

# 準変分不等式に対するギャップ関数と一般化 Nash 均衡問題への応用

久保田 雄統

## 摘要

複数のプレイヤーが参加するゲームにおいて、どのプレイヤーも単独では自らの戦略を変える動機を持たないような状態を Nash 均衡といい、それを求める問題を Nash 均衡問題と呼ぶ。一般化 Nash 均衡問題は Nash 均衡問題を一般化し、各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存する場合を取り扱えるように拡張したものである。一般化 Nash 均衡問題は適当な仮定の下で準変分不等式問題に再定式化できることが知られているが、準変分不等式問題に関する研究は、現時点ではまだ揺籃期の域を出るものではない。特に、準変分不等式問題を数値的に解くアルゴリズムについては、いくつか提案されているにすぎない。提案されているアルゴリズムのひとつに、ギャップ関数を用いて等価な最適化問題に再定式化する手法があるが、この手法にはギャップ関数が一般に微分可能でないという問題や、停留点が必ずしも大域的最適解になっているとは限らないという問題が残されている。

本報告書では、一般化 Nash 均衡問題から導かれる準変分不等式問題をギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を考察する。まず、一般化 Nash 均衡問題に対していくつかの条件を仮定することで、ギャップ関数の微分可能性などいくつかの重要な性質について議論する。さらに、数値実験によりギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を、障壁関数を用いて変分不等式に再定式化する手法と比較し、その有効性を検証する。

特別研究報告書

準変分不等式に対するギャップ関数と  
一般化 Nash 均衡問題への応用

指導教員 福嶋雅夫 教授

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成15年4月入学

平成19年3月卒業

久保田 雄統

平成19年1月31日提出

# 目次

1	序論	1
2	一般化 Nash 均衡問題	2
3	準変分不等式	3
4	一般化 Nash 均衡問題の準変分不等式への再定式化	4
5	準変分不等式に対するメリット関数	4
5.1	メリット関数 . . . . .	4
5.2	準変分不等式問題に対する正則化ギャップ関数 . . . . .	5
6	等式制約下における停留点と大域的最適解	10
7	数値実験	12
7.1	正則化ギャップ関数による最適化問題への再定式化 . . . . .	13
7.2	障壁関数を用いた変分不等式への再定式化 . . . . .	13
7.3	実験結果 . . . . .	13
8	結論	15

# 1 序論

Nash 均衡問題とは、複数のプレイヤーが参加するゲームにおいて、どのプレイヤーも単独では自らの戦略を変える動機を持たないような状態 (Nash 均衡) を求める問題である。これを一般化し、各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存する場合に、同様の状態を求める問題を一般化 Nash 均衡問題 (**GNEP; Generalized Nash Equilibrium Problem**) という。本報告書では、この一般化 Nash 均衡問題を対象とする。

各プレイヤーが解く問題が凸計画問題になっている場合には、Nash 均衡問題は変分不等式問題 (**VIP; Variational Inequality Problem**) に再定式化できることが知られている [3, 7]。変分不等式問題は、均衡問題の中で最も基本的なものの一つであり、経済や工学、オペレーションズ・リサーチなどの分野において大いに応用されている。変分不等式問題の研究には長い歴史があり、これを解く手法に関しても広範囲にわたって研究が進められている [3]。特に、ギャップ関数 [1] やそれを改良した正則化ギャップ関数 [4] に代表されるメリット関数は、変分不等式問題を等価な最適化問題に再定式化することによって取り扱う際に重要な役割を果たすものである。

一方、一般化 Nash 均衡問題に関しても、いくつかの仮定のもとで、準変分不等式問題 (**QVIP; Quasi-Variational Inequality Problem**) に再定式化できることが知られている [8]。一般化 Nash 均衡問題と準変分不等式問題の関係については、Bensoussan [2] によって、ヒルベルト空間上で定義された問題に対して明らかにされた。その後 Harker [8] がユークリッド空間上で定義された問題についていくつかの結果を得た。

しかし、準変分不等式問題に関する研究は、変分不等式問題とは異なり、現時点ではまだ揺籃期の域を出るものではない。特に、有限次元の準変分不等式問題に関する研究は数えるほどしかない、といってよい。準変分不等式問題を数値的に解くアルゴリズムについても、ペナルティ関数を用いた変換により得られる変分不等式を反復して解く手法 [10]、障壁関数を用いた変換により得られる変分不等式を逐次的に解く手法 [9]、およびギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法 [6] などが提案されているにすぎない。

最後に挙げた、ギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法には、いくつかの問題が残されている。準変分不等式問題に対するギャップ関数は、ある仮定の下では微分可能となるが [6]、一般に凸関数ではない。そのため、停留条件を満たす点が必ずしも大域的最適解になっているとは限らず、このことが実際の計算において障害となるおそれがある。

本報告書では、いくつかの条件を仮定することで、正則化ギャップ関数が微分可能になることを示す。また、ある条件下で、正則化ギャップ関数の最小化問題に対する停留条件を満たす点が大域的最適解になることを示す。さらに、数値実験を行い、ギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を、障壁関数を用いて変分不等式に再定式化する手法と比較し、その有効性を検証する。

以下、本報告書の構成を示す。第 2 節で一般化 Nash 均衡問題、第 3 節で準変分不等式問題をそれぞれ定式化する。第 4 節では一般化 Nash 均衡問題を等価な準変分不等式問題へ最適化する手法を説明する。第 5 節では、正則化ギャップ関数を定義し、その微分可能性などの性質を示す。第 6

節では、制約が等式制約のみで構成される場合に、正則化ギャップ関数の最小化問題に対する停留条件を満たす点が大域的最適解になることを示す。第7節では、数値実験により他手法との比較を行い、最後に第8節で結論を述べる。

## 2 一般化 Nash 均衡問題

$N$  人のプレイヤーによるゲームにおいて、各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存する場合を考える。どのプレイヤーも単独では戦略を変える動機を持たないとき、その状態を一般化 Nash 均衡 (GNE; Generalized Nash Equilibrium) と呼ぶ。一般化 Nash 均衡問題 (GNP; Generalized Nash Equilibrium Problem) は、そのような一般化 Nash 均衡を求める問題である [10]。本報告書では、プレイヤー  $\nu$  の問題が以下のように表される場合を考える。

$$P^\nu(x^{-\nu}) : \begin{array}{ll} \underset{x^\nu}{\text{minimize}} & \theta_\nu(x^{-\nu}, x^\nu) \\ \text{subject to} & x^\nu \in S^\nu(x^{-\nu}) \end{array} \quad (1)$$

ただし、表記を簡単にするために

$$\begin{aligned} n &\equiv \sum_{\nu=1}^N n_\nu \\ n_{-\nu} &\equiv n - n_\nu \\ x &\equiv (x^\nu)_{\nu=1}^N \\ x^{-\nu} &\equiv (x^{\nu'})_{\nu' \neq \nu} \end{aligned}$$

と定義している。すなわち、 $x^\nu \in \mathfrak{R}^{n_\nu}$  はプレイヤー  $\nu$  の戦略、 $x^{-\nu} \in \mathfrak{R}^{n_{-\nu}}$  はプレイヤー  $\nu$  以外の戦略をまとめて表記したものである。目的関数  $\theta_\nu : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  はプレイヤー  $\nu$  のコスト関数である。また、 $S^\nu(x^{-\nu}) \subseteq \mathfrak{R}^{n_\nu}$  はプレイヤー  $\nu$  の戦略集合である。

したがって、一般化 Nash 均衡問題とは、以下の条件が成立するような戦略の組  $x^* \equiv (x^{*,\nu})_{\nu=1}^N$  を求める問題であるといえる：各々の  $\nu = 1, \dots, N$  に対し、 $x^{-\nu}$  を  $x^{*,-\nu}$  に固定したときの最適化問題

$$P^\nu(x^{*,-\nu}) : \begin{array}{ll} \underset{x^\nu}{\text{minimize}} & \theta_\nu(x^{*,-\nu}, x^\nu) \\ \text{subject to} & x^\nu \in S^\nu(x^{*,-\nu}) \end{array} \quad (2)$$

の最適解が  $x^{*,\nu}$  になっている。この  $x^*$  が一般化 Nash 均衡である。

本報告書では、 $\theta_\nu(x^{-\nu}, \cdot)$  および  $S^\nu(x^{-\nu})$  に関して、以下の仮定が成立しているとする。

**仮定 2.1** 各  $\nu$  に対して、点-集合写像  $S^\nu : \mathfrak{R}^{n_{-\nu}} \rightrightarrows \mathfrak{R}^{n_\nu}$  は、 $m_\nu$  個の関数  $g_i^\nu : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, \dots, m_\nu$ , を用いて次のように表される：

$$S^\nu(x^{-\nu}) = \{\xi^\nu \in \mathfrak{R}^{n_\nu} \mid g_i^\nu(x^{-\nu}, \xi^\nu) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_\nu\}$$

ここで、 $m_\nu$  は非負の整数である。

**仮定 2.2** 任意の  $x^{-v} \in \mathfrak{R}^{n-v}$  に対して,  $\theta_v(x^{-v}, \cdot) : \mathfrak{R}^{n_v} \rightarrow \mathfrak{R}$  は二回連続的微分可能な凸関数である. また, すべての  $i = 1, \dots, m_v$  に対して  $g_i^v(x^{-v}, \cdot) : \mathfrak{R}^{n_v} \rightarrow \mathfrak{R}$  は連続的微分可能な凸関数である.

これらの仮定により, 各プレイヤーの解く問題は微分可能な凸計画問題となる.

### 3 準変分不等式

前節で述べた一般化 Nash 均衡問題は, 適当な仮定の下で準変分不等式問題と呼ばれる問題に再定式化できる. まず準変分不等式を正式に定義する.

ベクトル値関数  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  と,  $\mathfrak{R}^n$  の空でない閉凸部分集合  $\hat{S}$  が与えられているとする. このとき, 以下の不等式を満たすベクトル  $x \in \hat{S}$  を求める問題を変分不等式問題 (**VIP**; **Variational Inequality Problem**) という.

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \hat{S} \quad (3)$$

ただし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{R}^n$  における内積を表す.

変分不等式問題 (3) において, 実行可能集合  $\hat{S}$  が  $x$  に依存するとき, すなわち, 点-集合写像  $S : \mathfrak{R}^n \rightrightarrows \mathfrak{R}^n$  によって与えられるとき, 問題は以下のように書ける.

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in S(x) \quad (4)$$

この問題を準変分不等式問題 (**QVIP**; **Quasi-Variational Inequality Problem**) という. つまり, 準変分不等式問題とは, 点-集合写像  $S$  とベクトル値写像  $F$  に対して, 不等式 (4) を満たすベクトル  $x \in S(x)$  を求める問題である.

準変分不等式問題について, 以下の定理が成立することが知られている [10].

**定理 3.1** 連続なベクトル値写像  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  と, 点-集合写像  $S : \mathfrak{R}^n \rightrightarrows \mathfrak{R}^n$  が与えられているとする. このとき, 以下の条件を満たすコンパクト凸集合  $T \subset \mathfrak{R}^n$  が存在するならば, 準変分不等式 (4) は解をもつ:

- (a) 任意の  $x \in T$  に対し,  $S(x)$  は  $T$  の空でない閉凸部分集合である.
- (b)  $S$  は  $T$  上のすべての点において連続である.

点-集合写像の各点における連続性は, 以下で定義される.

$S$  が  $x$  において上半連続であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $x$  の開近傍  $\mathcal{N}$  が存在して

$$\bigcup_{y \in \mathcal{N}} S(y) \subseteq S(x) + \mathbb{B}(0, \varepsilon)$$

が成立することである. ここで,  $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$  は, 原点が中心で半径  $\varepsilon > 0$  のユークリッド開球である.

一方,  $S$  が  $x$  において下半連続であるとは,  $S(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  であるような任意の開集合  $\mathcal{U}$  に対

して  $x$  のある開近傍  $\mathcal{N}$  が存在し,

$$S(y) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset, \quad \forall y \in \mathcal{N}$$

が成立することである.

点-集合写像  $S$  がある点  $x$  において連続であるとは,  $S$  が点  $x$  において上半連続かつ下半連続であることである. さらに,  $S$  がある集合  $T$  の任意の点において連続であるとき,  $S$  は  $T$  において連続であるという.

## 4 一般化 Nash 均衡問題の準変分不等式への再定式化

第2節で定義したように, 一般化 Nash 均衡問題とは,  $v = 1, \dots, N$  に対して  $x^{*,v}$  が  $P^v(x^{*,-v})$ , すなわち問題 (2) の最適解になっているような  $x^* = (x^{*,v})_{v=1}^N$  を求める問題である.

ベクトル値関数  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  と点-集合写像  $S: \mathfrak{R}^n \rightrightarrows \mathfrak{R}^n$  を次式で定義する.

$$F(x) \equiv \left( \nabla_{x^v} \theta_v(x^{-v}, x^v) \right)_{v=1}^N \in \mathfrak{R}^n, \quad (5)$$

$$S(x) \equiv \prod_{v=1}^N S^v(x^{-v}) \subseteq \mathfrak{R}^n \quad (6)$$

仮定 2.2 より, 問題 (2) は凸計画問題となる. したがって,  $x^{*,v}$  が問題 (2) の最適解になるための必要十分条件は  $x^{*,v}$  が集合  $S(x^{*,-v})$  上で関数  $\theta_v(x^{*,-v}, \cdot)$  の停留点になっていること, すなわち

$$\begin{aligned} x^{*,v} \in S^v(x^{*,-v}) \quad \text{かつ} \\ \langle \nabla_{x^v} \theta_v(x^{*,-v}, x^{*,v}), x^v - x^{*,v} \rangle \geq 0, \quad \forall x^v \in S(x^{*,-v}) \end{aligned}$$

が成立することである.

以上の議論から, 第2節で述べた一般化 Nash 均衡問題は以下の準変分不等式と等価である.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x^* \in S(x^*) \\ \text{such that} \quad & \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x^*) \end{aligned} \quad (7)$$

よって, 準変分不等式問題 (7) を解くことにより, 一般化 Nash 均衡が得られる.

## 5 準変分不等式に対するメリット関数

### 5.1 メリット関数

一般に, ある均衡問題に対して, 点  $x$  が問題の解ならば  $f(x) = 0$ , そうでなければ  $f(x) > 0$  となるような実数値関数  $f$  をメリット関数という.

変分不等式問題に対しては, これまでさまざまなメリット関数が提案され, その性質が研究されてきた. なかでも, 初期に提案されたギャップ関数 [1]

$$g(x) = -\inf_y \left\{ \langle F(x), y - x \rangle \mid y \in \hat{S} \right\} \quad (8)$$

には次の性質があることが知られている：関数  $g$  の  $\hat{S}$  上の最小値が 0 であり， $g(x) = 0$  となる点  $x \in \hat{S}$  は変分不等式問題 (3) の解と一致する．したがって変分不等式問題 (3) は以下の最適化問題として再定式化できる：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(x) \\ & \text{subject to} && x \in \hat{S} \end{aligned} \quad (9)$$

(8) 式で定義されるギャップ関数  $g$  は一般に微分不可能である．これに対して，関数  $F$  が微分可能であれば必ず微分可能になるように改良したメリット関数が，以下で定義される正則化ギャップ関数 [4] である．

$$\hat{f}(x) = -\inf_y \left\{ \langle F(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, H(y - x) \rangle \mid y \in \hat{S} \right\} \quad (10)$$

ここで， $H$  は  $n \times n$  正定値対称行列である．

正則化ギャップ関数 (10) に関して，次の性質が成立する [4, 5]．

**定理 5.1** 関数  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  が連続ならば，(10) で与えられる正則化ギャップ関数  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  は連続である．さらに， $F$  が連続的微分可能ならば， $f$  も連続的微分可能であり， $f$  の点  $x$  における勾配は

$$\nabla f(x) = F(x) - (\nabla F(x) - H)(y(x) - x) \quad (11)$$

で与えられる． ■

## 5.2 準変分不等式問題に対する正則化ギャップ関数

変分不等式問題に対する正則化ギャップ関数 (10) を，準変分不等式問題 (4) に対応するように拡張することを考える．準変分不等式問題 (4) に対して，以下の関数を考える：

$$f_H(x) \equiv -\inf_y \left\{ \langle F(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, H(y - x) \rangle \mid y \in S(x) \right\} \quad (12)$$

ただし， $H$  は与えられた  $n \times n$  正定値対称行列である．

この定義は，変分不等式問題に対する正則化ギャップ関数 (10) の自然な拡張になっている．これを準変分不等式問題に対する正則化ギャップ関数と呼ぶ．

ここで，準変分不等式問題 (4) の実行可能集合  $X$  を以下で定義する：

$$X \equiv \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x \in S(x)\}$$

この集合は，準変分不等式問題を再定式化するにあたって重要な役割を果たす．

任意の  $x \in X$  に対して，以下の凸二次計画問題の一意解を  $y(x)$  とする：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \langle F(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, H(y - x) \rangle \\ & \text{subject to} && y \in S(x) \end{aligned} \quad (13)$$



この  $y(x)$  は関数  $f_G$  の定義における最小化を実現する  $y$  であるから、問題 (13) の目的関数を  $\varphi(x, y)$  とすると、正則化ギャップ関数は

$$\begin{aligned} f_H(x) &= -\langle F(x), y(x) - x \rangle - \frac{1}{2}\langle y(x) - x, H(y(x) - x) \rangle \\ &= -\varphi(x, y(x)) \end{aligned} \quad (14)$$

と表すことができる。

次の定理は、関数  $f_H$  が準変分不等式問題 (4) のメリット関数になっていることを示している。

**定理 5.2** 任意の  $x \in X$  について、 $f_H(x) \geq 0$  である。さらに、 $x$  が準変分不等式問題 (4) の解であることは、 $f_H(x) = 0$  かつ  $x \in X$  であることと等価である。

**証明**  $x \in X$  ならば、 $x \in S(x)$  である。したがって、 $f_H(x)$  の定義より、

$$f_H(x) \geq -\langle F(x), x - x \rangle = 0$$

が成立する。

後半を示す。まず、 $x$  が準変分不等式問題 (4) の解とすると、 $x \in X$  である。 $y(x)$  は閉凸集合  $S(x)$  上で  $\varphi(x, \cdot)$  を最小化するので、一次の最適性条件

$$\langle \nabla_y \varphi(x, y(x)), y - y(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x)$$

を満たす。 $x \in X$  より  $x \in S(x)$  であるから、

$$\langle \nabla_y \varphi(x, y(x)), x - y(x) \rangle \geq 0$$

が成立する。これと

$$\langle F(x), y(x) - x \rangle \geq 0$$

より

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_y \varphi(x, y(x)) - F(x), y(x) - x \rangle \\ &= \langle \nabla_y \varphi(x, y(x)) - \nabla_y \varphi(x, x), y(x) - x \rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。 $\varphi(x, \cdot)$  の狭義凸性より  $\nabla_y \varphi(x, \cdot)$  は狭義単調写像であるから、(15) は  $x = y(x)$  を意味する。したがって、

$$f_H(x) = -\varphi(x, y(x)) = -\varphi(x, x) = 0$$

が成立する。

逆に、 $x \in X$  かつ  $f_H(x) = 0$  が成立しているとする。 $f_H(x)$  の定義より、 $f_H(x) = 0$  は

$$\varphi(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in S(x)$$

と等価である。一方,  $x \in X$  より  $x \in S(x)$  であり, さらに  $\varphi(x, x) = 0$  であるから, 上の不等式と  $y(x)$  の定義より  $x = y(x)$  がいえる。よって最小化問題 (13) の一次の最適性条件より,

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_y \varphi(x, y(x)), y - y(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x) \\ \Leftrightarrow & \langle \nabla_y \varphi(x, x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x) \\ \Leftrightarrow & \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x) \end{aligned}$$

が成立する。これは,  $x$  が準変分不等式問題 (4) の解であることを示している。 ■

上の定理より, 準変分不等式問題 (7) は次の最適化問題として再定式化できる:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_H(x) \\ & \text{subject to} && x \in X \end{aligned} \tag{16}$$

これ以降では, 関数  $F$  と点-集合写像  $S$  がそれぞれ (5) 式, (6) 式で定義される準変分不等式問題 (7) を考える。

以下の仮定を設ける。

**仮定 5.3**  $m_1 = \dots = m_N \equiv m$  であり, 点-集合写像  $S: \mathfrak{R}^n \rightrightarrows \mathfrak{R}^n$  は以下のように定義される: まず

$$G_i^\nu(x, \xi) = \langle a_i^\nu, \xi^\nu \rangle + \sum_{\mu \neq \nu} \langle a_i^\mu, x^\mu \rangle - b_i \tag{17}$$

で定義されるアフィン関数  $G_i^\nu: \mathfrak{R}^{n+n} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\nu = 1, \dots, N$  を用いて, 関数  $G(x, \xi): \mathfrak{R}^{n+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  を

$$G(x, \xi) \equiv \begin{bmatrix} G^1(x, \xi) \\ \vdots \\ G^N(x, \xi) \end{bmatrix}$$

と定義する。ただし,

$$G^\nu(x, \xi) \equiv \begin{bmatrix} G_1^\nu(x, \xi) \\ \vdots \\ G_m^\nu(x, \xi) \end{bmatrix}, \quad \nu = 1, \dots, N$$

である。さらに, 関数  $G$  を用いて  $S(x)$  を

$$S(x) = \{\xi \in \mathfrak{R}^n \mid G(x, \xi) \leq 0\}$$

と定義する。ここで,  $a_i^\nu \in \mathfrak{R}^{n\nu}$ ,  $b_i \in \mathfrak{R}$  であり, 以下では, ベクトル  $(a_i^\nu)_{\nu=1}^N$  を  $a_i$  と表記する。ここで, 関数  $\hat{G}_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  を

$$\hat{G}_i(x) \equiv \sum_{\nu=1}^N \langle a_i^\nu, x^\nu \rangle - b_i$$

と定義すれば、 $G_i^1(x, x) = \dots = G_i^N(x, x) = \hat{G}_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned} x \in S(x) &\Leftrightarrow x \in X \\ &\Leftrightarrow \hat{G}_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

であるから、準変分不等式問題 (7) は次の最適化問題と等価である：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f_H(x) \\ &\text{subject to} \quad \hat{G}_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**仮定 5.4** 各  $v = 1, \dots, N$  について、ベクトル  $a_i^v$ ,  $i = 1, \dots, m$  は一次独立である。

ここで、関数  $f_H(x)$  の微分可能性について述べる。残念ながら  $f_H(x)$  は一般に微分可能ではないが、適当な仮定の下では方向微分が可能であることが示せる [6].

**定理 5.5** (12) 式で定義される関数  $f_H(x)$  は任意の方向  $d \in \mathfrak{R}^n$  に関して方向微分可能であり、方向微係数は

$$f'_H(x; d) = \min_{\lambda \in A(x)} \left\{ \langle F(x) - (\nabla F(x) - H)(y(x) - x), d \rangle - \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^m \lambda_i^v \langle \nabla_x G_i^v(x, y(x)), d \rangle \right\}$$

で与えられる。ただし、 $A(x)$  は  $\mathfrak{R}^{Nm}$  の部分集合で

$$F(x) + H(y(x) - x) + \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^m \lambda_i^v \nabla_x G_i^v(x, y(x)) = 0 \quad (18a)$$

$$\lambda_i^v \geq 0 \quad (18b)$$

$$\lambda_i^v G_i^v(x, y(x)) = 0, \quad v = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m \quad (18c)$$

を満たすような  $\lambda \equiv ((\lambda_i^v)_{i=1}^m)_{v=1}^N \in \mathfrak{R}^{Nm}$  の集合である。さらに、 $A(x)$  の要素が唯一、すなわち

$$A(x) = \{\lambda(x)\}$$

と表される場合には、 $f_H$  は微分可能であり、 $x$  における勾配は

$$\nabla f_H(x) = F(x) - (\nabla F(x) - H)(y(x) - x) - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) \nabla_x G_i^v(x, y(x)) \quad (19)$$

となる。 ■

ここで、仮定 5.4 を用いれば、関数  $f_H(x)$  は任意の点  $x \in X$  において微分可能であることが示せる。

**定理 5.6** 上記の仮定 5.3, 5.4 が満足されているとする. このとき, 関数  $f_H$  は任意の点  $x \in X$  において微分可能であり,  $x$  における勾配は

$$\nabla f_H(x) = -\nabla F(x)(y(x) - x) - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) a_i \quad (20)$$

で与えられる.

**証明** 仮定 5.3 より,  $\nabla_x G_i^v(x, \xi)$  および  $\nabla_\xi G_i^v(x, \xi)$  は以下のように書き下せる:

$$\nabla_x G_i^v(x, \xi) = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^{v-1} \\ 0 \\ a_i^{v+1} \\ \vdots \\ a_i^N \end{pmatrix}, \quad \nabla_\xi G_i^v(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i^v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

仮定 5.4 より, 各  $v = 1, \dots, N$  について  $a_i^v, i = 1, \dots, m$  は一次独立である. したがって, (21) 式より,  $\nabla_\xi G_i^v(x, \xi), i = 1, \dots, m, v = 1, \dots, N$  は一次独立になる.

特に,  $\nabla_\xi G_i^v(x, \xi), i \in \mathcal{I}(x) \equiv \{i \mid G_i^v(x, y(x)) = 0\}, v = 1, \dots, N$  は一次独立であるから,  $\Lambda(x)$  の要素は唯一となる. したがって, 定理 5.5 より関数  $f_H$  は任意の点  $x \in X$  において微分可能である.

このとき,  $x$  における  $f_H$  の勾配は, 定理 5.5 より

$$\nabla f_H(x) = F(x) - (\nabla F(x) - H)(y(x) - x) - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^{v-1} \\ 0 \\ a_i^{v+1} \\ \vdots \\ a_i^N \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる.

(22) 式の右辺最後の項を変形すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^{v-1} \\ 0 \\ a_i^{v+1} \\ \vdots \\ a_i^N \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) \left[ \begin{pmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^{v-1} \\ a_i^v \\ a_i^{v+1} \\ \vdots \\ a_i^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i^v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) (a_i - \nabla_{\xi} G_i^v(x, y(x))) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) a_i + F(x) + H(y(x) - x) \tag{23}
\end{aligned}$$

ここで、最後の等号は (18a) 式より従う。

最後に、(23) 式を (22) 式に代入すると、

$$\nabla f_H(x) = -\nabla F(x)(y(x) - x) - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) a_i$$

が成立する。 ■

## 6 等式制約下における停留点と大域的最適解

関数  $f_H$  は一般に凸ではないので、問題 (16) に通常非線形最適化アルゴリズムを適用したとき大域的最適解が得られる理論的な保証はない。そこで、この節では問題 (16) の停留条件を満たす点が必ず大域的最適解になるための条件について議論する。

変分不等式問題の場合、正則化ギャップ関数を用いて再定式化した最小化問題においては、関数  $F$  の狭義単調性など一定の条件下ではすべての停留点の変分不等式問題の解になるという性質がある [4, 11]。しかし、一般の準変分不等式問題については、そのような簡単な条件を与えることは難しい。そこで、本節では、一般化 Nash 均衡問題の制約条件がすべて等式制約である場合を考え、正則化ギャップ関数の停留点が準変分不等式問題の解になるための十分条件を与える。

線形等式制約の一般化 Nash 均衡問題は以下の準変分不等式問題に変換できる：

$$\begin{aligned}
&\text{Find} && x^* \in S(x^*) \\
&\text{such that} && \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x^*) \tag{24}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
S(x) &\equiv \{ \xi \in \mathfrak{R}^n \mid G_i^v(x, \xi) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad v = 1, \dots, N \} \\
G_i^v(x, \xi) &\equiv \langle a_i^v, \xi^v \rangle + \sum_{\mu \neq v} \langle a_i^\mu, x^\mu \rangle - b_i
\end{aligned}$$

である。このとき、問題 (24) は正則化ギャップ関数を用いて以下の最適化問題に再定式化できる：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_H(x) \\ & \text{subject to} && \hat{G}_i(x) \equiv \sum_{v=1}^N \langle a_i^v, x^v \rangle - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (25)$$

次の定理は、制約が等式のみであるときには、等価な最適化問題 (25) の停留条件を満たすすべての点が準変分不等式 (24) の解、すなわち一般化 Nash 均衡になっていることを示すものである。前節の結果、特に定理 5.5 は条件に適当な変更を加えることにより、等式制約の場合に対しても成立することに注意する。

**定理 6.1** 点  $x \in X = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \hat{G}_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$  は問題 (25) の停留点であり、さらに点  $x$  に対して集合  $A(x)$  の要素は唯一、すなわち  $A(x) = \{\lambda(x)\}$  とする。また、 $\nabla F(x)$  は正定値であるとする。そのとき、点  $x$  は準変分不等式問題 (24) の解である。

**証明** 定理 5.5 より、仮定のもとで、関数  $f_H$  は点  $x$  において微分可能である。よって、 $x$  が問題 (25) の停留点であれば、

$$\langle \nabla f_H(x), y - x \rangle = 0, \quad \forall y \in X \quad (26)$$

が成立する。  $x, y(x) \in X$  より

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle - b_i &= 0 \\ \langle a_i, y(x) \rangle - b_i &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\langle a_i, y(x) - x \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (27)$$

が成立することに注意すると、定理 5.6 と (27) 式より

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla f_H(x), y(x) - x \rangle \\ &= - \left\langle \nabla F(x)(y(x) - x) + \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) a_i, y(x) - x \right\rangle \\ &= - \langle \nabla F(x)(y(x) - x), y(x) - x \rangle - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \lambda_i^v(x) \langle a_i, y(x) - x \rangle \\ &= - \langle \nabla F(x)(y(x) - x), y(x) - x \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。仮定より  $\nabla F(x) \succ 0$  であるから、 $y(x) = x$  である。したがって、 $f_H(x) = 0$  となり、(14) 式と定理 5.2 より  $x$  は準変分不等式問題 (24) の解である。 ■

前節まで扱ってきたような、一般化 Nash 均衡問題の制約条件が不等式制約で与えられる問題は、スラック変数  $\eta \equiv ((\eta_i^v)_{i=1}^m)_{v=1}^N$  を導入することで等式制約のみの問題に変換できる。すなわち、制

約式

$$G_i^v(x, \zeta) = \langle a_i^v, \zeta^v \rangle + \sum_{\mu \neq v} \langle a_i^\mu, x^\mu \rangle - b_i \leq 0$$

を

$$\bar{G}_i^v(x, \zeta, \eta) \equiv \langle a_i^v, \zeta^v \rangle + \sum_{\mu \neq v} \langle a_i^\mu, x^\mu \rangle + \eta_i^v - b_i = 0 \quad (29)$$

$$\eta_i^v \geq 0 \quad (30)$$

と書き換え、(30) 式の非負制約については対数障壁関数を用いて目的関数に含めることができる。このとき、最小化問題 (16) の近似問題は以下のように表すことができる：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_H(x) - \rho \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^N \log \eta_i^v \\ \text{subject to} \quad & \bar{G}_i^v(x, x, \eta) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad v = 1, \dots, N \end{aligned}$$

ただし、 $\rho > 0$  はパラメータである。このように、不等式制約の問題を等式制約のみの問題に変換することで、上の議論が適用できる。

## 7 数値実験

この節では、数値実験の結果を報告する。この実験の主な目的は、一般化 Nash 均衡問題をギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を、障壁関数を用いて変分不等式に再定式化する手法 [9] と比較し、その有効性を検証することである。

実験では、プレイヤー 1 の問題が

$$P^1(x_2) : \begin{aligned} & \underset{x_1}{\text{minimize}} \quad 2x_1 + (8/3)x_2 - 34.00 \\ & \text{subject to} \quad 0 \leq x_1 \leq 10, \quad x_1 \leq 15 - x_2 \end{aligned}$$

プレイヤー 2 の問題が

$$P^2(x_1) : \begin{aligned} & \underset{x_2}{\text{minimize}} \quad (5/4)x_1 + 2x_2 - 24.25 \\ & \text{subject to} \quad 0 \leq x_2 \leq 10, \quad x_2 \leq 15 - x_1 \end{aligned}$$

で与えられる一般化 Nash 均衡問題 [8] を用いた。この一般化 Nash 均衡問題は、第 4 節の議論により以下の準変分不等式問題と等価である：

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x^* \in S(x^*) \\ \text{such that} \quad & \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S(x^*) \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、関数  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^2$ 、点-集合写像  $S : \mathfrak{R}^2 \rightrightarrows \mathfrak{R}^2$  はそれぞれ

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + (8/3)x_2 - 34.00 \\ (5/4)x_1 + 2x_2 - 24.25 \end{pmatrix}$$

$$S(x) = \{\zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2)^\top \in \mathfrak{R}^2 \mid 0 \leq \zeta_1 \leq 10, \ 0 \leq \zeta_2 \leq 10, \ \zeta_1 + x_2 \leq 15, \ x_1 + \zeta_2 \leq 15\}$$

で与えられる。なお、この問題の解集合は、

$$\{(5, 9)^\top\} \cup \{(x_1, x_2)^\top \mid x_1 = t, x_2 = 15 - t, t \in [9, 10]\}$$

と表される。

## 7.1 正則化ギャップ関数による最適化問題への再定式化

(12) 式で定義される正則化ギャップ関数  $f_H$  を用いると、問題 (31) は以下の最適化問題に再定式化できる：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_H(x) \\ & \text{subject to} && x \in X \end{aligned} \tag{32}$$

ただし、集合  $X$  は

$$X = \{x = (x_1 \ x_2)^\top \in \mathfrak{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10, x_1 + x_2 \leq 15\}$$

で定義される。

## 7.2 障壁関数を用いた変分不等式への再定式化

問題 (31) の解は、障壁関数を用いた変換により得られる変分不等式問題を逐次的に解くことによって得られることが知られている [9]。この手法において、 $k$  回目の反復で解く変分不等式問題は混合相補性問題に再定式化することができ、さらに以下の  $(x^k, \lambda^k, \mu^k) = ((x^{k,v})_{v=1,2}, (\lambda^{k,v})_{v=1,2}, (\mu^{k,v})_{v=1,2})$  を求める非線形相補性問題に再定式化することができる [9]。

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1^k \perp 2x_1^k + \frac{8}{3}x_2^k - 34.00 + \lambda^{k,1} + \mu^{k,1} \geq 0 \\ 0 &\leq x_2^k \perp \frac{5}{4}x_1^k + 2x_2^k - 24.25 + \lambda^{k,2} + \mu^{k,2} \geq 0 \\ 0 &\leq \lambda^{k,v} \perp \lambda^{k,v}(x_1^k + x_2^k - 15) + t^k u^{k,v} \leq 0, \quad v = 1, 2 \\ 0 &\leq \mu^{k,v} \perp x_1^k + x_2^k - 15 \leq 0, \quad v = 1, 2 \end{aligned} \tag{33}$$

ただし、 $\{t^k\}$  は 0 に収束する単調減少な正数列、 $\{u^k\}$  は各成分が正であるような有界なベクトル列であり、 $u^{k,v}$  はベクトル  $u^k$  の第  $v$  成分である。また、 $x^{k,v}, \lambda^{k,v}, \mu^{k,v} \in \mathfrak{R}, v = 1, 2, k = 1, 2, \dots$  である。

## 7.3 実験結果

数値実験は、CPU が 2.0GHz Pentium® 4 の計算機を用い、アルゴリズムは MATLAB® 7.0.1(R14 SP1) 上で実装した。

まず、最小化問題 (32) を、ランダムに生成した初期点を用いて解き、どの程度の頻度で正しい解が得られるか調べた。なお、関数の最小化には、MATLAB® 付属の FMINCON.M を利用した。



$X$  上に一様乱数で生成した 1000 個の点を初期点として問題を解いた結果、大域的最適解でない局所的最適解に収束したものは一つもなく、すべて何らかの大域的最適解に収束した。得られた解を  $x_1$  を横軸、 $x_2$  を縦軸にプロットしたものが図 1 である。

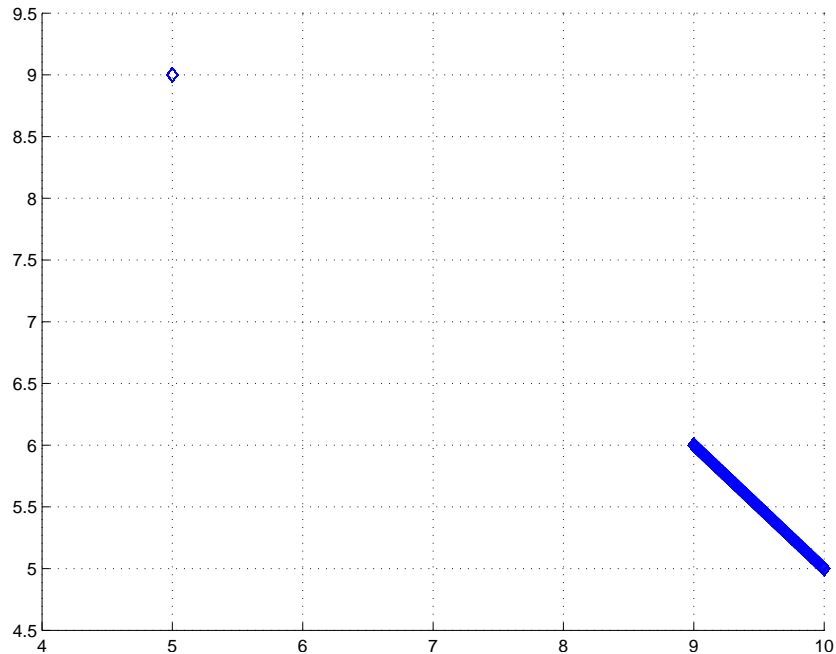


図 1 実験結果：最小化により得られた解

一方、内点ペナルティ法でも、初期点を区間  $(0, 10)$  の一様乱数で生成し、同じ問題を解いた。具体的には、 $k$  回目の反復で非線形相補性問題 (33) を等価な非線形方程式に再定式化したものを一般化ニュートン法を用いて解き、 $(x_1^k, x_2^k, \lambda^{k,\nu}, \mu^{k,\nu})$  がプレイヤー  $\nu$  の解く問題の最適性条件を満たすまで反復を繰り返して解を得た。ただし、各反復において一般化ニュートン法を適用する際の反復回数は 30 回を上限とし、それでも解が得られない場合はアルゴリズムを終了した。初期点  $(x_\nu^0, \lambda^{0,\nu}, \mu^{0,\nu})$ ,  $\nu = 1, 2$  はそれぞれ  $(0, 10)$  の範囲でランダムに生成した。パラメータについては、 $\{t^k\}$  は  $t^k \equiv 10^{1-k}$  とし、 $\{u^k\}$  は  $u^{k+1,\nu} \equiv \lambda^{k,\nu}$   $\nu = 1, 2$  と更新した。

1000 個の初期点を用いて計算を行った結果、937 回で準変分不等式の解に収束した。残りの 63 回は計算に失敗したが、それはある反復において部分問題を解く一般化ニュートン法が正常に終了しなかったためである。

以上のように、この問題においては、正則化ギャップ関数を用いた手法によって必ず準変分不等式の解が得られることが確認された。一方、内点ペナルティ法では、適切な初期点を与えなければ準変分不等式問題の解が正しく得られなかった。このことから、正則化ギャップ関数を用いた手法は実際に有効であるといえる。

## 8 結論

本報告書では、一般化 Nash 均衡問題から導かれる準変分不等式問題をギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を考察した。まず、一般化 Nash 均衡問題に対していくつかの条件を仮定することで、ギャップ関数の微分可能性やギャップ関数の停留点が大域的最適解になることなど、重要な性質を示した。さらに、数値実験によりギャップ関数を用いて最適化問題に再定式化する手法を、障壁関数を用いて変分不等式に再定式化する手法と比較し、その有効性を検証した。

## 謝辞

日頃から御教授を賜り、本報告書の作成にあたっては細部に至るまで熱心かつ適切な御指導を戴いた福嶋雅夫教授に心より感謝の意を表します。また、日頃よりお世話になっている山下信雄助教授、林俊介助手、ならびに本研究を進める上で数々の助言を賜った修士課程の鍋谷昂一さんをはじめとする福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] A. AUSLENDER, *Optimisation: Méthodes Numériques*, Masson, Paris, 1976.
- [2] A. BENSOUSSAN, *Points de Nash dans le cas de fonctionnelles quadratiques et jeux différentiels linéaires à N personnes*, SIAM Journal on Control, **12** (1974), pp. 460–499.
- [3] F. FACCHINEI AND J.-S. PANG, *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*, Springer, New York, 2003.
- [4] M. FUKUSHIMA, *Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems*, Mathematical Programming, **53** (1992), pp. 99–110.
- [5] ———, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [6] ———, *A class of gap functions for quasi-variational inequality problems*, Journal of Industrial and Management Optimization, to appear.
- [7] P. T. HARKER AND J.-S. PANG, *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications*, Mathematical Programming, Series B **48** (1990), pp. 161–220.
- [8] P. T. HARKER, *Generalized Nash games and quasi-variational inequalities*, European Journal of Operational Research, **54** (1991), pp. 81–94.
- [9] 鍋谷 昂一, 準変分不等式問題に対する内点ペナルティ法と一般化 Nash 均衡問題への応用, 京都大学工学部情報学科数理工学コース 特別研究報告書, 2006 年 1 月.
- [10] J.-S. PANG AND M. FUKUSHIMA, *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games*, Computational Management Science, **2** (2005), pp. 21–56.
- [11] K. TAJI AND M. FUKUSHIMA, *A new merit function and a successive quadratic programming algorithm for variational inequality problems*, SIAM Journal on Optimization, **6** (1996), pp. 704–713.