$ の FJ 点である.

証明 x は $GSIP_\tau(\bar{x})$ の実行可能解である. また $(x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p)$ が P_τ の実行可能解であるということは y^j が $Q_\tau^j(x)$ の解であるということと同値である. A^j はすべての $j \in J$ に対して正則であるので $(\bar{x}, 0)$ に十分近い点 (x, τ) に対し y^j は $Q_\tau^j(x)$ の解 $y^j(x, \tau)$ と一致する. 以上の考察と簡単な連続性の議論より P_τ の FJ 点の満たすべき条件は $GSIP_\tau(\bar{x})$ の FJ 点のそれと等価である. ■

続いてこの節の核となる定理を証明する.

定理 4.2 $\{\tau_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ を $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu = 0$ となるような正数列とする. $(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})$ を $P_{\tau_\nu}, \nu \in \mathcal{N}$ の FJ 点であるとし, その集積点を $(x^*, y^{1,*}, \gamma^{1,*}, \dots, y^{p,*}, \gamma^{p,*})$ とする. さらに x^* に対して仮定 B が成り立つとし,

$$A^j = \begin{pmatrix} \nabla_y^2 L_j(x^*, y^{j,*}, \gamma^{j,*}) & -\nabla_y v(x^*, y^{j,*}) \\ -\text{diag}(\gamma^{j,*}) \nabla_y v(x^*, y^{j,*})^T & -\text{diag}(v(x^*, y^{j,*})) \end{pmatrix}, \quad j \in J \setminus J_0(x^*)$$

は正則であるとする. このとき x^* は $GSIP$ の FJ 点である.

証明 十分大きな $\nu \in \mathcal{N}$ に対し補題 4.2 の仮定はすべて満たされるので x^ν は $GSIP_{\tau_\nu}(x^*)$ の FJ 点となる. 連続性の議論と補題 2.1, 系 2.1 より x^* は $GSIP$ の FJ 点となる. ■

次の命題では定理 4.2 の仮定における集積点の存在条件を与える.

命題 4.2 $\{\tau_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ を $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu = 0$ となるような正数列とし, $(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})$ は $P_{\tau_\nu}, \nu \in \mathcal{N}$ の実行可能解であるとする. さらに点列 $\{x^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ の集積点 x^* が存在して $Y(x^*)$ 上

のすべての点で $LICQ$ が成立するとする. このとき点列 $\{(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ は集積点 $(x^*, y^{1,*}, \gamma^{1,*}, \dots, y^{p,*}, \gamma^{p,*})$ を持つ.

証明 $\nu \rightarrow \infty$ のとき $x^\nu \rightarrow x^*$ となるような部分列をとることができる. $(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})$ が P_τ の実行可能解であるということは $\psi_{\tau\nu}(\gamma_l^{j,\nu}, -v_l(x^\nu, y^{j,\nu})) = 0$ であることと同値であるので, 性質 1(i) によってすべての $l \in L, j \in J$ に対して $v_l(x^\nu, y^{j,\nu}) < 0$ である. 従って $y^{j,\nu} \in Y(x^\nu), j \in J$ と点集合写像 Y の上半連続性より $y^{j,\nu}, \nu \in \mathcal{N}$ の集積点 $y^{j,*}$ が存在し, かつ $y^{j,*} \in Y(x^*), j \in J$ となる.

次にある $j \in J$ に対し点列 $\{\gamma^{j,\nu}\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ は非有界であると仮定する. このとき $\|\eta^j\| = 1$ となるあるベクトル η^j に収束するベクトル $\eta^{j,\nu} = \|\gamma^{j,\nu}\|^{-1} \gamma^{j,\nu}$ を考える. $(x^\nu, y^{1,\nu}, \gamma^{1,\nu}, \dots, y^{p,\nu}, \gamma^{p,\nu})$ が P_τ の実行可能解であることにより

$$\nabla_y g_j(x^\nu, y^{j,\nu}) - \gamma^{j,\nu} \nabla_y v(x^\nu, y^{j,\nu}) = 0 \quad (19)$$

つぎに性質 1(i) より

$$-\gamma_l^{j,\nu} v_l(x^\nu, y^{j,\nu}) = \tau_\nu^2, l \in L \quad (20)$$

を得る. (20) を $\|\gamma^{j,\nu}\|$ で割り, さらに $\nu \rightarrow \infty$ の極限を考えることにより, $\eta_l^j = 0, l \in L \setminus L_0(x^*, y^{j,*})$ を得る. しかし, (19) に対して同様の操作を行えば点 $y^{j,*} \in Y(x^*)$ において $LICQ$ が満たされないことがいえるので, 仮定と矛盾する. よってすべての $j \in J$ に対して $\{\gamma^{j,\nu}\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ は有界であり, 従って集積点を持つ. ■

命題 4.2 の仮定である集積点 x^* の存在は, $GSIP$ が有界でかつ空でない集合 X によって与えられる制約 $x \in X$ を含むならば保証することができる.

最後に収束率に関する結果を述べ, 本節を終える.

補題 4.3 $\bar{x} \in \partial M \cap M$ とする. 各 $j \in J$ に対し $Q^j(\bar{x})$ は非退化な最適解をもち, $(y^j(x, \tau), \gamma^j(x, \tau))$ は $(\bar{x}, 0)$ の近傍における (15)~(18) の一意な解とする. このとき

$$\begin{pmatrix} \nabla_\tau y^j(x, 0) \\ \nabla_\tau \gamma^j(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が \bar{x} に十分近い x に対して成立する.

$\bar{x} \in \partial M \cap M$ において仮定 B が成立し, かつ \bar{x} が $GSIP_0(\bar{x})$ の非退化な局所的最適解であるとき, \bar{x} を $GSIP$ の非退化な解と呼ぶことにする.

命題 4.3 定理 4.1 の仮定が成立し, かつ $GSIP$ の解 x^* は非退化であるとする. このとき x^* に収束する任意の部分列 $\{x^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ に対して次式が成り立つ.

$$f(x^\nu) - f(x^*) = O(\tau_\nu^2)$$

証明 $\omega(\tau)$ は P_τ の最適値を表すとする. 定理 4.1 の証明において τ が十分 0 に近ければ $\omega(\tau)$ は $GSIP_\tau(x^*)$ の最適値と一致することをみた. さらに補題 2.1, 補題 4.3, さらに 0 の周りでの ω のテイラー展開により直ちに示される. ■

5 数値実験

5.1 問題例

5.1.1 デザインセンタリング問題

デザインセンタリング問題とは, パラメータ化された図形 $B(x)$ がある与えられた領域 G に収まるという条件のもとで, $B(x)$ の体積 $\text{Vol}(x)$ が最大になるような x を求める問題である [12]. 例えばカットする前のダイヤモンドの形と大きさが領域 G で表されているとし, x によってパラメータ化されたある多面体 $B(x)$ の形にカットすることを考える. もっとも効率よく (無駄を少なく) カットするには領域 G に含まれる最大の多面体 $B(x)$ を求めればよい. このような問題は次のデザインセンタリング問題として定式化できる.

$$\max_x \text{Vol}(B(x)) \quad \text{s.t.} \quad B(x) \subset G$$

ここで $G = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid g(y) \leq 0\}$ および $B(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid v(x, y) \leq 0\}$ とすると, デザインセンタリング問題は次の $GSIP$ で表される.

$$\max_x \text{Vol}(B(x)) \quad \text{s.t.} \quad g(y) \leq 0 \quad \forall y \in B(x)$$

ここでは簡単のため, 平面上で $B(x)$ の面積を最大にする問題を考える. いま領域 G が次のように与えられているとする (図 1).

$$G = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid g(y) \leq 0\}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} -y_1 - y_2^2 \\ y_1/4 + y_2 - 3/4 \\ -y_2 - 1 \end{pmatrix}$$

問題 1-1. G に収まる面積最大の内 $B(x)$ を求める. ただし $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ である.

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 - x_3^2 \leq 0\}, \quad \text{Vol}(B(x)) = \pi x_3^2$$

問題 1-2. G に収まる y_1 軸, y_2 軸に平行な軸を持つ楕円で面積最大のもの求める. ただし $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ である.

$$B(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(y_1 - x_1)^2}{x_3^2} + \frac{(y_2 - x_2)^2}{x_4^2} - 1 \leq 0 \right\}, \quad \text{Vol}(B(x)) = \pi x_3 x_4$$

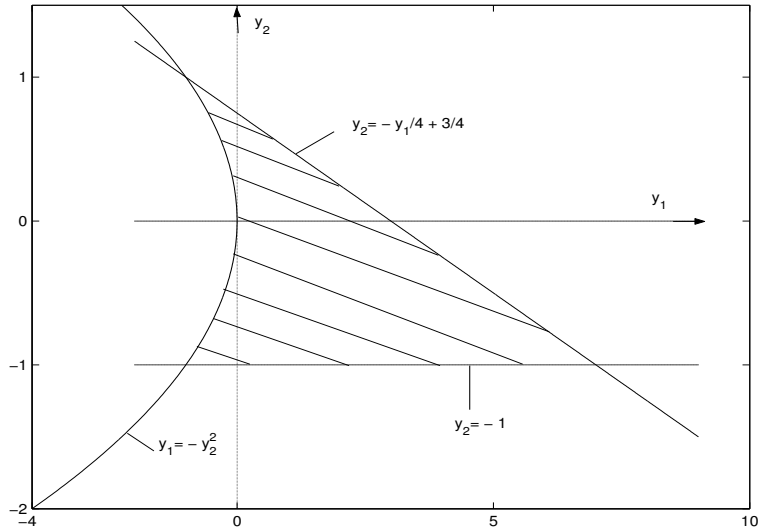


図 1: 領域 G

5.1.2 ロバスト最適化問題

現実の最適化問題においては必ずしも完全な情報が得られるとは限らないため、不確かなデータに基づいて問題を解かなければならない場合が多々存在する。そこで不確定性に対してもっとも慎重に、すなわち常に最悪の場合を想定して最適化を行う問題をロバスト最適化問題と呼ぶ。

変数 x に関する最適化問題において、制約関数 g がある不確かなデータ $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ に依存するとき、最悪のケースを考えるとすれば実行可能領域は次のような半無限制約によって表せる。

$$g(x, y) \leq 0, \quad \forall y \in Y$$

さらに Y が x に依存するとき一般化半無限制約となる。ここで次のようなロバスト最適化問題を考える。

いま一万円を N 個の銘柄に投資することを考える。銘柄 i に一万円投資すると一定期間後に $y_i (> 0)$ 万円になるとする。最適化の目的は銘柄 $i, i = 1, \dots, N$ に投資する額を x_i 万円としてポートフォリオの価値 $y^T x$ を最大化することである。 y は確定しておらず集合 $Y(x) \subset \mathbb{R}^n$ 上に分布していると仮定すれば、ロバスト最適化は次の半無限計画問題として定式化される。

$$\max_{x, x_{N+1}} x_{N+1} \quad \text{s.t.} \quad x_{N+1} - y^T x \leq 0, \quad \forall y \in Y(x), \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad x \geq 0$$

ここでは $Y(x)$ が楕円領域であるケースを取り上げる。

問題 2-1. 領域 $Y(x)$ が x に依存しないで表せる SIP を考える。

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \leq \theta^2 \right\}$$

$$\bar{y}_i = 1.15 + i \cdot \frac{0.05}{N}, \sigma_i = \frac{0.05}{3N} \sqrt{2N(N+1)i}, i = 1, \dots, N, \theta = 1.5$$

ここで \bar{y}_i は予想される y_i の値を表す定数, σ_i はスケーリングパラメータ, θ は意思決定者のリスク回避の指標となる定数である [13]. θ が大きいほど領域 Y が大きくなるので, リスク回避の志向の強さを意味する.

問題 2-2. 領域 $Y(x)$ が問題 2-1 の $\bar{y}_i, \sigma_i, \theta$ を用いて次式で表される $GSIP$ を考える.

$$Y(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \left| \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \leq \Theta(x)^2 \right. \right\}$$

$$\bar{y}_i = 1.15 + i \cdot \frac{0.05}{N}, \sigma_i = \frac{0.05}{3N} \sqrt{2N(N+1)i}, i = 1, \dots, N, \theta = 1.5$$

$$\Theta(x) = \theta \left(1 + \sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{1}{N} \right)^2 \right)$$

このケースでは x_i が $1/N$ から離れるほどリスク回避の志向が強くなることになる.

5.2 実験方法

本実験は CPU が 2.53GHz の Turbolinux10 の環境のもとで行った. **アルゴリズム*** のステップ 3 では *Matlab 6.5 Optimization Toolbox 2.2* の *fmincon* すなわち BFGS 公式を用いた SQP 法を適用した. パラメータ列は $\tau_\nu = 10 \cdot 10^{-\nu}$ とした. また目的関数値における相対誤差が 10^{-6} 以下になった時点で終了とした. すなわち元の $GSIP$ の最適値を f^* , 問題 P_{τ_ν} の最適値を f^ν として終了条件は次式で表される.

$$\frac{|f^\nu - f^*|}{f^*} \leq 10^{-6}$$

各問題に対する初期値及びパラメータを次のように設定する.

デザインセンタリング問題

問題 1-1. 初期点として $x^0 = (0, 0, 1)^T$ を用いた. このとき $B(x^0)$ は原点を中心とする半径 1 の円であり領域 G に収まらないため, x^0 は実行不可能な点であることがわかる.

問題 1-2. 同じく初期点として, 実行不可能な点 $x^0 = (0, 0, 1, 1)^T$ を用いた.

ロバスト最適化問題

問題 2-1, 2-2 とともに初期点は $x^0 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ とし, $N = 10$ と $N = 150$ のそれぞれに対して実験を行った.

5.3 結果の考察

各問題に対してアルゴリズム*を適用した結果を表1～7に示す. 表では各 ν に対するステップ3での反復回数 (P_{τ_ν} を解くのにかった反復回数), 実行時間 (秒), さらに得られた解に対する制約関数の最大値 g^* を示した. すなわち g^* は, 得られた解を x^* として次の問題の最適値として与えられる.

$$\max_{y, j \in J} g_j(x^*, y) \text{ s.t } v_l(x^*, y) \leq 0, l \in L$$

表 1: 問題 1-1 に対する計算結果

ν	ステップ3での反復回数	実行時間
0	47	0.69
1	10	0.13
2	5	0.06
3	3	0.04
4	2	0.03
5	1	0.02
$g^*: 8.22e-7$		Total time:0.97

表 2: 問題 1-2 に対する計算結果

$$\tau_\nu = 10 \cdot 5^{-\nu}$$

ν	ステップ3での反復回数	実行時間
0	120	1.99
1	49	0.71
2	11	0.10
3	5	0.04
4	2	0.02
$g^*: 1.12e-6$		Total time:2.86

表 3: 問題 2-1 に対する計算結果

$$(N = 10)$$

ν	ステップ3での反復回数	実行時間
0	109	1.45
1	112	1.43
2	118	1.58
3	69	0.92
4	50	0.66
5	5	0.09
$g^*: 3.27e-5$		Total time:6.13

表 4: 問題 2-1 に対する計算結果

$$(N = 150)$$

ν	ステップ3での反復回数	実行時間
0	410	177.54
1	395	172.32
2	104	46.12
3	131	58.49
4	12	5.89
5	1	0.96
$g^*: 8.66e-8$		Total time:461.32

デザインセンタリング問題については, 問題 1-1 に関しては表 1 に示したように良い収束結果が得られ, アルゴリズム*の有効性が確認できた. しかし問題 1-2 に関してはステップ 3 で *fmincon* が収束しなかった. これはステップ 3 では問題 P_{τ_ν} の解 $(x^{\nu,*}, y^{1,\nu,*}, \gamma^{1,\nu,*}, \dots, y^{p,\nu,*}, \gamma^{p,\nu,*})$ を問題 $P_{\tau_{\nu+1}}$ の初期点として用いるために, $\tau_{\nu+1}/\tau_\nu$ の値を小さくとり過ぎると, 点 $(x^{\nu,*}, y^{1,\nu,*}, \gamma^{1,\nu,*}, \dots, y^{p,\nu,*}, \gamma^{p,\nu,*})$ は問題 $P_{\tau_{\nu+1}}$ の初期点としては不適切になるためであると考えられる. そのためパラメータを

表 5: 問題 2-2 に対する計算結果

($N = 10$)

ν	ステップ 3 での反復回数	実行時間
0	273	4.94
1	152	2.32
2	132	2.20
3	8	0.12
4	2	0.05
5	1	0.04
$g^*: 1.29\text{e-}6$		Total time:9.67

表 6: 問題 2-2 に対する計算結果 1

($N = 150$): $\tau_\nu = 10^{-\nu}$

ν	ステップ 3 での反復回数	実行時間
0	57	26.47
1	37	17.59
2	49	22.69
3	24	11.81
4	4	2.37
5	1	1.00
6	1	1.02
7	1	1.00
8	1	0.99
$g^*: 1.35\text{e-}9$		Total time:84.94

表 7: 問題 2-2 に対する計算結果 2($N = 150$): $\tau_\nu = 2^{-\nu}$

ν	ステップ 3 での反復回数	実行時間	ν	ステップ 3 での反復回数	実行時間
0	57	25.87	8	3	1.88
1	14	6.70	9	1	0.98
2	8	4.09	10	1	0.97
3	9	4.62	11	1	0.96
4	10	4.93	12	1	0.98
5	9	4.28	13	1	0.97
6	2	1.47	14	1	0.95
7	1	0.98	$g^*: 3.10\text{e-}9$ Total time:60.63		

$\tau_\nu = 10 \cdot 5^{-\nu}$ としたところ表2の結果を得た. 次にロバスト最適化問題については, 問題 2-1, 2-2(N=10) に関してはデザインセンタリング問題と同様に良い収束結果が得られた (表 3-表 5). しかし問題 2-2(N=150) に関しては問題 P_{τ_0} の解が得られなかったため, パラメータを A: $\tau_\nu = 10^{-\nu}$ (表 6), B: $\tau_\nu = 2^{-\nu}$ (表 7) として実験を行った. A の場合全体では9回の反復で終了している一方, B の場合 14 回の反復で終了している. しかし計算時間を見ると B の方が良い収束結果が得られている. 問題 1-2, 2-2(N=150) の結果より, アルゴリズム*を適用する場合, $\tau_{\nu+1}/\tau_\nu$ の値をある程度大きくとることが必要であることがわかる.

6 結論

本研究の核は, GSIP を主問題と副問題という二段階の構造を持つ問題としてとらえ, 凸性の仮定を利用して副問題を KKT 条件で置き換えることで MPEC として再定式化したことである. さらにその平滑化問題を考えることにより, GSIP の解法アルゴリズムを構成し, 数値実験によってその有効性を確認した. もし副問題の凸性がなければ, 得られた MPEC はもとの GSIP と等価ではない. そのような問題に本アルゴリズムを適用した場合には最適値の下界値が得られる. また別のアプローチとして変数 y を x の陰関数として表現する手法も考えられる. 本研究の手法では変数 $(x, y^1, \gamma^1, \dots, y^p, \gamma^p)$ に関する最適化問題 P_{τ_ν} を解くことになるが, $\{l, m, s\}$ が大きい場合, 変数の次元が非常に大きくなってしまふ. 陰関数を用いた手法では x について最適化すれば良いため, そのような困難は緩和される可能性がある. その他, 添字集合 $Y(x)$ を離散化する方法なども有力であり, GSIP の効率的アルゴリズムを開発するための研究の余地は大きい.

謝辞

日頃から御教授下さり, 本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を賜った福島雅夫教授に深く感謝の意を表します. また日頃からお世話になっている山下信雄助手, 福島研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

- [1] G. Still: *Semi-infinite Programming: An Introduction "preliminary version"*. June 29, 2004,
<http://wwwhome.math.utwente.nl/~stillgj/sip/tutorial.pdf>
- [2] R. Hettich and K.O. Kortanek: *Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications*. SIAM Rev., Vol. 35 (1993), pp. 380-429.
- [3] O. Stein and G. Still: *Solving Semi-infinite optimization problems with interior point techniques*. SIAM J. Control Optim. Vol. 42, pp. 769-788.
- [4] 福島雅夫: 非線最適化の基礎. 朝倉書店, 2001.4.
- [5] A. V. Fiacco and G. P. McCormick: *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley, New York, 1968.
- [6] R. Hettich and G. Still: *Second order optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems*. Optimization, Vol. 34 (1995), pp. 195-211.
- [7] F. John: *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*. in Studies and Essays, R. Courant Anniversary Volume, Interscience Publishers, New York, 1948, pp. 187-204.
- [8] O. Stein: *Bi-level Strategies in Semi-infinite Programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
- [9] C. Kanzow: *Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 17 (1996), pp. 851-868.
- [10] H. Th. Jongen and G. W. Weber: *Nonlinear optimization: Characterization of structural stability*. J. Global Optim., Vol. 1 (1991), pp. 47-64.
- [11] J. Gauvin and F. Dubeau: *Differential properties of the marginal function in mathematical programming*. Math. Program. Study, Vol. 19 (1982), pp. 101-119.

- [12] E. Polak: *An implementable algorithm for the optimal design centering, tolerancing and tuning problem*. J. Optim. Theory Appl., Vol. 37 (1982), pp. 45-67.
- [13] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: *Robust solutions of uncertain linear programs*. Oper. Res. Lett., Vol. 25 (1999), pp. 1-13.