特別研究報告書

準変分不等式問題に対する内点ペナルティ法と一般化Nash均衡問題への応用

指導教員

福嶋 雅夫　教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成14年4月入学

平成18年3月卒業

鍋谷　昴一

平成18年1月31日提出

準変分不等式問題に対する内点ペナルティ法と一般化 Nash 均衡問題への応用

鍋谷　昴一

摘要

利害の対立する複数のプレイヤーの意思決定問題を数学的にモデル化したものに Nash 均衡問題がある．Nash 均衡問題を解くことで，どのプレイヤーにとっても合理的な戦略を知ることができるため有益である．Nash 均衡問題を拡張した問題に一般化 Nash 均衡問題がある．一般化 Nash 均衡問題は適当な仮定の下で準変分不等式問題に定式化できることが知られている．しかし，準変分不等式問題に対する研究は現時点ではまだ初期段階である．準変分不等式問題を数値的に解くアルゴリズムについても，わずかしか知られておらず，準変分不等式問題に対する有効な解法が強く望まれている．

本報告書では，準変分不等式問題に対する内点ペナルティ法を提案し，適当な仮定の下でアルゴリズムで生成される点列の集積点が準変分不等式問題の解であることを証明した．また，準変分不等式問題を一般化 Nash 均衡問題に応用し，内点ペナルティ法の部分問題と等価な混合相補性問題を導いた．さらに，アルゴリズムのパラメータであるベクトル列 $\{u^k\}$ の更新法と均衡解におけるラグランジュ乗数の関連を調べ，ベクトル列の更新法を提案した．提案した内点ペナルティ法を計算機上で実装し，数値実験によって一般化 Nash 均衡解を求めた．具体例に対してランダムに生成した多数の初期点から一般化 Nash 均衡解を計算したところ，一般化 Nash 均衡問題の解集合に含まれる様々な解が得られることを確認した．

目 次

1 序論

ゲーム理論とは，経済社会において相互依存関係にある消費者や企業などの複数のプレイヤーが行動した結果，どのような社会状態が生じるのかを考察する理論である．企業の理論，産業組織論，国際経済学など，経済学の多種多様な分野でゲーム理論は必須の分析用具になっている．また，経済学にとどまらず，経営学，会計学，政治学などの分野においてもゲーム理論は重要な役割を果たしている [6]．

利害の対立する複数のプレイヤーの意思決定問題を数学的にモデル化したものに Nash 均衡問題 (NEP: Nash Equilibrium Problem) がある．Nash 均衡問題とは，各プレイヤーは合理的であり，それぞれ独立に行動した場合に，どのプレイヤーも単独で戦略を変える動機を持たない戦略の組を求める問題である．Nash 均衡を求めることで，どのプレイヤーにとっても合理的な戦略を知ることができるため有益である．

一般化 Nash 均衡問題 (GNEP: Generalized Nash Equilibrium Problem) とは，各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存する場合の Nash 均衡問題である．一般化 Nash 均衡問題として定式化される例としては，寡占市場をモデル化した multi-leader-follower game がある．現代資本主義経済においては少数の企業が多くのシェアを占有する寡占的な状況が生じうる．このような状況での意思決定問題を数学的にモデル化したものが multi-leader-follower game であり，この問題は一般化 Nash 均衡問題として定式化されることが知られている [5]．

Nash 均衡問題は，各プレイヤーが解く問題が凸計画問題である場合には，変分不等式問題 (VI: variational inequality problem) に定式化できることが知られている [3]．変分不等式問題に対する研究は非常に長い歴史を持ち，多くの成果が報告されている [1]．数値的な解法についても，Newton 法など効率的なアルゴリズムが提案されている [1, 4]．

一方，一般化 Nash 均衡問題は適当な仮定の下で準変分不等式問題 (QVI: quasi-variational inequality problem) に定式化できることが知られている [3]．しかし，準変分不等式問題に対する研究は現時点ではまだ初期段階である．準変分不等式問題を数値的に解くアルゴリズムについても，ペナルティ関数を用いて準変分不等式を変分不等式に変換して解く Pang and Fukushima の手法 [5] などわずかしか知られていない．そのため，準変分不等式問題に対する有効な解法が強く望まれている．

本報告書では，部分問題として内点ペナルティを付加した変分不等式を逐次的に解くことで準変分不等式の解を得る手法を提案する．適当な仮定の下で，提案したアルゴリズムで生成される点列の集積点が準変分不等式問題の解であることを証明する．また，準変分不等式問題を一般化 Nash 均衡問題に応用し，内点ペナルティ法の部分問題と等価な混合相補性問題を導く．この混合相補性問題は，内点制約を含まないために混合相補性問題に対する解法をそのまま適用できるという利点がある．さらに，アルゴリズムのパラメータであるベクトル列 $\{u^k\}$ の更新法と均衡解におけるラグランジュ乗数の関連を考察する．

本報告書の構成を記す．第 2 節では，一般化 Nash 均衡問題と準変分不等式の定式化を行う．第 3 節では，一般化 Nash 均衡問題の等価な準変分不等式問題への再定式化を行う．第 4 節では，準変分不等式に対する内点ペナルティ法を提案する．第 5 節では，準変分不等式問題を一般化 Nash 均衡問題に応用し，部分問題と等価な混合相補性問題を導く．第 6 節では，数値実験の結果を報告し考察行う．最後に第 7 節で結論を述べる．

2　準備

この章では本報告書における議論を展開するために必要な一般化 Nash 均衡問題と準変分不等式問題について説明する．

2.1　一般化 Nash 均衡問題

N 人のプレイヤーによる一般化 Nash 均衡問題 (GNEP: Generalized Nash Equilibrium Problem) とは，各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存する場合に，どのプレイヤーも単独で戦略を変える動機を持たない戦略の組を求める問題である．一般化 Nash 均衡問題は次のようにして定式化される．

$\nu = 1, \ldots, N$ に対して プレイヤー ν が決定する戦略の次元を n_ν とし，戦略を $x^\nu \in \Re^{n_\nu}$ と表す．ここで表記を簡単にするために

$$\begin{aligned} n &\equiv \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu \\ n_{-\nu} &\equiv n - n_\nu \\ x &\equiv (x^\nu)_{\nu=1}^{N} \\ x^{-\nu} &\equiv (x^{\nu'})_{\nu'=1,\ \nu'\neq\nu}^{N} \end{aligned}$$

と定める．

さらに記号を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} K^\nu(x^{-\nu}) \subset \Re^{n_\nu} &\quad : \quad \text{プレイヤー } \nu \text{ の戦略集合} \\ \theta_\nu(x^{-\nu},\ x^\nu) &\quad : \quad \text{プレイヤー } \nu \text{ のコスト関数} \end{aligned}$$

このとき，プレイヤー ν が解く問題は 与えられた $x^{-\nu}$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \theta_\nu(x^{-\nu},\ x^\nu) \\ \text{subject to} & x^\nu \in K^\nu(x^{-\nu}) \end{array} \tag{1}$$

と書ける．

つまり，一般化 Nash 均衡問題は $\nu = 1, \ldots, N$ に対して $x^{*,\nu}$ がプレイヤー ν の問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \theta_\nu(x^{*,-\nu},\ x^\nu) \\ \text{subject to} & x^\nu \in K^\nu(x^{*,-\nu}) \end{array} \tag{2}$$

の最適解になるような $x^* \equiv (x^{*,\nu})_{\nu=1}^{N}$ を求める問題である．

本報告書では，(1) の $K^\nu(x^{-\nu})$ は有限個の不等式で表現できると仮定する．すなわち，次の仮定 A が成立するとする．

仮定 A $K^\nu(x^{-\nu})$ は，$g^\nu : \Re^n \to \Re^{m_\nu},\ h^\nu : \Re^{n_\nu} \to \Re^{l_\nu}$ を用いて

$$K^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \Re^{n_\nu} | g^\nu(x^{-\nu},\ x^\nu) \leq 0,\ h^\nu(x^\nu) \leq 0\}$$

と書ける．ここで $m_\nu,\ l_\nu$ は非負整数である．

さらに (1) の目的関数および制約集合の微分可能性と凸性について次の仮定 B が成立するとする．

仮定 B 任意の $x^{-\nu} \in \Re^{n_{-\nu}}$ に対して $\theta_\nu(x^{-\nu}, \cdot)$ と $g_i^\nu(x^{-\nu}, \cdot),\ i = 1, \ldots, m_\nu$ は連続的微分可能な凸関数であり，$h_j^\nu,\ j = 1, \ldots, l_\nu$ は連続的微分可能な凸関数である．

本報告書を通して仮定 B が成立するとする． すなわち，各プレイヤーが解く問題は微分可能な凸計画問題であると仮定する．

2.2 準変分不等式問題

まず，変分不等式問題を定義する．空でない閉凸集合 $S \subset \Re^n$ とベクトル値写像 $F : \Re^n \to \Re^n$ に対して，つぎの不等式を満たすベクトル $x^* \in S$ を求める問題を変分不等式問題と呼ぶ．

$$(y - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \qquad \forall y \in S \tag{3}$$

変分不等式問題 (3) の解の存在についてつぎの定理が知られている [2].

定理 2.1 F が連続で S がコンパクト集合ならば，変分不等式問題 (3) は解をもつ．

変分不等式問題 (3) の解集合の性質についての定理を述べる前にベクトル値関数の単調性の概念を定義しておく．

定義 2.1

(a) 関数 F と空でない閉凸集合 S に対して，つぎの関係式が成り立つとき F は S において単調であるという．

$$\langle x - y,\ F(x) - F(y) \rangle \geq 0, \quad \forall x,\ y \in S$$

(b) 関数 F と空でない閉凸集合 S に対して，つぎの関係式が成り立つとき F は S において狭義単調であるという．

$$\langle x - y,\ F(x) - F(y) \rangle > 0, \quad \forall x,\ y \in S,\ x \neq y$$

(c) 関数 F と空でない閉凸集合 S に対して，つぎの関係式が成り立つとき F は S において係数 $\mu > 0$ の強単調であるという．

$$\langle x - y,\ F(x) - F(y) \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x,\ y \in S$$

変分不等式問題 (3) の解集合に関してつぎの定理が知られている [2].

定理 2.2 F が連続で S において単調であれば，変分不等式問題 (3) の解集合は閉凸集合であり，F が S において狭義単調であれば，問題 (3) の解は存在するならば唯一である．さらに，F が強単調であれば，問題 (3) は唯一の解をもつ．

変分不等式問題 (3) における閉凸集合 S が x に依存するとき，準変分不等式問題と呼ぶ． すなわち準変分不等式問題とは，点-集合写像 $K :\ \Re^n \to \mathcal{P}(\Re^n)$ とベクトル値写像 $F :\ \Re^n \to \Re^n$ に対して，つぎの不等式を満たす $x^* \in K(x^*)$ を求める問題である．

$$(y - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \qquad \forall y \in K(x^*) \tag{4}$$

準変分不等式問題 (4) の解の存在定理を述べる前に点-集合写像の連続性を定義しておく．

定義 2.2 (a) 点-集合写像 K が x において上半連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して x の開近傍 $\mathcal{N}$ が存在して

$$\bigcup_{y \in \mathcal{N}} K(y) \subseteq K(x) + B(\varepsilon)$$

が成立することである．ここで，

$$B(\varepsilon) \equiv \{y \in \Re^n \mid \|y\| \leq \varepsilon\}$$

である．

(b) 点-集合写像 K が x において下半連続であるとは，$K(x)\cap\mathcal{U}\neq\emptyset$ であるような任意の開集合 $\mathcal{U}$ に対して，x の開近傍 $\mathcal{N}$ が存在して

$$K(y)\cap\mathcal{U}\neq\emptyset,\quad \forall y\in\mathcal{N}$$

が成立することである．

(c) 点-集合写像 K が x において連続であるとは，写像 K が x において上半連続かつ下半連続であることである．

点-集合写像 $K:\Re^n\to\mathcal{P}(\Re^n)$ が集合 $T\subseteq\Re^n$ の任意の点において連続であるとき，写像 K は集合 T 上で連続であるという．

準変分不等式問題 (4) の解の存在についてつぎの定理が知られている [5].

定理 2.3 関数 F は連続であるとする．さらにつぎの (a), (b) を満たすコンパクトな凸集合 $T\neq\emptyset$ が存在するとする．

(a) 任意の $x\in T$ に対して $K(x)$ は空でない閉凸集合であり，$K(x)\subseteq T$ が成立する．

(b) 点-集合写像 K は，集合 T 上で連続である．

このとき，準変分不等式問題 (4) は解をもつ．

準変分不等式問題 (4) に対する解の一意性に関する条件は今のところ知られていない．関数 F が強単調である場合でも複数の解をもつ例を示す．

例 1 関数 $F:\Re^2\to\Re^2$ と点-集合写像 $K:\Re^2\to\mathcal{P}(\Re^2)$ がそれぞれ次式によって与えられる準変分不等式問題 (4) を考える．

$$\begin{aligned}
F(x) &= \begin{pmatrix} -33.4+2x_1+\frac{8}{3}x_2 \\ -24.25+\frac{5}{4}x_1+2x_2 \end{pmatrix}\\
K^1(x_2) &= \{x_1|0\le x_1\le 12,\ x_1\le 15-x_2\}\\
K^2(x_1) &= \{x_2|0\le x_2\le 10,\ x_2\le 15-x_1\}\\
K(x) &= K^1(x_2)\times K^2(x_1)
\end{aligned}$$

例 1 の関数 F は強単調であるが，解は

$$\begin{pmatrix} \frac{101}{30} \\ 10 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} t \\ 15-t \end{pmatrix},\quad t\in[9.9,\ 12]$$

である．つまり解は複数存在する．図 1 は例 1 の解を図示したものである．

3 一般化 Nash 均衡問題の等価な準変分不等式問題への再定式化

仮定 B の下で一般化 Nash 均衡問題は等価な準変分不等式問題に変換できることを示す．

2.1 節で述べたように， 一般化 Nash 均衡問題とは，$\nu=1,\dots,N$ に対して $x^{*,\nu}$ が問題 (2) の最適解になるような x^* を求める問題である．仮定 B より問題 (2) は凸計画問題なので，$x^{*,\nu}$ が問題 (2) の最適解になるための必要十分条件は 次式が成立することである．

$$\nabla_{x^\nu}\theta_\nu(x^{*,-\nu},\ x^{*,\nu})^T(x^\nu-x^{*,\nu})\ge 0,\quad \forall x^\nu\in K^\nu(x^{*,-\nu})$$

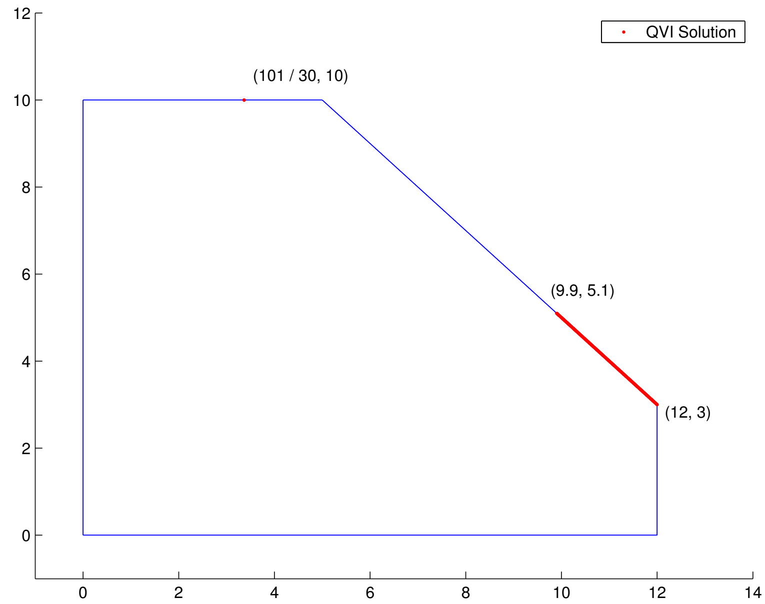

図 1: 例 1 の準変分不等式の解

したがって,

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_{x^1}\theta_1(x^{-1},\ x^1) \\ \nabla_{x^2}\theta_2(x^{-2},\ x^2) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N}\theta_N(x^{-N},\ x^N) \end{pmatrix} \tag{5}$$

および

$$K(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{N} K^{\nu}(x^{-\nu})$$

とおくと一般化 Nash 均衡問題は次の準変分不等式問題と等価である.

$$\text{Find } x^* \in K(x^*) \quad \text{such that} \quad (y - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \quad \forall y \in K(x^*) \tag{6}$$

つまり,準変分不等式 (6) を解くことで一般化 Nash 均衡問題の解を得ることができる.

4 準変分不等式問題に対する対数障壁関数を用いたペナルティ法

この章では,内点ペナルティ関数を用いて準変分不等式問題を変分不等式問題に変換して解く手法を提案する.

提案する手法では,以下の準変分不等式問題を対象にする.与えられた連続な関数 $F : \Re^n \to \Re^n$, $G : \Re^{2n} \to \Re^m$, $H : \Re^n \to \Re^l$ に対して次の不等式を満たす $x \in K(x)$ を求める問題である.

$$(y - x)^T F(x) \geq 0, \quad \forall y \in K(x)$$

ここで,

$$K(x) \equiv \{y \in \Re^n | G(x,\ y) \leq 0,\ H(y) \leq 0\}$$

である.この準変分不等式問題を QVI$(F,\ G,\ H)$ と表す.

次式で定められる集合 X が空でない有界な閉集合であることを仮定する．

$$X \equiv \{x \in \Re^n | H(x) \leq 0\}$$

さらに，関数 H の各成分関数 H_j は連続的微分可能な凸関数であることを仮定する．そのとき，集合 X は空でない有界な閉凸集合である．

集合 $\Gamma \subseteq \Re^n$ を次式で定める．

$$\Gamma \equiv \{x \in \Re^n | G(x,\ x) \leq 0\}$$

内点ペナルティ法を適用するために集合 Γ は，次の性質を満たすと仮定する．

仮定 C 集合 Γ に対して次の (a), (b) が成立する．

(a) $\operatorname{int}\Gamma = \{x \in \Re^n | G(x,\ x) < 0\}$

(b) $\operatorname{int}\Gamma \cap X \neq \emptyset$

関数 $G_i : \Re^n \to \Re$ は連続であり，任意の $x \in \operatorname{int}\Gamma \cap X$ に対し関数 $G_i(x,\ \cdot)$ は，連続的微分可能な凸関数であるとする．

提案する手法の核となる考え方は，制約 $G(x,\ y) \leq 0$ をペナルティ項として関数 F に付加し，集合 $\operatorname{int}\Gamma \cap X$ 上での変分不等式問題を逐次解くことで QVI($F,\ G,\ H$) の解を求めることである．

$\{t^k\}$ を 0 に収束する単調減少な数列とし，$\{u^k\}$ を各成分が正であるようなベクトル列とする．k 回目の反復時に以下の VI_k を解き，その解を x^k とする．

VI_k :　Find $x^k \in \operatorname{int}\Gamma \cap X$　such that

$$(x - x^k)^T \left[F(x^k) - \sum_{i=1}^{m} \frac{t^k u_i^k}{G_i(x^k,\ x^k)} \nabla_y G_i(x^k,\ x^k) \right] \geq 0, \quad \forall x \in X$$

X はコンパクト集合なので，点列 $\{x^k\}$ は有界である．したがって，$\{x^k\}$ は集積点 x^∞ をもつ．適当な仮定の下で x^∞ が QVI($F,\ G,\ H$) の解になることを示す．

定理 4.4 関数 $F : \Re^n \to \Re^n$ は連続であるとする．関数 $H_j : \Re^n \to \Re$ は，連続的微分可能な凸関数であるとする．集合 X は空でないコンパクトな凸集合とする．$G : \Re^{2n} \to \Re^m$ は連続であるとし，任意の $x \in \operatorname{int}\Gamma \cap X$ に対し $G_i(x,\ \cdot)$ は，連続的微分可能な凸関数であると仮定する．$\{t^k\}$ を，0 に収束する単調減少な数列であるとし，$\{u^k\}$ を各成分が正であるような有界なベクトル列であるとする．x^∞ を $\{x^k\}$ の集積点とする．さらに添え字集合

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \{i | G_i(x^\infty,\ x^\infty) = 0\} \\ \gamma &\equiv \{j | H_j(x^\infty) = 0\} \end{aligned}$$

に対して

$$\left. \begin{array}{r} \displaystyle\sum_{i\in\alpha} \lambda_i \nabla_y G_i(x^\infty,\ x^\infty) + \sum_{j\in\gamma} \mu_j \nabla H_j(x^\infty) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \quad \forall j \in \alpha \\ \mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_i = \mu_j = 0, \quad \forall (i,\ j) \in \alpha \times \gamma \tag{7}$$

が成立するならば，x^∞ は QVI$(F,\ G,\ H)$ の解である．

証明　点列 $\{x^k\}_{k\in\kappa}$ を x^∞ に収束する部分列とする．十分大きな任意の $k\in\kappa$ に対してラグランジュ乗数 μ^k が存在して次式が成立することを示す．

$$F(x^k) - \sum_{i=1}^{m} \frac{t^k u_i^k}{G_i(x^k,\ x^k)} \nabla_y G_i(x^k,\ x^k) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^k \nabla H_j(x^k) = 0 \tag{8}$$

$$0 \le \mu_j^k \perp H(x^k) \ge 0 \tag{9}$$

x^k が VI_k の解なので，式 (8), (9) を示すには，VI_k に対する Mangasarian-Fromovitz 制約想定が点 x^k において成立していることを示せば十分である．つまり，十分大きな任意の $k\in\kappa$ に対して

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j\in\gamma_k} \mu_j^k \nabla H_j(x^k) = 0 \\ \mu_j^k \ge 0, \quad \forall j \in \gamma_k \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_j^k = 0, \quad \forall j \in \gamma_k \tag{10}$$

が成立することを示せばよい．ここで

$$\gamma_k \equiv \{j | H_j(x^k) = 0\}$$

である．

背理法で示す．無限個の $k\in\kappa' \subseteq \kappa$ に対して (10) が成立しないと仮定する．十分大きな任意の $k\in\kappa$ に対して $\gamma_k \subseteq \gamma$ が成立することに注意する．仮定より添え字集合 $\gamma_\infty \subseteq \gamma$ が存在して任意の $k\in\kappa'$ に対して次式を満たす μ_j^k が存在する．

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j\in\gamma_\infty} \mu_j^k \nabla H_j(x^k) = 0 \\ \displaystyle\sum_{j\in\gamma_\infty} \mu_j^k = 1 \end{array}\right. \tag{11}$$

$\mu_{\gamma_\infty}^k \equiv \left(\mu_j^k\right)_{j\in\gamma_\infty}$ とすると式 (11) より，点列 $\{\mu_{\gamma_\infty}^k | k\in\kappa'\}$ は有界なので集積点 $\overline{\mu}_{\gamma_\infty} \equiv \left(\overline{\mu}_j\right)_{j\in\gamma_\infty}$ が存在する．一般性を失うことなく点列 $\{\mu_{\gamma_\infty}^k | k\in\kappa'\}$ は $\overline{\mu}_{\gamma_\infty}$ に収束するとしてよい．このとき，

$$\sum_{j\in\gamma_\infty} \overline{\mu}_j = 1$$

が成立するが，$\gamma_\infty \subseteq \gamma$ よりこれは式 (7) に反し矛盾である．したがって，十分大きな任意の $k\in\kappa$ に対して μ^k が存在して式 (8), (9) が成立する．

ここで

$$\lambda_i^k \equiv -\frac{t^k u_i^k}{G_i(x^k,\ x^k)} > 0$$

と定めると，式 (8) は

$$F(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla_y G_i(x^k,\ x^k) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^k \nabla H_j(x^k) = 0 \tag{12}$$

と書ける．

次に数列 $\{\lambda_i^k\}$ および $\{\mu_j^k\}$ は有界であることを示す．

まず，α の定義より $i \notin \alpha$ に対して，

$$G_i(x^\infty,\ x^\infty) < 0$$

であり，$\{u_i^k\}$ は有界なので

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = -\lim_{k\to\infty} \frac{t^k u_i^k}{G_i(x^k,\ x^k)} = 0 \tag{13}$$

である．

さらに，$j \notin \gamma$ に対しては，式 (9) より十分大きな任意の $k \in \kappa$ に対して

$$\mu_j^k = 0 \tag{14}$$

である．

ここで

$$v^k = \begin{pmatrix} \lambda^k \\ \mu^k \end{pmatrix}$$

とおいて，点列 $\{v^k\}$ が有界であることを背理法で示す．

$\{v^k\}$ が有界でないとすると，

$$\lim_{k\to\infty,\ k\in\overline{\kappa}} \|v^k\| = \infty$$

となる部分列 $\{v^k\}_{k\in\overline{\kappa}}$ が存在する．式 (12) の両辺を $\|v^k\|$ で割って，$k \to \infty$, $k \in \overline{\kappa}$ とすると点列 $\{\lambda^k/\|v^k\|\}$, $\{\mu^k/\|v^k\|\}$ は有界なので集積点をもつ．それらをそれぞれ $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ とすると式 (13), (14) より

$$\sum_{i\in\alpha} \overline{\lambda}_i \nabla_y G_i(x^\infty,\ x^\infty) + \sum_{j\in\gamma} \overline{\mu}_j \nabla H_j(x^\infty) = 0$$

が成立する．しかし，

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda} \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \left\| \begin{pmatrix} \overline{\lambda} \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \right\| = 1$$

なので，式 (7) に反し矛盾．ゆえに，$\{\lambda^k\}$ および $\{\mu^k\}$ は有界である．

よって，集積点 $\lambda_i^* \geq 0$ および $\mu_j^* \geq 0$ が存在し，式 (12) において $k \to \infty$ とすると

$$F(x^\infty) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla_y G_i(x^\infty,\ x^\infty) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla H_j(x^\infty) = 0$$

が成立する．式 (13), (14) より

$$i \notin \alpha \quad \Rightarrow \quad \lambda_i^* = 0$$
$$j \notin \gamma \quad \Rightarrow \quad \mu_j^* = 0$$

なので，$(x^\infty,\ \lambda^*,\ \mu^*)$ は，QVI$(F,\ G,\ H)$ の KKT 条件を満たす．これは，x^∞ が QVI$(F,\ G,\ H)$ の解であることを示している． ■

VI$_k$ の集合 $\mathrm{int}\,\Gamma \cap X$ は一般には閉集合とは限らないため，変分不等式を解くアルゴリズムを直接適用することはできない．しかし，初期点 x^0 を

$$x^0 \in \mathrm{int}\,\Gamma$$

にとればペナルティ項があるため，変分不等式を解くアルゴリズムを VI$_k$ を解くのに用いることができる．実際，変分不等式を解くアルゴリズムを制約

$$x \in \mathrm{int}\,\Gamma$$

を破らないように変更することで適用できる．

5　一般化 Nash 均衡問題への応用

本節では，仮定 A，仮定 B の下で QVI(F, G, H) に対する内点ペナルティ法を一般化 Nash 均衡問題に応用する．関数 F を式 (5) で定め，$x \equiv (x^\nu)_{\nu=1}^N$, $y \equiv (y^\nu)_{\nu=1}^N \in \Re^n$ に対して関数 G, H をそれぞれ

$$G(x,\ y) \equiv \begin{pmatrix} g^1(x^{-1},\ y^1) \\ g^2(x^{-2},\ y^2) \\ \vdots \\ g^N(x^{-N},\ y^N) \end{pmatrix} \in \Re^m, \quad m \equiv \sum_{\nu=1}^N m_\nu \tag{15}$$

および

$$H(y) \equiv \begin{pmatrix} h^1(y^1) \\ h^2(y^2) \\ \vdots \\ h^N(y^N) \end{pmatrix} \in \Re^l, \quad l \equiv \sum_{\nu=1}^N l_\nu \tag{16}$$

と定める．このとき，3 節で述べたように QVI(F, G, H) は一般化 Nash 均衡問題と等価な問題である．

ここで，次式で定められる集合 X が空でない有界な閉集合であると仮定する．

$$X \equiv \{x \in \Re^n | h^\nu(x^\nu) \leq 0,\ \nu = 1, \ldots, N\}$$

さらに，次式で定められる集合 Γ は仮定 C を満たすと仮定する．

$$\Gamma \equiv \{x \in \Re^n | g^\nu(x^{-\nu},\ x^\nu) \leq 0,\ \nu = 1, \ldots, N\}$$

このとき，4 節で述べたアルゴリズムを用いて QVI(F, G, H) を解くことで，一般化 Nash 均衡問題の解を得ることができる．

5.1　部分問題 VI$_k$ に対する解法

ベクトル u^k を $u^k \equiv (u^{k,\nu})_{\nu=1}^N \in \Re^m$ と定める．ここで，$u^{k,\nu} \in \Re^{m_\nu}$ である．式 (5), (15), (16) より，k 回目の反復時に解く変分不等式 VI$_k$ は次のように書ける．

Find $x^k \equiv (x^{k,\nu})_{\nu=1}^N \in \operatorname{int}\Gamma \cap X$　such that

$$\sum_{\nu=1}^N (x^\nu - x^{k,\nu})^T \left[\nabla_{x^\nu} \theta_\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) - \sum_{i=1}^{m_\nu} \frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})} \nabla_{x^\nu} g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) \right] \geq 0, \quad \forall (x^\nu)_{\nu=1}^N \in X$$

VI$_k$ に対する制約想定が x^k において成立しているとすると，VI$_k$ はすべての $\nu = 1, \ldots, N$ に対して，以下の KKT 条件 (17), (18) および内点条件 (19) を満たす (x^k, μ^k) を求める問題と等価である．

$$\nabla_{x^\nu} \theta_\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) - \sum_{i=1}^{m_\nu} \frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})} \nabla_{x^\nu} g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + \sum_{j=1}^{l_\nu} \mu_j^{k,\nu} \nabla h_j^\nu(x^{k,\nu}) = 0 \tag{17}$$

$$0 \leq \mu_j^{k,\nu} \perp h_j^\nu(x^{k,\nu}) \leq 0 \tag{18}$$

$$g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) < 0 \tag{19}$$

ここで次の命題を示す．

命題 5.1 $t^k > 0$ かつ $u^{k,\nu} > 0,\ \nu = 1, \dots, N$ のとき，式 (17)-(19) を満たす $(x^k,\ \mu^k)$ を求める問題は，以下の式 (20)-(22) を満たす $(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ を求める問題と等価である．

$$\nabla_{x^\nu}\theta_\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + \sum_{i=1}^{m_\nu}\lambda_i^{k,\nu}\nabla_{x^\nu}g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + \sum_{j=1}^{l_\nu}\mu_j^{k,\nu}\nabla h_j^\nu(x^{k,\nu}) = 0 \tag{20}$$

$$0 \le \lambda_i^{k,\nu} \perp \lambda_i^{k,\nu}g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} \le 0 \tag{21}$$

$$0 \le \mu_j^{k,\nu} \perp h_j^\nu(x^{k,\nu}) \le 0 \tag{22}$$

証明　$(x^k,\ \mu^k)$ が式 (17)-(19) を満たすとする．このとき，$\lambda^{k,\nu} \in \Re^{m_\nu},\ \nu = 1, \dots, N$ を

$$\lambda_i^{k,\nu} \equiv -\frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})}, \quad i = 1, \dots, m_\nu \tag{23}$$

と定めると，$t^k > 0,\ u_i^{k,\nu} > 0$ と式 (19), (23) より

$$\begin{aligned}&\lambda_i^{k,\nu} > 0\\ &\lambda_i^{k,\mu}g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} = 0\end{aligned}$$

が成立する．よって，

$$\lambda^k \equiv (\lambda^{k,\nu})_{\nu=1}^N$$

と定めると $(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ は，式 (20)-(22) を満たす．

逆に，$(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ が (20)-(22) を満たすとする．ある $k,\ \nu,\ i$ に対して

$$\lambda_i^{k,\nu} = 0$$

が成立したと仮定する．このとき，式 (21) より

$$\lambda_i^{k,\nu}g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} = t^k u_i^{k,\nu} \le 0$$

が成立するが，これは $t^k u_i^{k,\nu} > 0$ に反し矛盾．よって，

$$\lambda_i^{k,\nu} > 0, \quad \nu = 1, \dots, N,\ i = 1, \dots, m_\nu \tag{24}$$

である．このとき，式 (21) から

$$\begin{aligned}&\lambda_i^{k,\nu}g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} = 0 \qquad (25)\\ \Leftrightarrow\quad &\lambda_i^{k,\nu} = -\frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})}\end{aligned}$$

を得る．この式を式 (20) に代入すると $(x^k,\ \mu^k)$ は式 (17)-(18) を満たす．

さらに，式 (24), (25) より

$$g_i^\nu(x^{k,-\nu},\ x^\nu) = -\frac{t^k u_i^{k,\nu}}{\lambda_i^{k,\nu}} < 0$$

なので，$(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})$ は内点条件 (19) を満たす．

以上より，$(x^k,\ \mu^k)$ は式 (17)-(19) を満たす．■

したがって，部分問題 VI_k の解 x^k を求めるには，式 (20)-(22) を満たす $(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ を求めればよい．式 (20)-(22) を満たす $(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ を求める問題は混合相補性問題であり，混合相補性問題を解くアルゴリズムを適用することができる．

5.2 ベクトル列 $\{u^k\}$ の更新

4 節で述べたアルゴリズムの収束に関する定理 4.4 では，ベクトル列 $\{u^k\}$ は各成分が正であるような有界な点列であることのみ仮定していた．ここでは，一般化 Nash 均衡問題の解におけるラグランジュ乗数とベクトル列 $\{u^k\}$ の関係を議論する．

この節では，任意の $x \in X$ に対して

$$g^{\nu}(x^{-\nu},\ x^{\nu}) = g^{\nu'}(x^{-\nu'},\ x^{\nu'}), \quad \nu,\ \nu' = 1, \dots, N \tag{26}$$

が成立する場合に限定して考える．これは，各プレイヤーの問題における相手に依存する制約式がすべて同じ関数で与えられている場合である．このような状況が成立する例としては，各プレイヤーが製品を製作する工場である場合に排出規制等で各プレイヤーの生成する製品の総量の上限が課せられている場合がある．

まず，次の補題を示す．

補題 5.1 $(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ を式 (20)-(22) を満たす点する．このとき，任意の $k,\ i$ に対して

$$\frac{\lambda_i^{k,\nu}}{\lambda_i^{k,\nu'}} = \frac{u_i^{k,\nu}}{u_i^{k,\nu'}}, \quad \nu,\ \nu' = 1, \dots, N$$

が成立する．

証明 まず，任意の $k,\ \nu,\ i$ に対して

$$\lambda_i^{k,\nu} > 0$$

が成立することを示す．ある $k,\ \nu,\ i$ に対して

$$\lambda_i^{k,\nu} = 0$$

が成立したと仮定する．このとき，式 (21) より

$$\lambda_i^{k,\nu} g_i^{\nu}(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} = t^k u_i^{k,\nu} \leq 0$$

となるが，これは $u^{k,\nu} t^k > 0$ に反し矛盾．よって，任意の k に対して

$$\lambda_i^{k,\nu} > 0, \quad i = 1, \dots, m_{\nu},\ \nu = 1, \dots, N$$

である．このとき，式 (21) から

$$\begin{aligned} & \lambda_i^{k,\nu} g_i^{\nu}(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu}) + t^k u_i^{k,\nu} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_i^{k,\nu} = -\frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^{\nu}(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})} \end{aligned}$$

なので，式 (26) より，任意の $\nu,\ \nu' = 1, \dots, N,\ i = 1, \dots, m_{\nu}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i^{k,\nu}}{\lambda^{k,\nu'}} &= -\frac{t^k u_i^{k,\nu}}{g_i^{\nu}(x^{k,-\nu},\ x^{k,\nu})} \cdot \left(-\frac{g_i^{\nu'}(x^{k,-\nu'},\ x^{k,\nu'})}{t^k u_i^{k,\nu'}} \right) \\ &= \frac{u_i^{k,\nu}}{u^{k,\nu'}} \end{aligned}$$

が成立する． ■

ここで，もっとも単純なベクトル列 $\{u^k\}$ の決め方として

$$u_i^k \equiv 1, \quad i = 1, \dots, m,\ k = 1, 2, \dots \tag{27}$$

とした場合を考える．このとき，次の命題が成立する．

命題 5.2 ベクトル列 $\{u^k\}$ を 式 (27) で定め，$(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)$ を式 (20)-(22) を満たす点する．$\{(x^k,\ \lambda^k,\ \mu^k)\}$ の集積点を $(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)$ とする．このとき

$$\lambda^{*,\nu} = \lambda^{*,\nu'}, \quad \nu,\ \nu' = 1, \ldots, N$$

が成立する．

証明 $\{\lambda^k\}_{k\in\kappa}$ を λ^* に収束する部分列とする．補題 5.1 と式 (27) より任意の $k,\ \nu,\ i$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i^{k,\nu}}{\lambda_i^{k,\nu'}} &= \frac{u_i^{k,\nu}}{u_i^{k,\nu'}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成立する．よって，任意の k に対して

$$\lambda^{k,\nu} = \lambda^{k,\nu'}, \quad \nu,\ \nu' = 1, \ldots, N \tag{28}$$

が成立する．式 (28) において $k \to \infty,\ k \in \kappa$ として

$$\lambda^{*,\nu} = \lambda^{*,\nu'}, \quad \nu,\ \nu' = 1, \ldots, N$$

を得る． ■

命題 5.2 より，$\{u^k\}$ を式 (27) で定めると各プレイヤーの制約 $g^\nu(x^{-\nu},\ x^\nu) \leq 0$ に対するラグランジュ乗数 $\lambda^{*,\nu}$ がすべて等しい場合の解のみしか得られないことがわかる．

このことを例を用いて説明する．

プレイヤー 1 の問題が

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & x_1^2 + \frac{8}{3}x_1x_2 - 33.4x_1 \\ \text{subject to} & 0 \leq x_1 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 15 \end{array}$$

で与えられ，プレイヤー 2 の問題が

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & x_2^2 + \frac{5}{4}x_1x_2 - 24.25x_2 \\ \text{subject to} & 0 \leq x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 15 \end{array}$$

で与えられる場合の一般化 Nash 均衡問題を考える．関数 $F : \Re^2 \to \Re^2,\ G : \Re^4 \to \Re^2,\ H : \Re^2 \to \Re^4$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} F(x_1,\ x_2) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + \frac{8}{3}x_2 - 33.4 \\ \frac{5}{4}x_1 + 2x_2 - 24.25 \end{pmatrix} \\ G(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2) &= \begin{pmatrix} x_2 + y_1 - 15 \\ x_1 + y_2 - 15 \end{pmatrix} \\ H(x_1,\ x_2) &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 - 12 \\ -x_2 \\ x_2 - 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定めると，QVI$(F,\ G,\ H)$ は一般化 Nash 均衡問題と等価である．この QVI$(F,\ G,\ H)$ は節 2.2 の例 1 と同じ準変分不等式問題である．

したがって，この QVI(F, G, H) の解は

$$\begin{pmatrix} \frac{101}{30} \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 15-t \end{pmatrix}, \quad t \in [9.9,\ 12]$$

であるが，このうちプレイヤー 1, 2 の制約 $x_1 + x_2 \leq 15$ に対応するラグランジュ乗数が等しくなる解は

$$\begin{pmatrix} \frac{101}{30} \\ 10 \end{pmatrix}$$

のみである．

つまり，ベクトル列 $\{u^k\}$ を式 (27) で定めると一般化 Nash 均衡解の一部の解しか得られない．

そこで，

$$u^{k+1,\nu} \equiv \lambda^{k,\nu} \tag{29}$$

と更新することを提案する．このとき，補題 5.1 より任意の k, ν, i に対して

$$\frac{\lambda_i^{k,\nu}}{\lambda_i^{k,\nu'}} = \frac{u_i^{0,\nu}}{u_i^{0,\nu'}}$$

が成立する．

したがって，ベクトル列 $\{u^k\}$ を式 (29) で更新し，初期値 u^0 を適当に定めることで一部の解にしか収束しないことを避けることができる．

6 数値実験

この節では，一般化 Nash 均衡問題を等価な準変分不等式問題に変換し，4 節で提案した手法で準変分不等式の解を求めた数値実験の結果を報告する．

実験では，プレイヤー 1 の問題が

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1^2 + \tfrac{8}{3}x_1x_2 - 33.4x_1 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq x_1 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 15 \end{aligned}$$

で与えられ，プレイヤー 2 の問題が

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_2^2 + \tfrac{5}{4}x_1x_2 - 24.25x_2 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 15 \end{aligned}$$

で与えられる場合の一般化 Nash 均衡問題を用いた．関数 $F : \Re^2 \to \Re^2$, $G : \Re^4 \to \Re^2$, $H : \Re^2 \to \Re^4$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} F(x_1,\ x_2) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + \frac{8}{3}x_2 - 33.4 \\ \frac{5}{4}x_1 + 2x_2 - 24.25 \end{pmatrix} \\ G(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2) &= \begin{pmatrix} x_2 + y_1 - 15 \\ x_1 + y_2 - 15 \end{pmatrix} \\ H(x_1,\ x_2) &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 - 12 \\ -x_2 \\ x_2 - 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定めると，QVI(F, G, H) は一般化 Nash 均衡問題と等価である．この QVI(F, G, H) は 2.2 節の例 1 と同じ準変分不等式問題である．

6.1 非線形相補性問題による定式化

命題 5.1 より，k 回目の反復時に解く変分不等式問題 VI_k は以下の混合相補性問題と等価である．

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2x_1^k + \frac{8}{3}x_2^k - 33.4 + \lambda^{k,1} + \mu_1^{k,1} - \mu_2^{k,1} \\ \frac{5}{4}x_1^k + 2x_2^k - 24.25 + \lambda^{k,2} + \mu_1^{k,2} - \mu_2^{k,2} \end{pmatrix} = 0 \\
&0 \leq \lambda^{k,\nu} \perp \lambda^{k,\nu}(x_1^k + x_2^k - 15) + t^k u^{k,\nu} \leq 0, \quad \nu = 1, 2 \\
&0 \leq \mu_1^{k,\nu} \perp x_1^k + x_2^k - 15 \leq 0, \quad \nu = 1, 2 \\
&0 \leq \mu_2^{k,\nu} \perp x_\nu^k \geq 0, \quad \nu = 1, 2
\end{aligned}$$

さらに，この問題は以下の非線形相補性問題と等価である．

$$0 \leq x_1^k \perp 2x_1^k + \frac{8}{3}x_2^k - 33.4 + \lambda^{k,1} + \mu^{k,1} \geq 0 \tag{30}$$

$$0 \leq x_2^k \perp \frac{5}{4}x_1^k + 2x_2^k - 24.25 + \lambda^{k,2} + \mu^{k,2} \geq 0 \tag{31}$$

$$0 \leq \lambda^{k,\nu} \perp \lambda^{k,\nu}(x_1^k + x_2^k - 15) + t^k u^{k,\nu} \leq 0, \quad \nu = 1, 2 \tag{32}$$

$$0 \leq \mu^{k,\nu} \perp x_1^k + x_2^k - 15 \leq 0, \quad \nu = 1, 2 \tag{33}$$

本実験では，この非線形相補性問題を等価な方程式系に再定式化した (詳細は付録 A 参照)．さらに，その方程式系を一般化 Newton 法を用いて解くことで部分問題の解を得た (詳細は付録 B 参照)．

以上の手続きをまとめると以下のようになる．

アルゴリズム IPM

ステップ 1 初期値 $u^{1,\nu} > 0$, $\nu = 1, 2$ と 0 に収束する正数列 $\{t^k\}$ を定める．さらに，一般化 Newton 法で解く際に与える初期値 $(x_\nu^0,\ \lambda^{0,\nu},\ \mu^{0,\nu})$, $\nu = 1, 2$ を定める．$k := 1$ とする．

ステップ 2 一般化 Newton 法を用いて非線形相補性問題 (30)-(33) の解 $(x_\nu^k,\ \lambda^{k,\nu},\ \mu^{k,\nu})$, $\nu = 1, 2$ を求める．

ステップ 3 $\nu = 1, 2$ に対して，$(x_1^k,\ x_2^k,\ \lambda^{k,\nu},\ \mu^{k,\nu})$ がプレイヤー ν の問題の KKT 条件を満たしていれば，解を出力して終了．そうでなければステップ 4 へ．

ステップ 4 $u^{k+1,\nu} := \lambda^{k,\nu}$, $k := k + 1$ としてステップ 2 へ

6.2 実験結果・考察

本実験は CPU が 3.2GHz の Turbolinux10 の環境の下で行った．すべてのアルゴリズムは Matlab 6.5 上で実装した．

初期値 $(x_\nu^0,\ \lambda^{0,\nu},\ \mu^{0,\nu})$ の各成分を区間 (0, 10) の一様乱数で生成し，初期値 $u^{1,\nu}$ を

$$u^{1,\nu} \equiv \lambda^{0,\nu}, \quad \nu = 1, 2$$

と定めた．$\{t^k\}$ は

$$t^k \equiv 10 \cdot 10^{-k}$$

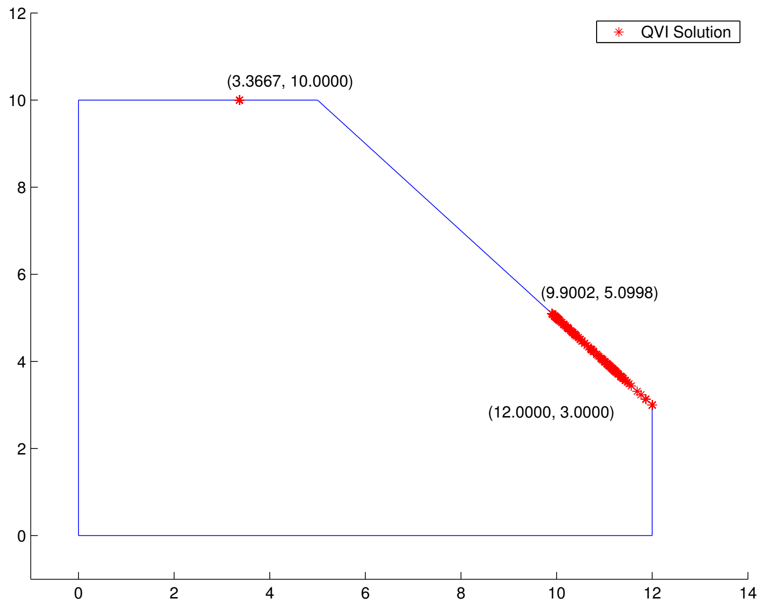

図 2: アルゴリズム IPM で得られた解

で定めた．アルゴリズム IPM の反復回数の上限は 10 回と定めた．なお，ステップ 2 で部分問題を解く際に用いた一般化 Newton 法の初期値には，前回反復の解を用いた．

初期点を 1 万回生成し，アルゴリズム IPM を適用したところ 9275 問の問題で解を得た．得られた解 $(x_1,\ x_2)$ を示したのが図 2 である．

本節の最初でも述べたが，数値実験で解いた QVI$(F,\ G,\ H)$ は 2.2 節の例 1 と同じ準変分不等式問題である．

図 1 と図 2 を比較すると，多数の初期点をランダムに生成した場合には，QVI$(F,\ G,\ H)$ の解集合内に広く分布する解が得られたことがわかる．

なお，解くのに失敗した 725 問についてはいずれも部分問題を解くのに失敗した．これは，部分問題を一般化 Newton 法で解く際に与える初期点が適切でなかったためだと考えられる．

つぎに，ステップ 4 において，

$$u^{k+1,\nu} := \lambda^{k,\nu}$$

の代わりに，

$$u^{k+1,\nu} := 1$$

と更新し，初期値 $u^{1,\nu}$ は

$$u^{1,\nu} := 1, \quad \nu = 1, 2$$

と定めて，実験を行った．得られた解を図示したのが図 3 である．

図 3 より，

$$u^{k+1,\nu} := 1$$

と更新した場合には，すべての初期点に対して

$$(x_1,\ x_2) = (3.3667,\ 10)$$

の解しか得られないことがわかる．これは，命題 5.2 で述べた事実を数値的に実証している．

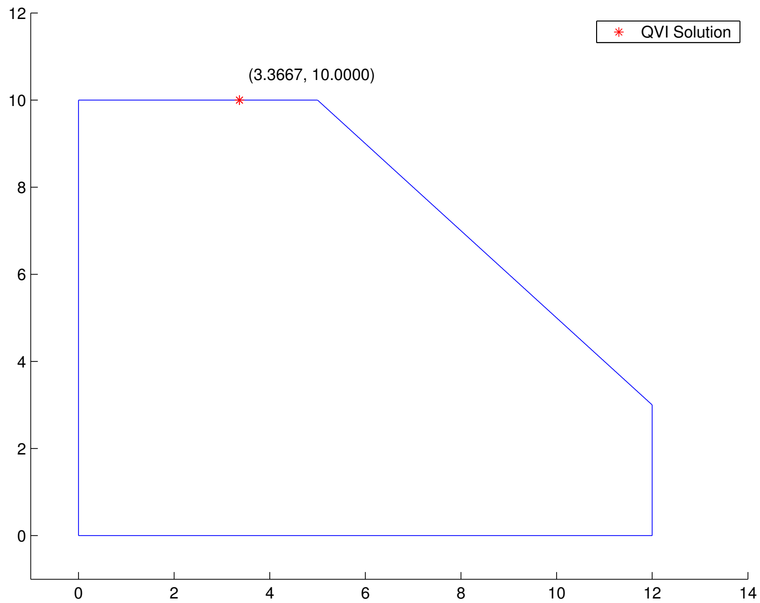

図 3: $u^{k,\nu}=1$ と更新した場合にアルゴリズム IPM で得られた解

7 結論

本報告書では，準変分不等式問題に対する内点ペナルティ法を提案した．さらに，適当な仮定の下でアルゴリズムで生成される点列の集積点が準変分不等式問題の解であることを証明した．

また，準変分不等式問題を一般化 Nash 均衡問題に応用し，内点ペナルティ法の部分問題と等価な混合相補性問題を導いた．さらに，ベクトル列 $\{u^k\}$ の更新法と均衡解におけるラグランジュ乗数の関連を調べ，ベクトル列の更新法を提案した．

提案した内点ペナルティ法を計算機上で実装し，数値実験によって一般化 Nash 均衡解を求めた．具体例に対してランダムに生成した多数の初期点から一般化 Nash 均衡解を計算した．部分問題を解くのに失敗した例がわずかながら存在したが，提案した手法で一般化 Nash 均衡問題の解集合に含まれる様々な解が得られることを確認した．

謝辞

日頃から御教授下さり, 本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を賜った福島雅夫教授に深く感謝の意を表します．また，日頃からお世話になっている山下信雄助教授, 林俊介特任助手，福島研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] F. Facchinei, J.-S. Pang: Finite-Deminsional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Springer, New York, 2003.

[2] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[3] P.T. Harker: Generalized Nash games and quasi-variational inequalities, European Journal of Operational Research 54 (1991), pp. 81-94.

[4] J.-S. Pang, D.Chan: Iterative methods for variational and complementarity problems, Mathematical Programming 24 (1982), pp. 284-313.

[5] J.-S. Pang, M. Fukushima: Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games, Computational Management Science 2 (2005), pp. 21-56.

[6] 佐々木宏夫: 入門　ゲーム理論，日本評論社, 2003.

付録

A　非線形相補性問題の等価な方程式系への再定式化

非線形相補性問題 (NCP: Nonlinear Complementarity Problem) とは，与えられた写像 $F : \Re^n \to \Re^n$ に対し，次の条件を満たすベクトル $x \in \Re^n$ を求める問題である．

$$\mathrm{NCP}(F): \quad x_i \geq 0,\ F_i(x) \geq 0,\ x_i F_i(x) = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

NCP(F) を等価な方程式系に再定式化するために，次の性質を持つ関数 $\phi : \Re^2 \to \Re$ を考える．

$$\phi(a,\ b) = 0 \quad \text{if and only if} \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ ab = 0$$

このような性質を持つ関数を NCP 関数と呼ぶ．本報告書では NCP 関数として，次の関数 $\psi : \Re^2 \to \Re$ を用いた．

$$\psi(a,\ b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

この関数は Fischer-Burmeister 関数と呼ばれ，他の NCP 関数に比べ多くの利点を持つことが知られている [1]．この関数 ψ を用いて関数 $\Psi_i : \Re^n \to \Re$ を

$$\Psi_i(x) \equiv \psi(x_i,\ F_i(x)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

と定義し，

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$$

とすれば，ベクトル値関数 $\Psi : \Re^n \to \Re^n$ に対する方程式

$$\Psi(x) = 0 \tag{34}$$

は，NCP(F) と等価である．

B　非線形相補性問題に対する一般化 Newton 法

方程式系を Newton 法で解くには，方程式を表す関数の微分が必要である．しかし，NCP(F) と等価な方程式系 (34) を構成する関数は微分不可能である．そこで，微分不可能な点に対して微分の概念を拡張した B 劣微分の概念を導入する．

定義 2.3 $G : \Re^n \to \Re^m$ を局所リプシッツ連続関数とする．そのとき，次式で定義される $m \times n$ 行列の集合を G の x における B 劣微分という．

$$\partial_B G(x) \equiv \{ \lim_{k \to \infty} G'(x^k) \mid x = \lim_{k \to \infty} x^k,\ \{x^k\} \subseteq \mathcal{D}_G \}$$

ここで，$\mathcal{D}_G$ は G 微分可能な点の集合であり，$G'(x)$ は G の x における Jacobi 行列

$$G'(x) = [\nabla G_1(x)\ \cdots\ \nabla G_m(x)]^T$$

である．

NCP(F) と等価な方程式系 (34) に対する一般化 Newton 法では，各反復において Newton 方程式

$$H_k d = -\Psi(x^k) \tag{35}$$

を解いてベクトル

$$d^k = -H_k^{-1}\Psi(x^k)$$

を計算する．ただし，$H_k \in \partial_B \Psi(x^k)$ である．もし d^k が，メリット関数 $\theta_{\mathrm{FB}}(x) \equiv \frac{1}{2}\|\Psi(x)\|^2$ を十分減少させる方向であれば，d^k を探索方向として採用する．そうでなければ，最急降下方向

$$d^k = -\nabla\theta_{\mathrm{FB}}(x^k)$$

を採用する．さらに，関数 θ_{FB} に対する直線探索により適当なステップ幅 $t^k > 0$ を選択し，次の反復点

$$x^{k+1} = x^k + t^k d^k$$

を生成する．

すなわち，一般化 Newton 法は速い収束を実現するために可能な限り関数 θ_{FB} の Newton 方向を採用するとともに，大域的収束性を保証するために Newton 方向ではあまり関数値が減少しない場合には最急降下方向を利用する探索法である．アルゴリズムの詳細 [1] は以下の通りである．

一般化 Newton 法

ステップ 1 初期点 $x^0 \in \Re^n$ とパラメータ $\rho > 0,\ p > 0,\ \gamma \in (0,\ 1),\ \varepsilon > 0$ を選ぶ．$k := 0$ とする．

ステップ 2 $\|\nabla\theta_{\mathrm{FB}}(x^k)\| \le \varepsilon$ ならば終了する．

ステップ 3 行列 $H_k \in \partial_B\Psi(x^k)$ を選び，Newton 方程式

$$H_k d = -\Psi(x^k)$$

を解いて探索方向 d^k を求める．もし，

$$\nabla\theta_{\mathrm{FB}}(x^k)^T d^k \le -\rho\|d^k\|^p$$

が成立しないならば，

$$d^k = -\nabla\theta_{\mathrm{FB}}(x^k)$$

とする．

ステップ 4 不等式

$$\theta_{\mathrm{FB}}(x^k + 2^{-i}d^k) \le \theta_{\mathrm{FB}}(x^k) + \gamma 2^{-i}\nabla\theta_{\mathrm{FB}}(x^k)^T d^k$$

を満たす最小の非負整数 i_k を求め $t^k := 2^{-i_k}$ とする．

ステップ 5 $x^{k+1} := x^k + t^k d^k,\ k := k+1$ としてステップ 2 へ．

ステップ 3 における $H_k \in \partial_B\Psi(x^k)$ の計算法について述べる．$H_k \in \partial_B\Psi(x^k)$ は次の形になる [1].

$$H_k = D_a + D_b\nabla F(x^k)$$

ただし，$D_a,\ D_b$ は対角成分が

$$((D_a)_{ii},\ (D_b)_{ii}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x_i^k}{\sqrt{(x_i^k)^2 + F_i(x^k)^2}},\ 1 - \frac{F_i(x^k)}{\sqrt{(x_i^k)^2 + F_i(x^k)^2}}\right) & \text{if} \quad (x_i^k,\ F_i(x^k)) \ne (0,\ 0) \\ (1 - \eta_i,\ 1 - \xi_i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる対角行列であり，$(\eta_i,\ \xi_i)$ は $\eta_i^2 + \xi_i^2 = 1$ を満たす点であり，次の計算法で求めることができる．

$(\eta_i,\ \xi_i)$ の計算法

ステップ 1 $\beta \equiv \{i | x_i = F_i(x^k) = 0\}$ とおく．

ステップ 2 $i \in \beta$ となるすべての i に対して $z_i \neq 0$ となる $z \in \Re^n$ を選ぶ．

ステップ 3 $i \in \beta$ に対して

$$(\eta_i,\ \xi_i) = \left(\frac{z_i}{\sqrt{z_i^2 + (\nabla F_i(x^k)^T z)^2}},\ \frac{\nabla F_i(x^k)^T z}{\sqrt{z_i^2 + (\nabla F_i(x^k)^T z)^2}} \right)$$

とする．

6 節の数値実験では，一般化 Newton 法のパラメータを

$$\rho = 100,\ p = 2,\ \gamma = 0.01,\ \varepsilon = 10^{-7}$$

と設定した．反復回数の上限は 30 回とし，反復がこの上限に達した場合は解は得られなかったものとして直ちに終了した．