

特別研究報告書

確率的線形混合相補性問題に対する  
期待残差最小化法の適用

指導教員

福嶋 雅夫 教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成13年4月入学

平成17年3月卒業

江尻 健志

# 確率的線形混合相補性問題に対する期待残差最小化法の適用

江尻健志

## 摘要

数理計画問題やゲーム理論など幅広い分野にしばしば現れる均衡問題において、混合相補性問題は重要な役割を担っている。また、非線形計画問題や変分不等式問題の KKT 条件は混合相補性問題の形に表すことができることから、混合相補性問題は均衡問題だけでなく、ある意味で最適化問題を含む幅広いクラスの問題とみなすこともできる。これまで不確定性のない（決定的な）混合相補性問題に対しては多くの研究がなされ、様々なアルゴリズムが提案されてきた。一方、実際の問題では天候や市場の動向など、不確定性が存在することがしばしば起こりうる。そのような確率的な要素のある相補性問題に対して近年、期待残差最小化法と呼ばれる方法が提案されている。

本報告書では、確率的相補性問題に対して提案された期待残差最小化法を、確率的混合相補性問題に対して拡張する。具体的には、まず確率的混合相補性問題を等価な方程式で表せることを示し、その方程式に対する期待残差が最小となる解を求める問題を定式化する。さらに、確率的混合相補性問題の応用例として交通流配分問題を取り上げ、数値実験を行った。この結果から、期待残差最小化法では従来の手法では取り扱えなかった、情報の曖昧さまで考慮した解を求められることがわかった。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>準備</b>	<b>2</b>
2.1	混合相補性問題 . . . . .	2
2.2	混合相補性問題の再定式化 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>期待値法と期待残差最小化法</b>	<b>3</b>
3.1	不確定性を持つ混合相補性問題 . . . . .	3
3.2	期待値法 . . . . .	4
3.3	期待残差最小化法 . . . . .	4
3.4	スケーリング . . . . .	5
<b>4</b>	<b>交通流配分問題への応用</b>	<b>5</b>
4.1	交通流配分問題の混合相補性問題への変換 . . . . .	5
4.2	交通流配分問題に対する ERM 問題 . . . . .	6
<b>5</b>	<b>数値実験</b>	<b>7</b>
5.1	実験に用いるネットワーク . . . . .	7
5.2	実験 . . . . .	8
5.3	実験結果・考察 . . . . .	9
<b>6</b>	<b>結論</b>	<b>14</b>

# 1 序論

経済, 生産計画, システム設計などのさまざまな分野においてオペレーションズリサーチの手法が用いられて, 成果をあげている. 変分不等式問題や相補性問題などのいわゆる均衡問題は, そのようなオペレーションズリサーチで扱われる問題の中にしばしば現れる. また, 均衡問題は特定の目的関数を最小化する最適化問題ではないが, 非線形計画問題の KKT 条件が均衡問題の形で表されることから, ある意味で最適化問題を含む幅広いクラスの問題とみなすこともできる [3]. そのような均衡問題に対して, 不確定性のないものについてはこれまで多くの研究がなされ, さまざまなアルゴリズムが提案されてきたが, 一方実際の問題では天候や市場の動向など, 不確定性が存在することがしばしば起こりうる. 確定的な問題に比べて不確定性を持つ問題に対する研究はあまり多くなく, 確率的線形相補性問題に対して新たに提案された手法が期待残差最小化法である [1].

確率的線形相補性問題とは, 与えられた線形なベクトル値写像  $F : R^n \times \Omega \rightarrow R^n$  に対して, 次のような条件を満たすベクトル  $x \in R_+^n$  を求める問題である.

$$F(x, \omega) \geq 0, x \geq 0, \langle F(x, \omega), x \rangle = 0 \quad \omega \in \Omega \quad (1)$$

ただし,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  は  $\Omega \subseteq R^m$  であるような確率空間であり,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  はベクトルの内積を表す. この問題に対して, NCP 関数と呼ばれる次のような性質を持つ関数  $\psi : R^2 \rightarrow R$  を考える.

$$\psi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

NCP 関数の代表的なものとしては, min 関数

$$\psi(a, b) = \min(a, b)$$

や Fischer-Burmeister (FB) 関数

$$\psi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

などがある. このような NCP 関数を使うことで, 確率的線形相補性問題 (1) は次の方程式によって等価に表すことができる [1][3].

$$\Psi(x, \omega) = 0 \quad (2)$$

ただし,  $\Psi : R^n \times \Omega \rightarrow R^n$  は次のように定義されるベクトル値関数である.

$$\Psi(x, \omega) := \begin{pmatrix} \psi(F_1(x, \omega), x_1) \\ \vdots \\ \psi(F_n(x, \omega), x_n) \end{pmatrix}$$

しかし, すべての  $\omega \in \Omega$  に対して (1) 式や (2) 式を満たすような  $x \in R_+^n$  は一般には存在しない. そこで, 確率的線形相補性問題 (1) に対する期待残差最小化法では,  $\|\Psi(x, \omega)\|^2$  の期待値が最も 0 に近いものを解と考える. 具体的には次の最小化問題を考える [1].

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && E[\|\Psi(x, \omega)\|^2] \\ & \text{subject to} && x \in R_+^n \end{aligned}$$

本報告書では、確率的線形相補性問題 (1) に対して定式化された期待残差最小化法を確率的混合相補性問題に対して適用することを考える。まず第 2 章において、混合相補性問題の等価な方程式への再定式化について示す。第 3 章では、第 2 章での議論を確率的混合相補性問題へ拡張し、その解法として従来手法である期待値法と、期待残差最小化法での定式化を示す。第 4 章では、確率的混合相補性問題の応用例として交通流配分問題を取り上げ、期待残差最小化法での定式化を行う。最後に第 5 章で交通流配分問題に対する数値実験の結果を報告し、考察を行う。

## 2 準備

### 2.1 混合相補性問題

混合相補性問題とは、空でない直方体  $S = \{x \in R^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i \ (i = 1, \dots, n)\}$  とベクトル値写像  $F : R^n \rightarrow R^n$  に対して、次の不等式を満たすようなベクトル  $x \in S$  を求める問題である。

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in S) \quad (3)$$

ここで、 $l_i \in [-\infty, +\infty)$  かつ  $u_i \in (-\infty, +\infty]$  であり、 $l_i = -\infty$  または  $u_i = +\infty$  のときには  $l_i \leq x_i$  と  $x_i \leq u_i$  はそれぞれ  $-\infty < x_i$  と  $x_i < +\infty$  を意味するものとする。したがって、直方体は一般には有界とは限らない。また、 $-\infty < l_i = u_i < +\infty$  のときは変数  $x_i$  を定数として扱えるので、以下では  $l_i < u_i$  と仮定する。

混合相補性問題は特定の目的関数を最小化する最適化問題ではないが、非線形計画問題や変分不等式問題の KKT 条件が混合相補性問題の形で表せるため、ある意味では最適化問題を含む広い範囲の問題と見なすことができる。

混合相補性問題 (3) は、各成分ごとの不等式

$$F_i(x)(y_i - x_i) \geq 0 \quad (\forall y_i \in [l_i, u_i]) \quad i = 1, \dots, n$$

と等価であることが知られている [3]。ここで、 $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$  である。

さらに、直方体  $S$  に対して、適当な変数変換を施すことにより、一般性を失うことなく添字集合  $N = \{1, \dots, n\}$  を次のように分割できる。

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

ただし、 $N_1 = \{i \mid l_i = -\infty, u_i = +\infty\}$ ,  $N_2 = \{i \mid l_i = 0, u_i = +\infty\}$ ,  $N_3 = \{i \mid -\infty < l_i < u_i < +\infty\}$  である。これによって、混合相補性問題 (3) は次のように表すことができる [3]。

$$\left. \begin{aligned} F_i(x) &= 0 & (i \in N_1) \\ \left. \begin{aligned} x_i &\geq 0, F_i(x) \geq 0 \\ x_i &> 0 \Rightarrow F_i(x) = 0 \end{aligned} \right\} & (i \in N_2) \\ \left. \begin{aligned} l_i &\leq x_i \leq u_i \\ x_i = l_i &\Rightarrow F_i(x) \geq 0 \\ l_i < x_i < u_i &\Rightarrow F_i(x) = 0 \\ x_i = u_i &\Rightarrow F_i(x) \leq 0 \end{aligned} \right\} & (i \in N_3) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

## 2.2 混合相補性問題の再定式化

この節では、前節で紹介した混合相補性問題 (4) を等価な方程式に再定式化する方法について述べる。

$\text{mid}\{a, b, c\}$  は、三つの数  $a, b, c \in [-\infty, +\infty]$  の中央値を表すものとする。この  $\text{mid}$  関数を使って、 $\phi_i : R^n \rightarrow R$  を

$$\phi_i(x) := \text{mid}\{x_i - l_i, x_i - u_i, F_i(x)\}$$

と定義する。このとき、 $x^*$  において、

$$\phi_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

が成り立つことは、 $x^*$  が (4) 式を満たすことの必要十分条件であることが言える [3]。よって、 $\text{mid}$  関数を用いて、 $\Phi : R^n \rightarrow R^n$  を

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

と定義すると、混合相補性問題 (3) は、方程式

$$\Phi(x) = 0 \quad (6)$$

と等価である。

## 3 期待値法と期待残差最小化法

### 3.1 不確定性を持つ混合相補性問題

混合相補性問題 (3) において、 $F(x)$  に不確定性がある場合を考える。すなわち、ベクトル値写像  $F : R^n \times \Omega \rightarrow R^n$  に対して、

$$\langle F(x, \omega), y - x \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in S) \quad \omega \in \Omega \quad (7)$$

を満たすようなベクトル  $x \in S$  を求めることを考える。ここで、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  は  $\Omega \subseteq R^m$  であるような確率空間である。

不確定性を持つ混合相補性問題に対しても次のようにして、(6) 式のような等価な方程式への再定式化を考えることができる。関数  $\phi_i : R^n \times \Omega \rightarrow R$  を

$$\phi_i(x, \omega) := \text{mid}\{x_i - l_i, x_i - u_i, F_i(x, \omega)\} \quad (8)$$

と定義すると、方程式

$$\Phi(x, \omega) := \begin{pmatrix} \phi_1(x, \omega) \\ \vdots \\ \phi_n(x, \omega) \end{pmatrix} = 0 \quad \omega \in \Omega \quad (9)$$

は (7) 式と等価である。

しかし一般的には、すべての  $\omega \in \Omega$  に対して (7) 式もしくは (9) 式を満たすような  $x \in S$  は存在しない。そこで、どのようなものを解とみなすかによっていくつかのアプローチが考えられる。

### 3.2 期待値法

期待値法と呼ばれる従来の方法では, 問題 (7) の  $F(x, \omega)$  を, その期待値  $F_\infty(x) := E[F(x, \omega)]$  で置き換えた問題, つまり,

$$\langle F_\infty(x), y - x \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in S)$$

を満たすようなベクトル  $x \in S$  を求める [1]. この問題は, 一般には確率変数  $\omega$  を, その期待値  $E[\omega]$  で置き換えたものとは異なる問題である. 期待値関数  $F_\infty(x)$  を解析的に求めることは難しいことが多いので, 実際には  $F_\infty(x)$  に収束するような関数列  $\{F_k(x)\}$  を考えて,  $F_k(x)$  によって  $F_\infty(x)$  を近似する必要がある. たとえば,  $\omega$  の離散サンプル点  $\{(\omega^i, p_i), i = 1, \dots, k\}$  を用いて,

$$F_k(x) := \sum_{i=1}^k F(x, \omega^i) p_i$$

として  $F_\infty(x)$  を近似するとよい. ただし,  $p_i$  は  $\omega^i$  の生起する確率である.

### 3.3 期待残差最小化法

期待値法では, 問題 (7) において不確定性を持つ関数  $F(x, \omega)$  を, その期待値関数  $F_\infty(x)$  で置き換えることにより, 不確定性を排除していた. この期待値法の考え方は, 問題 (7) から不確定性をのぞこうと考えれば自然なものである.

一方, (9) 式は問題 (7) と等価であり, 当然不確定性を持つ. 一般的には, すべての  $\omega \in \Omega$  に対して (9) 式を満たすような  $x \in S$  は存在しないが, (9) 式から不確定性を排除するため,  $\|\Phi(x, \omega)\|^2$  の期待値を考えることも自然な考え方である. このようにして,  $\|\Phi(x, \omega)\|^2$  の期待値が最も 0 に近いものを解と考える方法が期待残差最小化法 (Expected Residual Minimization Method, ERM 法) である. ERM 法では, 次の最小化問題 (ERM 問題) を考える.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && E[\|\Phi(x, \omega)\|^2] \\ & \text{subject to} && x \in S \end{aligned}$$

この問題は一般に非凸最小化問題であり, また期待値の計算も期待値法のとおり同様難しい場合が多い. そこで, 期待値法のとおりのように, 期待値  $E[\|\Phi(x, \omega)\|^2]$  の代わりに, サンプル点  $\{(\omega^i, p_i), i = 1, \dots, k\}$  を用いて計算される関数

$$f_k(x) := \sum_{i=1}^k \|\Phi(x, \omega^i)\|^2 p_i$$

を期待値の近似関数として, 次の近似問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_k(x) \\ & \text{subject to} && x \in S \end{aligned}$$

を考えればよい.

### 3.4 スケーリング

2.2節で示したように, 不確定性のない混合相補性問題 (3) は (6) 式の方程式に等価に変換できる. 解  $x^*$  では (5) 式が成り立つので,  $x_i - l_i, x_i - u_i, F_i(x)$  の大きさは問題とはならない.

一方, 不確定性を持つ混合相補性問題 (7) の場合でも (9) 式のような方程式に再定式化できるが, 一般にはすべての  $\omega \in \Omega$  に対して (9) 式を満たすような  $x \in S$  は存在しない. ERM 法において mid 関数 (8) 式を計算するとき,  $x_i - l_i, x_i - u_i, F_i(x, \omega)$  の大小の比較をするが,  $x$  と  $F(x, \omega)$  では扱う単位が異なっているのでこれらの中で適当にスケールをそろえるのが望ましい. これが ERM 法のスケージングである. 具体的には, 正定数  $\alpha$  を用いて (8) 式を次の式のように書き換えることでスケージングをおこなう.

$$\phi_i(x, \omega) := \text{mid}\{x_i - l_i, x_i - u_i, \alpha F_i(x, \omega)\}$$

問題に応じて  $\alpha > 0$  の値を適切に定めることは必ずしも容易ではないが, うまく定めることができればより意味のある解が得られる.

## 4 交通流配分問題への応用

交通流配分問題とは, 現実の交通網を抽象化した交通ネットワークを対象に, 各 OD ペア (出発点と終着点のペア) の需要 OD フローと配分原則を与えたとき, ネットワークの各リンクを流れる交通流を予測する問題である [2]. 配分原則が異なれば交通流配分結果は当然のことながら異なる. ここでは等時間配分原則と呼ばれる, 利用者の「できるだけ短い時間で目的地へ到着したい」という自然な経路選択原理である次のような配分原則を考える.

### 等時間配分原則

「同じ OD ペアを持つ利用者によって利用される経路の旅行時間はすべて等しく, 利用されない経路の旅行時間以下である」

この配分原則のもとでの均衡フローを求める問題を, 利用者均衡配分モデルという. 利用者均衡は, 完全情報仮定 (各利用者はネットワークの情報を完全に把握している) と最小費用経路選択仮定 (各利用者は自分の利益を最大化するように行動する) が成立するときに生じる [2]. しかしこれらの仮定はどちらも現実的でなく, どちらにも不確定要素が存在するのが自然である. そこでこの章では, 不確定性のある利用者均衡配分モデルを考え, ERM 問題として定式化することを考える.

### 4.1 交通流配分問題の混合相補性問題への変換

利用者均衡配分モデルは次の変分不等式問題に定式化できる [2].

$$\begin{aligned} & \text{find } x \in X && \text{such that} \\ & \langle c(x, \omega), y - x \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in X) \quad \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{10}$$



ただし, 集合  $X$  は

$$X = \{ x \mid g(x) := -x \leq 0, h_j(x) := \sum_{i \in K_j} x_i - d_j = 0, (\forall j \in Q) \}$$

であり, 経路フロー  $x$  の非負条件と, 需要交通量の条件を表す. また, それぞれの記号の意味は次の表の通りである.

$n$	全経路数
$x \in R^n$	経路フロー, $x_i$ は第 $i$ 経路の経路フローを表す
$c: R^n \times \Omega \rightarrow R^n$	経路コスト, $c_i(x, \omega)$ は第 $i$ 経路の経路コストを表す
$Q$	OD ペア集合
$L$	全 OD ペア数
$K_q$	OD ペア $q$ の利用可能経路集合
$d_q$	OD ペア $q$ の需要交通量

変分不等式問題 (10) は制約条件が線形であるから, 次式を満たす Lagrange 乗数  $\lambda \in R^n, \mu \in R^L$  が存在することがいえる [3].

$$\begin{aligned} & \text{find } (x, \lambda, \mu) \quad \text{such that} \\ & c(x, \omega) + \nabla g(x)\mu + \nabla h(x)\lambda = 0 \\ & h(x) = 0 \\ & 0 \leq \mu \perp g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

ただし,  $x \perp y$  は  $\langle x, y \rangle = 0$  を表す. さらに  $\nabla g(x) = -I_n$  であるから, 第 1 式から  $\mu = c(x, \omega) + \nabla h(x)\lambda$  とわかる. これを第 3 式に代入すると, 交通流配分問題 (10) は次のような混合相補性問題に定式化できる.

$$\begin{aligned} & \text{find } (x, \lambda) \quad \text{such that} \\ & 0 \leq x \perp c(x, \omega) + \nabla h(x)\lambda \geq 0 \quad \omega \in \Omega \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

## 4.2 交通流配分問題に対する ERM 問題

交通流配分問題 (10) と等価な混合相補性問題 (11) は, 次のような等価な方程式に変換できる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, \lambda, \omega) := \begin{pmatrix} \min(x_1, \alpha\{c_1(x, \omega) + (\nabla h(x)\lambda)_1\}) = 0 \\ \vdots \\ \min(x_n, \alpha\{c_n(x, \omega) + (\nabla h(x)\lambda)_n\}) = 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \omega \in \Omega \\ h(x) = 0 \end{array} \right.$$

これより, 交通流配分問題に対する ERM 問題は次のように書ける.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad E[\|\Phi(x, \lambda, \omega)\|^2] \\ & \text{subject to} \quad h(x) = 0 \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

## 5 数値実験

### 5.1 実験に用いるネットワーク

図1のようなノード数4, リンク数5のグラフネットワークを用いて実験を行った. OD ペア集合は  $Q =$

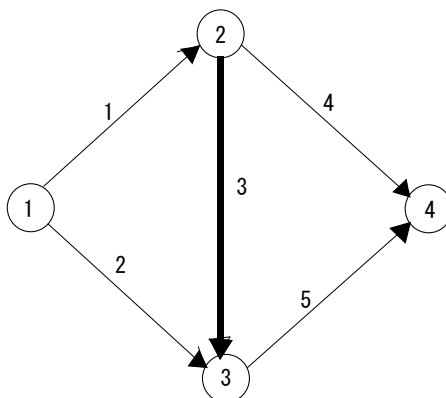


図1: ネットワーク

$\{(1,4)\}$ とした. そのとき利用可能経路集合は  $K = \{\{1,4\}, \{1,3,5\}, \{2,5\}\}$ であり, それぞれ経路1,2,3と表す. また経路フローは  $x \in R^3$ である. このネットワークのパスリンク接続行列  $M$ は次のように書ける.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列  $M$ の  $(i,j)$ 要素は, 経路  $j$ にリンク  $i$ が含まれていれば1, 含まれていなければ0の値をとり, ネットワークの経路とリンクの関係を表す.

リンクフロー  $y \in R^5$ は, 経路フロー  $x$ , パスリンク接続行列  $M$ を用いて  $y = Mx$ と表される. 本実験では, リンクコスト関数は, 図2ようなリンクコスト係数に不確定性を持つような線形な関数  $t(y, \omega) = A(\omega)y + b$ で表されるとした. ただし,

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 + 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 + 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である。これより経路コスト関数  $c: R^3 \times \Omega \rightarrow R^3$  は

$$c(x, \omega) = M^\top t(y, \omega) = M^\top A(\omega) Mx + M^\top b \quad (12)$$

と表される。また、需要交通量は  $d = 20$  とした。

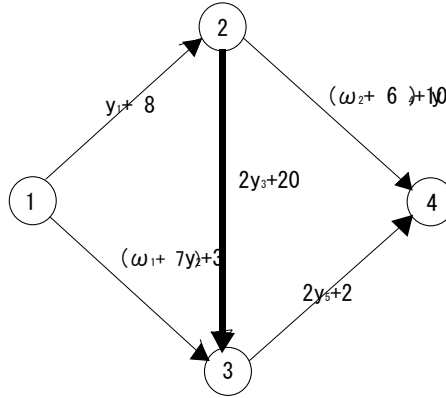


図 2: リンクコスト

## 5.2 実験

### 実験 1

$\omega_1, \omega_2$  はともに、平均 0、分散  $\sigma^2$  の正規分布にしたがう確率変数とした。  $\sigma$  の値を少しずつ変化させ、ERM 法と期待値法で解を求めた。平均を 0 と固定することで、分散の影響だけを調べてみた。また、確率変数  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  には次のような処理を施し、離散サンプル点  $\{(v_{i_1 i_2}, p_{i_1 i_2}), i_1 = 1, \dots, 30, i_2 = 1, \dots, 30\}$  を生成した。

- $\omega_1, \omega_2$  のそれぞれの 99% 信頼区間  $I_1, I_2$  内で 10000 個のサンプル点  $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k), k = 1, \dots, 10000$  を生成した。これは、準モンテカルロ法によって行った [4][5]。
- $j = 1, 2$  のそれぞれについて、 $I_j$  を  $I_{ji}, i = 1, \dots, 30$  と 30 等分に分割した。
- 領域  $I_{1i_1} \times I_{2i_2}$  内に存在する  $\{\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k)\}$  に対して、 $\{\omega_1^k\}$  の平均を  $v_{i_1 i_2}^1$ 、 $\{\omega_2^k\}$  の平均を  $v_{i_1 i_2}^2$ 、 $v_{i_1 i_2} = (v_{i_1 i_2}^1, v_{i_1 i_2}^2)$  とした ( $i_1 = 1, \dots, 30, i_2 = 1, \dots, 30$ )。
- 領域  $I_{1i_1} \times I_{2i_2}$  内の  $\{\omega_k\}$  の個数  $k_{i_1 i_2}$  から、 $v_{i_1 i_2}$  の確率を  $p_{i_1 i_2} = k_{i_1 i_2} / 10000$  とした ( $i_1 = 1, \dots, 30, i_2 = 1, \dots, 30$ )。

これにより, ERM 問題を

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i_1=1}^{30} \sum_{i_2=1}^{30} \|\Phi(x, \lambda, v_{i_1 i_2})\|^2 p_{i_1 i_2} \\ & \text{subject to} && h(x) = 0 \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

と近似して計算した.  $\alpha = 1/15$  とし, 計算には matlab の `fmincon` 関数を用いた.

## 実験 2

$\omega_1$  は平均  $\sigma$ , 分散  $\sigma^2$  の指数分布にしたがう確率変数から  $\sigma$  を引いたもの (平均 0, 分散  $\sigma^2$ ),  $\omega_2$  は平均 0, 分散  $\sigma^2$  の正規分布にしたがう確率変数とした. 実験 1 とは  $\omega_1$  の分布が異なるが, 平均, 分散は同じである. 確率変数  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  に対しては実験 1 と同様の処理を施し, 離散サンプル点  $\{(v_{i_1 i_2}, p_{i_1 i_2}), i_1 = 1, \dots, 30, i_2 = 1, \dots, 30\}$  を生成した.  $\alpha = 1/3$  とし, 実験 1 と同じく問題 (13) を matlab の `fmincon` 関数を使って解いた.

## 5.3 実験結果・考察

各実験において ERM 法と期待値法のそれぞれで求められた解  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^\top$  と, それぞれの経路コストの期待値  $\bar{c}(x^*) = (\bar{c}_1(x^*), \bar{c}_2(x^*), \bar{c}_3(x^*))^\top$ , 利用者一人あたりの経路コストの期待値  $(\bar{c}(x^*))^\top x^*/d$  の変化をグラフに表す (図 3 – 図 10) .

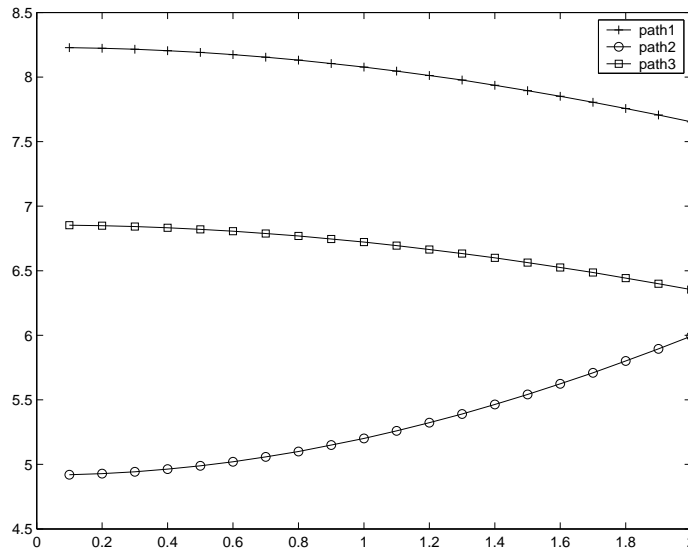


図 3: 実験 1, 経路フローの変化 (ERM 法)

横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路フロー

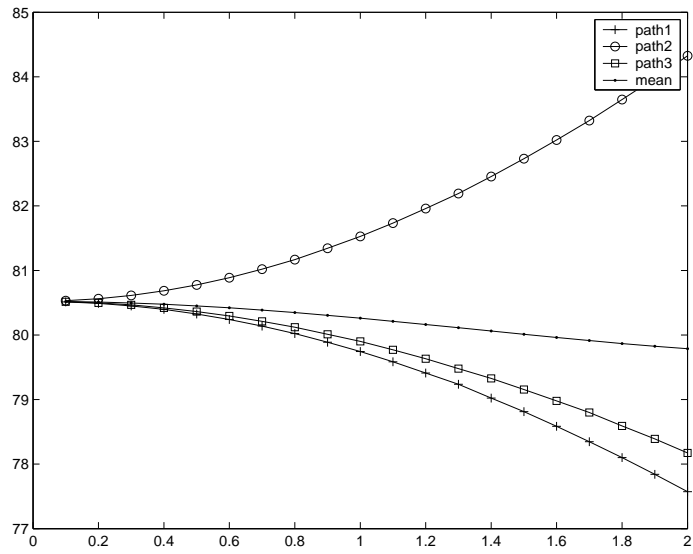


図 4: 実験 1, 経路コスト期待値の変化 (ERM 法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路コスト期待値

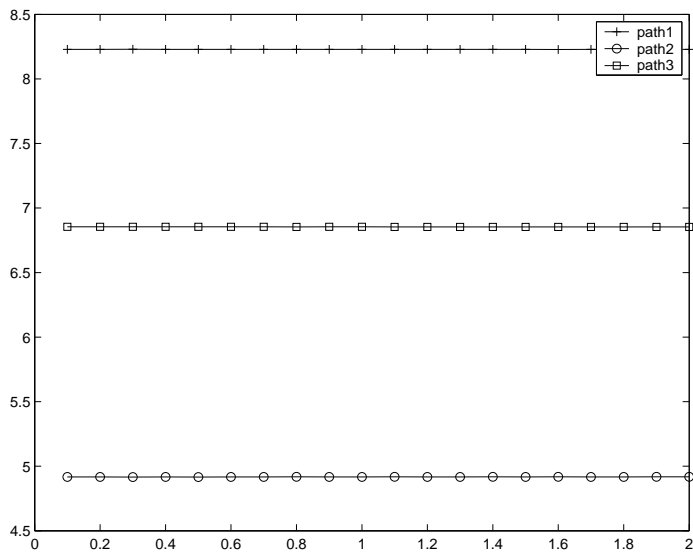


図 5: 実験 1, 経路フローの変化 (期待値法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路フロー

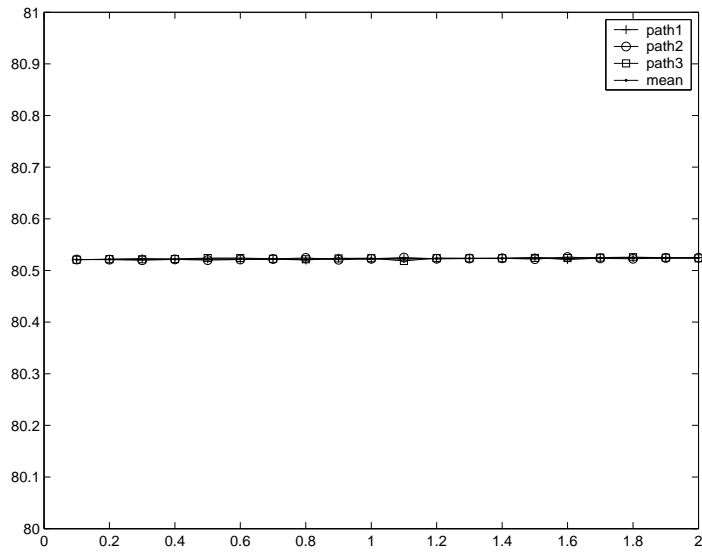


図 6: 実験 1, 経路コスト期待値の変化 (期待値法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路コスト期待値

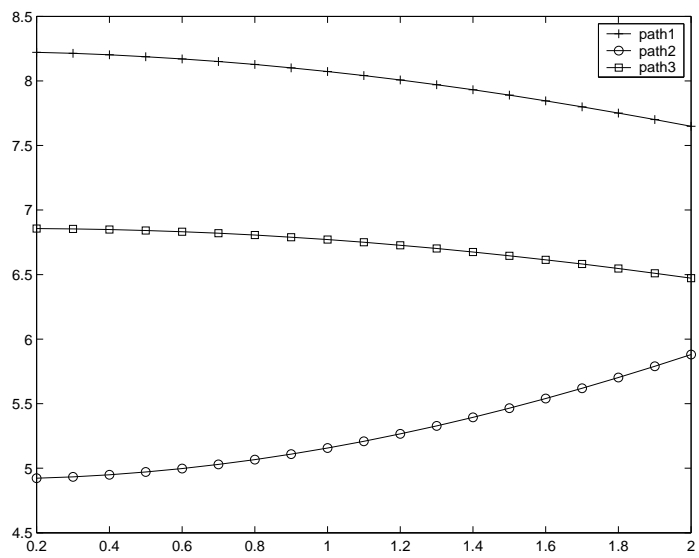


図 7: 実験 2, 経路フローの変化 (ERM 法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路フロー

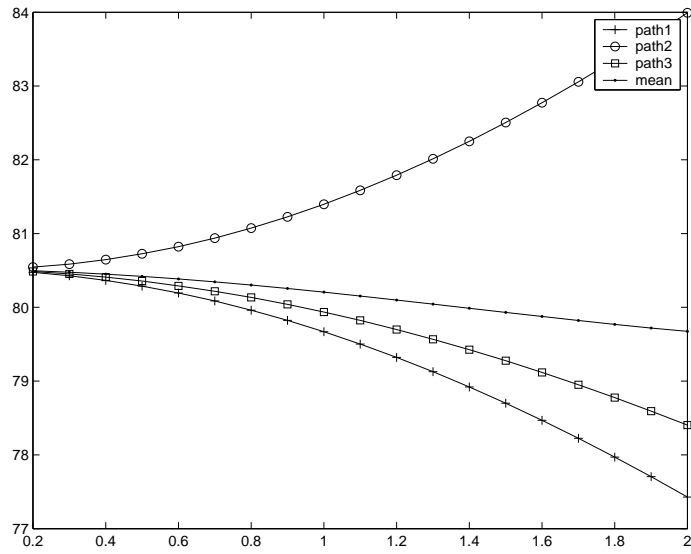


図 8: 実験 2, 経路コスト期待値の変化 (ERM 法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路コスト期待値

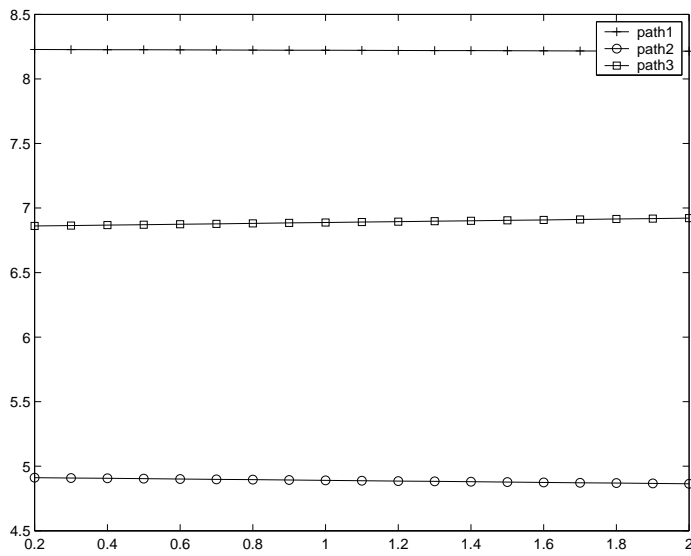


図 9: 実験 2, 経路フローの変化 (期待値法)  
横軸:  $\sigma$ , 縦軸: 経路フロー

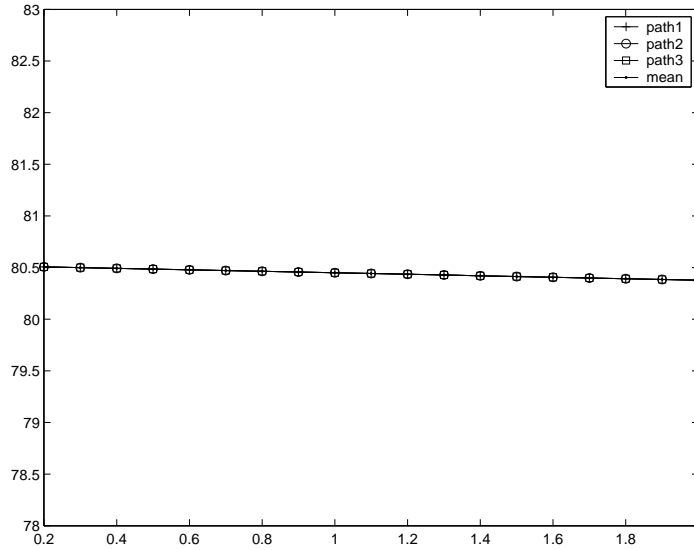


図 10: 実験 2, 経路コスト期待値の変化 (期待値法)  
横軸 :  $\sigma$ , 縦軸 : 経路コスト期待値

期待値法では, 実験 1, 2 ともに問題の不確実性が大きくなっても得られる解が変わらない. また, 確率変数の分布にもよらないことがわかる. これは, 経路コスト関数  $c(x, \omega)$  が (12) 式の線形関数で与えられているため, 期待値法が取り扱う期待値関数  $E[c(x, \omega)]$  が (12) 式において  $A(\omega)$  を単にその期待値で置き換えた関数  $M^T E[A(\omega)] Mx + M^T b$  に等しくなるためである. このように, 期待値以外の要素は得られる解に影響しないため, 期待値法では情報の曖昧さ, 特に分散を解に反映させられない. 期待値法は, 情報がどんなに不確実なものであろうとリンクコストの期待値さえ小さければそちらを選択する方法であると言え, 現実の経路選択方法を表しているとは言い難い.

一方 ERM 法では, リンクコストに不確実性のある経路 1, 3 では分散が大きくなるほどフローは小さくなり, 不確実性のない経路 2 のフローが大きくなった. ERM 法では情報の曖昧さを考慮し, リンクコストの不確実な経路は避けて確定的な経路を優先的に選択していると言える. また実験 1 と実験 2 では,  $\omega_1$  において平均, 分散を同じまましたがう分布を変化させたが, 結果はほとんど同じであった. このことから ERM 法では平均, 分散が同じであれば, 確率変数のしたがう分布の偏り具合などは解に影響しないとわかる. しかし ERM 法は, コストの分散の大きいリンクを避けるといった情報の不確実さを考慮した解が得られる点で, 現実の経路選択を比較的よく表していると言える.



## 6 結論

従来使われていた期待値法とは違い, ERM 法では確率変数の分散という, 不確かさの程度まで考慮した解が得られることがわかった. 特に今回実験した交通流配分問題においては, 不確かさの大きい経路は選ばれずコストは大きくても確実な経路にフローが集中するという, より現実の経路選択基準に沿った定式化ができたと言える. このように, 不確定性を含む問題を記述する際に, その問題が実際においては分散によって解が変化するような種類のものであれば, ERM 法は期待値法に比べてよりよく現実を表し得る有効な手法であると言えよう.

## 謝辞

日頃からご教授くださり、本報告書の作成にあたっては細部に至るまでさまざまなご指摘と適切なご指導をいただいた福島雅夫教授に深く感謝の意を表します。また日頃からいろいろお世話になっている山下信雄助手、また福島研究室のみなさまにあつく御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Xiaojun Chen and Masao Fukushima, Expected Residual Minimization Method for Stochastic Linear Complementarity Problems, Working Paper, Department of Applied mathematics and Physics, Kyoto University, 2004
- [2] 土木学会土木計画学研究委員会（編）, 交通ネットワークの均衡分析 – 最新の理論と解法 –, 土木学会, 2000
- [3] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001
- [4] 汪金芳, 田栗正章, 手塚集, 樺島祥介, 上田修功, 統計科学のフロンティア 11 計算統計 I 確率計算の新しい手法, 岩波書店, 2003
- [5] 湯前祥二, 鈴木輝好, モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店, 2000