特別研究報告書

N 人非協力ゲームに対する ロバスト Nash 均衡問題と解の一意性

指導教員　　福嶋雅夫　教授
　　　　　　林　俊介　助手

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成１５年４月入学
平成１９年３月卒業

西村　亮一

平成１９年1月３１日提出

N 人非協力ゲームに対する ロバスト Nash 均衡問題と解の一意性

西村　亮一

摘要

非協力ゲームとは，各プレイヤーが他のプレイヤーとは独立に意思決定する状況をモデル化したものであり，その重要な均衡概念として知られるのが Nash 均衡である．Nash 均衡は，各プレイヤーがゲームのルールについて完全な知識，すなわち，ゲームのすべてのパラメータや各プレイヤーのコスト関数などの情報を持ち，それ自体がプレイヤーの共通認識であるという前提の下で意味をもつ．しかし，現実の問題においては，その前提が満たされるとは限らない．そこで，ゲームのルールについてプレイヤーが不確実な情報しかもたない情報不完備ゲームをモデル化することが重要になってくる．これまで情報不完備ゲームに対して多くの研究がなされてきたが，本報告書では，その中でも特に各プレイヤーが不確実な情報の下で，ロバスト最適化と呼ばれる概念に基づいて自分の戦略を決定することを仮定したモデルを考える．このモデルにおいて起こり得る均衡状態をロバスト Nash 均衡といい，その均衡点を求める問題をロバスト Nash 均衡問題という．

本報告書では，まず，既存のロバスト Nash 均衡の概念をより一般化し，プレイヤーの数が N 人で，各プレイヤーのコスト関数（利得関数）が自分の戦略に関して非線形な場合に対して，ロバスト Nash 均衡を定義する．さらに，コスト関数や戦略集合に対する凸性とコンパクト性の仮定のもとで，ロバスト Nash 均衡解の存在性を示す．さらに，ロバスト Nash 均衡問題を等価な一般化変分不等式問題に変換することにより，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在するための十分条件を与える．特に，各プレイヤーのコスト関数が二次の項を含み，不確実性を表す集合が二次のノルムを用いて表されるロバスト Nash 均衡問題を二次錐相補性問題として再定式化できることを示す．二次錐相補性問題に対するアルゴリズムを用いた数値実験を行い，ロバスト Nash 均衡解の性質を調べる．

目次

1　序論

私たちは，個人，または企業などの組織において，様々な意思決定を行っている．私たちの意思決定は，他の人々の意思決定に影響を及ぼし，同様に他の人々の意思決定は，私たちの意思決定に影響を及ぼす．ゲーム理論は，経済や社会における様々な意思決定を数理的な方法論を用いて分析する理論である [18]．Nash [16, 17] は非協力ゲームを最初に定義し，それに対して均衡解（Nash 均衡解）の概念を提示した．Nash 均衡解は，各プレイヤーはゲームのルールについて完全な知識，すなわち，ゲームのすべてのパラメータや各プレイヤーのコスト関数などの情報を持ち，またそれ自体がプレイヤーの共通認識であるという前提の下で意味をもつ．この前提を情報完備という．しかし，現実の問題において，情報完備の前提が満たされるとは限らない．そこで，ゲームのルールについてプレイヤーが不完全な知識しか持っていない情報不完備ゲームが多くの研究者によって研究されている．

Harsanyi [13, 14, 15] は，情報不完備ゲームを定式化した．その定式化では，不確実な情報の下での意思決定に対して，それらの真の値を確率分布の形で予想し，各プレイヤーはその確率分布のもとでの期待値を最適化するというベイジアン仮説を採用した．さらに，確率分布に対するある仮定の下で，情報不完備ゲームを変換してベイジアンゲームを定義した．ベイジアンゲームは，情報不完備ゲームから定義されるゲームであるが，ベイジアンゲームの構成要素に関しては完全な知識をもつ情報完備ゲームである．情報不完備ゲームとベイジアンゲームは，プレイヤーにとって戦略上の観点からは同値であると見なせる．

Aghassi and Bertsimas [1] や Hayashi, Yamashita, and Fukushima [11] は，情報不完備ゲームに対して，ベイジアンゲームの仮定を緩和して確率分布を用いないモデルを提案した．彼らのモデルでは，各プレイヤーがロバスト最適化 [4, 5, 6] を行うことにより自分の戦略を決定することが仮定されている．ここで，ロバスト最適化とは，不確実なパラメータを含むが，そのパラメータが少なくともある範囲内（不確実性集合）に入っていることが期待できる最適化問題に対して，その範囲内で起こり得る最悪のケースを想定して最適化を行うものである．各プレイヤーがロバスト最適化を行った結果起こり得る均衡状態をロバスト Nash 均衡という．また，そのような均衡点を求める問題をロバスト Nash 均衡問題という．Aghassi ら [1] は，N 人のプレイヤーがそれぞれ線形計画問題（Linear Programming : LP）を解くようなゲームを考え，それに対してロバスト Nash 均衡[*1]を定義した．さらに，不確実性集合が凸多面体である問題に対して，ロバスト Nash 均衡解を求める方法を提案した．Hayashi ら [11] は，Aghassi ら [1] とは独立に，双行列ゲームに対してロバスト Nash 均衡の概念を定義した．彼らは，不確実性集合がユークリッドノルムやフロベニウスノルムを用いて表されるという仮定の下で，各プレイヤーの解くべき最適化問題を二次錐計画問題（Second-Order Cone Programming : SOCP）[2] として再定式化し，その結果，ロバスト Nash 均衡問題が二次錐相補性問題（Second-Order Cone Complementarity Problem : SOCCP）に帰着されることを示した．なお，Aghassi ら [1] のモデルでは，各プレイヤーが解くべき最適化問題に含まれる行列やベクトルのみに不確実性が仮定されているのに対し，Hayashi ら [11] は，他のプレイヤーの戦略にも不確実性が存在する場合も取り扱っている．

本報告書では，Hayashi [11] らの取り扱った問題を拡張して，N 人非協力ゲームに対するロバスト Nash 均衡の概念を定義する．特に，解の存在性を示すにあたって，Aghassi ら [1] や Hayashi ら [11] は，各プレイヤーのコスト関数（利得関数）が自分の戦略に対して線形な場合のみを考えたが，本報告書ではコスト関数が自分の戦略に関して凸な関数を考える．そして，適当な仮定の下で，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在する

[*1] Aghassi らの論文ではロバスト最適化均衡と書かれているが，実質的に同じものである．

ことを示す．また，Hayashi ら [11] が提案した手法を用いて，各プレイヤーのコスト関数が自分の戦略に関して 2 次の項を含むようなロバスト Nash 均衡問題を SOCCP に再定式化する．

本報告書の構成は，次の通りである．第 2 節では本報告書で扱うゲームを定式化し，ロバスト Nash 均衡の概念を定義する．第 3 節でロバスト Nash 均衡解の存在条件を示す．第 4 節では適当な仮定の下で，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在することを示す．第 5 節では，いくつかのケースに対して，ロバスト Nash 均衡問題を SOCCP に再定式化する．第 6 節で，それらの問題に対する数値実験を行ってロバスト Nash 均衡解の性質を調べる．

本報告書を通じて，以下の表記法を用いる．集合 X に対して，X のすべての部分集合の集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す．$\Re^n_+$ は各成分が非負であるような n 次元実ベクトルの集合を表す．すなわち，$\Re^n_+ := \{x \in \Re^n \mid x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．ベクトル $x \in \Re^n$ に対して，$\|x\| := \sqrt{x^T x}$ はユークリッドノルムを表す．行列 $M \in \Re^{n\times m}$ に対して，$\|M\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij})^2)^{1/2}$ はフロベニウスノルムを表す．

2 定式化

本報告書では，N 人のプレイヤーが，それぞれ自らのコスト関数を最小化しようとする非協力ゲームを考える．各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，$x^i \in \Re^{m_i}$ をプレイヤー i の戦略，集合 $S_i \subseteq \Re^{m_i}$ を許容戦略集合，$f_i : \Re^{m_1} \times \cdots \times \Re^{m_N} \to \Re$ をコスト関数とする．また，表記を簡単にするために，以下の記号を導入する．

$$
\begin{aligned}
x &:= (x^j)_{j=1}^N \\
x^{-i} &:= (x^j)_{j=1, j\neq i}^N \\
m &:= \sum_{i=1}^N m_i \\
m_{-i} &:= m - m_i \\
S_{-i} &:= \prod_{j=1, j\neq i}^N S_j
\end{aligned}
$$

情報完備の前提が満たされるならば，各プレイヤー i は他の $N-1$ 人のプレイヤーの戦略 x^{-i} を固定した次の最小化問題を解くことによって，自らの戦略を決定する．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x^i}{\text{minimize}} & f_i(x^i, x^{-i}) \\
\text{subject to} & x^i \in S_i
\end{array} \tag{1}
$$

各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，$\bar{x}^i \in \operatorname{argmin}_{x^i \in S_i} f_i(x^i, \bar{x}^{-i})$ が成り立つとき，点 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ を Nash 均衡解と呼ぶ．すなわち，各プレイヤーがそれぞれ戦略 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N$ をとるとき，どのプレイヤーも戦略を変える動機を持たないことを意味する．Nash 均衡解の概念が意味をもつためには，各プレイヤーが自分以外の $N-1$ 人の相手の戦略，あるいは，自分のコスト関数を正確に評価できなければならない．しかし，実際の問題においては，時間による変化や推定誤差などのため，情報に不確実性が存在する．そこで本報告書では，不確実な情報をもったゲームを考える．

以下では，不確実な情報をもつ N 人非協力ゲームに対して，ロバスト Nash 均衡解を定義する．各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ がとる行動に対して次の 3 つの前提条件が成り立っているものとする．

1. プレイヤー i のコスト関数は，パラメータ $u^i \in \Re^{\nu_i}$ に依存して，$f_i^{u^i} : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \to \Re$ と表される．

しかし，プレイヤー i はそのパラメータ u^i を厳密には推定できず，空でない集合 $U_i \subseteq \Re^{\nu_i}$ に含まれていると予想する．

2. プレイヤー i は他の $N-1$ 人のプレイヤーの戦略 x^{-i} を正確に知っているが，実際にコスト関数の値が計算されるときには，他者の戦略は $x^{-i}+\delta x^{-i}$ のように δx^{-i} だけの「ずれ」を含んだ形で評価される．しかし，プレイヤー i は δx^{-i} の値を事前に知ることはできず，$\hat{x}^{-i} := x^{-i}+\delta x^{-i}$ が，空でない集合 $X_{-i}(x^{-i})$ に含まれていると予想する．
3. プレイヤー i は条件 1,2 の下で起こり得る最悪のケースを想定し，そのコストを最小化しようとする．

このとき，プレイヤー i が想定する最悪のコストを表す関数 $\tilde{f}_i : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \to (-\infty, +\infty]$ は次のように定義できる．

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) := \sup\{ f_i^{\hat{u}^i}(x^i, \hat{x}^{-i}) \mid \hat{u}_i \in U_i, \hat{x}^{-i} \in X_{-i}(x^{-i})\} \quad (i = 1, \dots N) \tag{2}$$

さらに，各プレイヤー $i \in \{1, \dots, N\}$ が解くべき最小化問題は以下で表される．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i}{\text{minimize}} & \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) \\ \text{subject to} & x^i \in S_i \end{array} \tag{3}$$

以上の準備の下で，ロバスト Nash 均衡解を定義する．

定義 2.1. 関数 $\tilde{f}_i$ が (2) で定義されているとする．さらに，ある戦略の組 $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^N) \in S_1 \times \cdots \times S_N$ が，$\overline{x}^i \in \operatorname{argmin}_{x^i \in S_i} \tilde{f}_i(x^i, \overline{x}^{-i})$ $(i = 1, \dots, N)$ を満たしている，すなわち，ゲーム (3) の Nash 均衡解になっているとする．このとき，戦略の組 $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^N)$ をゲーム (1) のロバスト Nash 均衡解という．

3　ロバスト Nash 均衡解の存在

本節では，ロバスト Nash 均衡解が存在するための十分条件を与える．そのために，まず，点-集合写像の連続性を定義する [9, P.89]．なお，前節の前提条件 2 の中で与えられている $X_{-i}(\cdot)$ は，点-集合写像とみなせることに注意する．

定義 3.1.

1. 点-集合写像 $A : U \to \mathcal{P}(X)$ が点 $\overline{u} \in U$ のまわりで一様有界であり，さらに $u^k \to \overline{u}, x^k \to \overline{x}$ かつ $x^k \in A(u^k)(k = 1, 2, \dots)$ であるような任意の点列 $\{u^k\} \subseteq U$,$\{x^k\} \subseteq X$ に対して $\overline{x} \in A(\overline{u})$ が成立するとき，点 $\overline{u}$ において上半連続であるという．
2. 点-集合写像 $A : U \to \mathcal{P}(X)$ が $u^k \to \overline{u} \in U$ となる任意の点列 $\{u^k\} \subseteq U$ と $\overline{x} \in A(\overline{u})$ を満たす任意の点 $\overline{x} \in X$ に対して，$x^k \to \overline{x}$ かつ $x^k \in A(u^k)(k \geq k_0)$ であるような整数 $k_0 > 0$ と点列 $\{x^k\} \subseteq X$ が存在するとき，点 $\overline{u}$ において下半連続であるという．
3. 点-集合写像 $A : U \to \mathcal{P}(X)$ が $\overline{u} \in U$ において上半連続かつ下半連続であるとき，点 $\overline{u}$ において連続であるという．

以下では，前節の条件 1,2 で与えられている $X_{-i}(\cdot)$ と U_i および関数 f^{u^i}，集合 S_i $(i = 1, \dots, N)$ に対して，次の仮定が満たされているとする．

仮定 1.

(a) $G_i(x^i, x^{-i}, u^i) := f_i^{u^i}(x^i, x^{-i})$ で定義される関数 $G_i : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \times \Re^{\nu_i} \to \Re$ は，任意の点 (x^i, x^{-i}, u^i) で連続である．

(b) 任意の $x^{-i} \in \Re^{m_{-i}}$ において，点-集合写像 $X_{-i} : \Re^{m_{-i}} \to \mathcal{P}(\Re^{m_{-i}})$ は連続であり，$X_{-i}(x^{-i})$ は空でないコンパクト集合である．

(c) $U_i \subseteq \Re^{\nu_i}$ は，空でないコンパクト集合である．

(d) S_i は空でないコンパクト凸集合である．また，x^{-i}, u^i を任意に固定したとき，関数 $f_i^{u^i}(\cdot, x^{-i}) : \Re^{m_i} \to \Re$ は S_i 上で凸である．

この仮定 1(a)–(c) より，$\tilde{f}_i$ はすべての $(x^i, x^{-i}) \in \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}}$ において有限値をとり，連続となる．また，すべての $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して次の補題が成り立つ．

補題 3.1. 仮定 1 が成り立つとする．このとき, 任意に固定した $x^{-i} \in S_{-i}$ に対して, 関数 $\tilde{f}_i(\cdot, x^{-i}) : \Re^{m_i} \to \Re$ は S_i 上で凸である．

証明. プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ を任意に選び，他者の戦略 $x^{-i} \in S_{-i}$ を任意に固定する．さらに，表記の簡単のため，変数，集合，関数を以下のように書き直す．

$$y := x^i, \quad \hat{w} := (\hat{u}^i, \hat{x}^{-i})^T, \quad g_{\hat{w}}(y) := f_i^{\hat{u}^i}(x^i, \hat{x}^{-i}), \quad W := U_i \times X_{-i}(x^{-i})$$

ここで，x^{-i} は定数，$\hat{x}^{-i}$ はパラメータとみなしていることに注意する．このとき，以下で定義される関数 $\tilde{g} : \Re^{m_i} \to \Re$ が凸であることを示せばよい．

$$\tilde{g}(y) := \sup\{g_{\hat{w}}(y) \mid \hat{w} \in W\} \tag{4}$$

仮定 1 より，任意の $\hat{w} \in W$ に対して，$g_{\hat{w}}$ は S_i 上で凸である．さらに，(4) より，任意の $y \in S_i$ および $\hat{w} \in W$ に対して，$g_{\hat{w}}(y) \leq \tilde{g}(y)$ が成り立つ．よって，$g_{\hat{w}}(y)$ の $\hat{w} \in W$ に対する連続性（仮定 1(a)）と，W のコンパクト性（仮定 1(b)(c)）から，任意の $y \in S_i$ に対して，

$$\overline{w}(y) \in \arg\max\{g_{\hat{w}}(y) \mid \hat{w} \in W\}$$

が存在する．ここで，任意の $y^1, y^2 \in S_i$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して，$y^3 := (1-\alpha)y^1 + \alpha y^2 \in S_i$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(y^3) &= g_{\overline{w}(y^3)}(y^3) \\
&\leq (1-\alpha) g_{\overline{w}(y^3)}(y^1) + \alpha g_{\overline{w}(y^3)}(y^2) \\
&\leq (1-\alpha) g_{\overline{w}(y^1)}(y^1) + \alpha g_{\overline{w}(y^2)}(y^2) \\
&= (1-\alpha)\tilde{g}(y^1) + \alpha \tilde{g}(y^2)
\end{aligned}$$

を得る．これは，$\tilde{g}$ が S_i 上で凸であることを示している． □

次の補題は，N 人の非協力ゲームに対するよく知られた結果である．

補題 3.2. [3, Theorem 9.1.1] N 人の非協力ゲームにおいて，各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ のコスト関数 $\theta_i : \Re^{m_i} \times \Re^{m_{-i}} \to \Re$ が任意の点 $(x^i, x^{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ において連続であり，さらに $x^{-i} \in S_{-i}$ を任意に固定したとき，関数 $\theta_i(\cdot, x^{-i})$ が S_i 上で凸であるとする．また，戦略集合 S_i は，空でないコンパクト凸集合であるとする．そのとき，このゲームは少なくとも一つの Nash 均衡解をもつ．

この 2 つの補題から，ゲーム (1) におけるロバスト Nash 均衡解の存在定理が得られる．

定理 3.1. 仮定 1 が成り立つとする．このとき，ゲーム (1) は少なくとも一つのロバスト Nash 均衡解をもつ．

証明. 補題 3.1 より，$\tilde{f}_i(\cdot, x^{-i})$ は S_i 上で凸である．また，$\tilde{f}_i$ は連続関数である．よって，補題 3.2 から，ゲーム (3) は Nash 均衡解をもつ．これは，定義 2.1 から，ゲーム (1) が少なくとも一つのロバスト Nash 均衡解をもつことを示している． □

4 ロバスト Nash 均衡解の一意性

前節では，ロバスト Nash 均衡解が存在するための十分条件を考えた．しかし，情報完備ゲームにおける Nash 均衡解と同様，ロバスト Nash 均衡解は一般に複数存在し，そのすべてを知るのは困難である．ところが，情報完備ゲームにおける Nash 均衡解は，ある条件の下で一意に存在することが知られている．実際，Rosen [19] は各プレイヤーの利得関数が連続的微分可能な情報完備ゲームに対して，解が一意に存在するための条件を与えた．そこで示されている条件は，ゲームを等価な変分不等式問題（Variational Inequality Problem : VIP）に変換したときに，その VIP に含まれる写像が狭義単調性をもつことにほかならない．そこで，本節では，ロバスト Nash 均衡解が一意に存在するための十分条件について考える．具体的には，Nash 均衡問題，及びロバスト Nash 均衡問題とそれぞれ等価な変分不等式問題を導く．次に，VIP に対する結果を用いて，ロバスト Nash 均衡解の一意性を考える．なお，本節では簡単のため，各プレイヤーのコスト関数 $f_i^{u^i}$ は連続的微分可能であると仮定する．

変分不等式問題 VIP(F, S) とは，ベクトル値写像 F と空でない閉凸集合 S が与えられたとき，次の条件を満たすベクトル $x \in S$ を求める問題である [7].

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in S \tag{5}$$

変分不等式問題は，ベクトル方程式や相補性問題，最適化問題などを含む幅広いクラスの問題である．実際，$S = \Re^n$ とすると VIP(5) はベクトル方程式 $F(x) = 0$ と等価であるし，$S = \Re^n_+$ とすると VIP(5) は非線形相補性問題 $x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0$ と等価である．VIP(F, S) については，写像 F が以下で定義される狭義単調性をもつとき，解は存在すれば一意であることが知られている．

定義 4.1. ベクトル値写像 $F : \Re^n \to \Re^n$ と空でない凸集合 $S \subseteq \Re^n$ が与えられているとする．このとき，任意の $x, y \in S$ $(x \neq y)$ に対して

$$\langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \geq (>)\ 0$$

が成り立つならば，写像 F は S において単調（狭義単調）であるという．

定理 4.1. [9, 定理 5.4] ベクトル値写像 F を連続写像，S を空でない閉凸集合とする．そのとき，F が S において狭義単調であれば，変分不等式問題 (5) の解は存在すれば一意である．

さらに，F が微分可能であれば，その導関数を調べることにより，F の狭義単調性をチェックできる．

定理 4.2. [9, 定理 2.67] $F : \Re^n \to \Re^n$ を連続的微分可能なベクトル値関数とする．このとき F が狭義単調であるための十分条件は，$\nabla F(x)$ が任意の x に対して正定値になることである．

さて，ゲーム (1) において，$x^{-i} \in S_{-i}$ を任意に固定した関数 $f_i(\cdot, x^{-i})$ が連続的微分可能とし，S_i は空でない閉凸集合であるとしよう．このとき，F と S を次のように定めると，ゲーム (1) に対する Nash 均衡問題は VIP(5) と等価になる．

$$\begin{aligned} x &:= (x^i)_{i=1,\dots,N} \\ F(x) &:= \left(\nabla_i f_i(x^i, x^{-i})\right)_{i=1,\dots,N} \\ S &:= S_1 \times \cdots \times S_N \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\nabla_i f_i$ は，プレイヤー i の戦略 x^i のみを変数と見たときの関数 f_i の勾配 $\nabla_{x^i} f_i$ を意味している．従って，定理 4.1 より，(6) で定められる F が S において狭義単調ならば，ゲーム (1) の Nash 均衡解は存在すれば一意である．さらに，補題 3.2 の仮定が成り立てば，Nash 均衡解の存在も保証される．

もし，(2) で定義される $\tilde{f}_i$ が微分可能であれば，ロバスト Nash 均衡問題も上と同様に等価な VIP へと再定式化できる．しかし，たとえ $f_i^{u^i}$ が微分可能であっても，$\tilde{f}_i$ は微分可能であるとは限らない．そこで，微分不可能な凸関数に対して，劣微分写像と呼ばれる点-集合写像を定義し，ロバスト Nash 均衡問題を，ベクトル値写像の代わりに点-集合写像を用いた一般化変分不等式問題 (Generalized Variational Inequality Problem : GVIP) に再定式化することを考える．

一般化変分不等式問題 GVIP($\mathcal{F}, S$) とは，点-集合写像 $\mathcal{F}$ と空でない閉凸集合 S に対して，次のように定義される問題である．

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & x \in S \\ \text{such that} & \xi \in \mathcal{F}(x) \\ & \langle \xi, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S \end{array} \tag{7}$$

GVIP についても VIP と同様，点-集合写像が以下で定義される狭義単調性をもつとき，解は存在すれば一意であることが知られている [8].

定義 4.2. 点-集合写像 $A : \Re^n \to \mathcal{P}(\Re^n)$ と空でない凸集合 $S \subseteq \Re^n$ が与えられているとする．このとき，任意の $x, y \in S$ $(x \neq y)$ と $\xi \in A(x), \eta \in A(y)$ に対して，

$$\langle x - y, \xi - \eta \rangle \geq (>)\ 0$$

が成り立つならば，点-集合写像 A は S において単調（狭義単調）であるという．

定理 4.3. 点-集合写像 $\mathcal{F} : \Re^n \to \mathcal{P}(\Re^n)$ が S において狭義単調であれば，GVIP(7) の解は，存在すれば一意である．

ロバスト Nash 均衡問題を GVIP に再定式化する．まず，凸関数に対して劣微分写像を定義する．

定義 4.3. 凸関数 $f : \Re^n \to \Re$ に対して，以下のように定義される集合 $\partial f(x) \subseteq \Re^n$ を f の点 x における劣微分という．

$$\partial f(x) = \{\xi \in \Re^n \mid f(y) - f(x) \geq \langle \xi, y - x \rangle\ (\forall y \in \Re^n)\}$$

劣微分写像とは，任意の点 $x \in \Re^n$ に関数 f の劣微分 $\partial f(x)$ を対応させる点-集合写像である．

点-集合写像 $\mathcal{F} : \Re^m \to \mathcal{P}(\Re^m)$ と集合 S を次のように定義すると，ロバスト Nash 均衡問題は GVIP(7) と等価になる．

$$\mathcal{F}(x) := \left(\partial_i \tilde{f}_i(x^i, x^{-i})\right)_{i=1,\dots,N} \tag{8}$$
$$S := S_1 \times \cdots \times S_N$$

ここで，$\partial_i \tilde{f}_i$ は，プレイヤー i の戦略 x^i のみを変数と見たときの関数 $\tilde{f}_i$ の劣微分 $\partial_{x^i} \tilde{f}_i$ を意味している．

仮定 1 が成り立つとき，定理 3.1 よりロバスト Nash 均衡解が存在するので，それと等価な GVIP(7) にも解が存在する．したがって，定理 4.3 より，(8) で定義される点-集合写像 $\mathcal{F}$ が狭義単調であれば，ロバスト Nash 均衡解は一意に存在することがわかる．

次に，$\mathcal{F}$ が狭義単調となるための条件を与える．仮定 1 に加えて，次の仮定を満たす場合を考える．

仮定 2.

(a) 集合 U_i は唯一の要素からなる．
(b) コンパクト集合 $Y_{-i} \subseteq \Re^{m_{-i}}$ が存在して，$X_{-i}(x^{-i}) = x^{-i} + Y_{-i}$ と書ける．
(c) 任意に x^i を固定した関数 $f_i^{u^i}(x^i, \cdot) : \Re^{m_{-i}} \to \Re$ はアフィンである．すなわち，ある関数 $g_i : \Re^{m_i} \to \Re$，$h_i : \Re^{m_i} \to \Re^{m_{-i}}$ が存在して，$f_i^{u^i}(x^i, y^{-i}) := g_i(x^i) + h_i(x^i)^T y^{-i}$ と書ける．さらに，任意の $y^{-i} \in Y_{-i}$ に対して，$\theta_i(x^i) := h(x^i)^T y^{-i}$ で定義される関数 θ_i は S_i 上で凸である．

仮定 2(a) より，本節では，関数 $f_i^{u^i}$ $(i = 1, \dots, N)$ を単に f_i と書くことにする．また，仮定 2(b)(c) より，

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) &= \max_{\hat{x}^{-i} \in X_{-i}(x^{-i})} f_i(x^i, \hat{x}^{-i}) \\ &= \max_{\delta x^{-i} \in Y_{-i}} f_i(x^i, x^{-i} + \delta x^{-i}) \\ &= f_i(x^i, x^{-i}) + \max_{\delta x^{-i} \in Y_{-i}} h_i(x^i)^T \delta x^{-i} \end{aligned} \tag{9}$$

と書くことができる．

補題 4.1. 仮定 2 が成り立っているとする．このとき，F が狭義単調であれば，(8) で定義される点-集合写像 $\mathcal{F}$ も狭義単調である．

証明. $\psi_i(x^i) := \max_{\delta x^{-i} \in Y_{-i}} h_i(x^i)^T \delta x^{-i}$ とおく．このとき，(9) より，$\tilde{f}_i$ の x^i についての劣微分は以下で表される．

$$\partial_i \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) = \nabla_i f_i(x^i, x^{-i}) + \partial \psi_i(x^i)$$

また，$\mathcal{F}(x)$ は以下で表される．

$$\mathcal{F}(x) = F(x) + \partial \psi_1(x^1) \times \cdots \times \partial \psi_N(x^N)$$

関数 ψ_i は，仮定 2(c) より凸であるから，その劣微分写像 $\partial \psi_i$ は S_i 上で単調である [9, 定理 2.68]．すなわち，任意の $x^i, y^i \in S_i$ と $\tilde{\xi}^i \in \partial \psi_i(x^i), \tilde{\eta}^i \in \partial \psi_i(y^i)$ に対して，

$$\langle x^i - y^i, \tilde{\xi}^i - \tilde{\eta}^i \rangle \geq 0$$

が成り立つ．よって，任意の $x, y \in S$ と $\xi \in \mathcal{F}(x), \eta \in \mathcal{F}(y)$ に対して，

$$\langle x - y, \xi - \eta \rangle = \langle x - y, F(x) - F(y) \rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle x^i - y^i, \tilde{\xi}^i - \tilde{\eta}^i \rangle > 0$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{F}$ は狭義単調である． □

以上の補題より，ロバスト Nash 均衡解の一意性に関する次の定理を得る．

定理 4.4. 仮定 1 および仮定 2 が成り立つとする．このとき，(6) で定義される F が狭義単調であれば，ロバスト Nash 均衡解は一意に存在する．

証明. 仮定 1 と定理 3.1 より，ロバスト Nash 均衡解は存在する．さらに，補題 4.3，補題 4.1 により，ロバスト Nash 均衡解は一意である． □

5 ロバスト Nash 均衡問題の二次錐相補性問題への定式化

本節では，各プレイヤーが混合戦略をとり，各々のコスト関数が自分の戦略に関する凸 2 次関数で表されるゲームを考える．特に，コスト関数のパラメータや相手の戦略の評価値に対する不確実性集合がユークリッドノルムやフロベニウスノルムを用いて表せるようなある種のゲームに対して，ロバスト Nash 均衡問題が二次錐相補性問題（SOCCP）として定式化できることを示し，その解の存在性や一意性を議論する．

一般に，SOCCP とは次の条件を満たすベクトル $(\xi, \eta, \zeta) \in \Re^l \times \Re^l \times \Re^\nu$ を求める問題である．

$$\mathcal{K} \ni \xi \perp \eta \in \mathcal{K}, \quad G(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{10}$$

ただし，$G : \Re^l \times \Re^l \times \Re^\nu \to \Re^l \times \Re^\nu$ は与えられた関数であり，$\xi \perp \eta$ は，$\xi^T \eta = 0$ を意味する．また，$\mathcal{K}$ は，$\mathcal{K}^{l_j} = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Re \times \Re^{l_j - 1} \mid \|\zeta_2\| \leq \zeta_1\}$ で定義される l_j 次元の二次錐 $\mathcal{K}^{l_j}$ を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{l_1} \times \mathcal{K}^{l_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{l_m}$ で定義される閉凸錐である．SOCCP に対しては，平滑化法や再定式化法などのアルゴリズムが提案されている [10]．本報告書では，特に次の二次錐相補性条件を満たすベクトル ζ を求める問題を考える．

$$\mathcal{K} \ni M\zeta + q \perp N\zeta + r \in \mathcal{K}, \quad C\zeta = d \tag{11}$$

ここで，$\zeta \in \Re^{l+\tau}$ は変数で，$M, N \in \Re^{l \times (l+\tau)}$，$q, r \in \Re^l, C \in \Re^{\tau \times (l+\tau)}, d \in \Re^\tau$ は定数である．新しい変数 $\xi, \eta \in \Re^l$ を用いて，次のように関数 $G : \Re^{3l+\tau} \to \Re^{2l+\tau}$ を定義すれば，SOCCP(11) は SOCCP(10) と等価である．

$$G(\xi, \eta, \zeta) := \begin{bmatrix} \xi - M\zeta - q \\ \eta - N\zeta - r \\ C\zeta - d \end{bmatrix}$$

本節では，各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ のコスト関数 f_i が行列 $A_i \in \Re^{m_i \times m_i}, B_{ij} \in \Re^{m_i \times m_j}$，および，ベクトル $c^i \in \Re^{m_i}$ を用いて，

$$\begin{aligned} f_i(x^i, x^{-i}) &= \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{N} B_{ij} x^j + c^i \right) \qquad (12) \\ &= \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T (B_i x^{-i} + c^i) \end{aligned}$$

と表される場合を考える．ここで，$B_i \in \Re^{m_i \times m_{-i}}$ は

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} & \cdots & B_{i(i-1)} & B_{i(i+1)} & \cdots & B_{iN} \end{bmatrix}$$

を表す．以下では，行列 A_i は半正定値であるとし，戦略は混合戦略，すなわち戦略集合 S_{-i} が

$$S_i = \{x^i \mid x^i \geq 0,\ e_{m_i}^T x^i = 1\} \tag{13}$$

と表される場合を考える．ただし，$e_{m_i} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \Re^{m_i}$ である．このとき，S_i は空でないコンパクト凸集合であることに注意する．また，2 節で用いたコスト関数のパラメータ u^i は $\mathrm{vec}(A_i), \mathrm{vec}(B_{ij}), j = 1, \ldots, N, j \neq i$ および c^i を並べたベクトルと見なすことができる．ここで $\mathrm{vec}(\cdot)$ は m 個の列ベクトル $p_1^c, \ldots, p_m^c$ からなる行列 $P \in \Re^{n \times m}$ から nm-次元のベクトル $((p_1^c)^T, \ldots, (p_m^c)^T)^T$ を生成するオペレーターである．

5.1 相手の戦略の評価に不確実性がある場合

この節では，各プレイヤーがコスト関数の値を計算するときに，その関数に含まれるパラメータは正確に推定できるが，$N-1$ 人の相手プレイヤーの戦略の評価値が不確実性を含む場合を考える．そこで，すべての $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，次の仮定をおく．

仮定 3.

(a) $X_{-i}(x^{-i}) = \{x^{-i} + \delta x^{-i} \mid \|\delta x^j\| \leq \rho_{ij},\ e_{m_j}^T \delta x^j = 0\ (j \neq i)\}$
(b) $U_i = \{u^i\}$

仮定 3(a) において，条件 $e_{m_j}^T \delta x^j = 0$ は，$e_{m_j}^T (x^j + \delta x^j) = 1$ かつ $e_{m_j}^T x^j = 1$ による．また，$\rho_{ij} (i, j = 1, 2, \ldots, N, j \neq i)$ は与えられた非負の実数である．

この仮定の下で，次の定理が成り立つ．

定理 5.1. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (12) と (13) で与えられ，仮定 3 が成り立つとする．このとき，ロバスト Nash 均衡解が少なくとも一つ存在する．

証明. コスト関数が (12) で与えられているので，仮定 1(a) は成り立つ．また，仮定 3 が成り立つとき，仮定 1(b)(c) が成り立つことは明らかである．さらに仮定 1(d) は，$A_i \succeq O$ および混合戦略であることから成り立つ．よって，仮定 1 をすべて満たすので，定理 3.1 よりロバスト Nash 均衡解が存在する． □

さらに，解の一意性に関して，次の定理が成り立つ．

定理 5.2. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (12) と (13) で与えられ，仮定 3 が成り立つとする．そのとき，

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & \cdots & \cdots & A_N \end{bmatrix} \succ O \tag{14}$$

が成り立つならばロバスト Nash 均衡解は一意である．

証明. 仮定 3(b) より，仮定 2(a) が成り立つ．仮定 3(a) より，$Y_{-i} = \{\delta x^{-i} \mid \|\delta x^j\| \le \rho_{ij}, e_{m_j}^T \delta x^j = 0,\ (j \ne i)\}$ であるから，仮定 2(b) も成り立つ．また，コスト関数が (12) で与えられるので，仮定 2(c) も成り立つ．任意の $x \in S$ に対して，

$$\nabla F(x)^T = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & \cdots & \cdots & A_N \end{bmatrix} \quad \text{（定数）}$$

であるから，(14) が成り立つとき，定理 4.2 より F は S 上で狭義単調である．よって定理 4.4 よりロバスト Nash 均衡解が一意であることがいえる． □

次に，ロバスト Nash 均衡問題が，SOCCP(11) に再定式化できることを示す．仮定 3 の下で，プレイヤー i が解くべき最小化問題 (3) は次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i}{\text{minimize}} & \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) \\ \text{subject to} & x^i \ge 0, \quad e_{m_i}^T x^i = 1 \end{array} \tag{15}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) &= \max\left\{ \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T (B_i(x^{-i} + \delta x^{-i}) + c^i) \;\middle|\; \|\delta x^j\| \le \rho_{ij}, e_{m_j}^T \delta x^j = 0\ (j \ne i) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T (B_i x^{-i} + c^i) + \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \max\{(x^i)^T B_{ij} \delta x^j \mid \|\delta x^j\| \le \rho_{ij}, e_{m_j}^T \delta x^j = 0\} \end{aligned}$$

である．さらに，上式の右辺第 2 項で，$(x^i)^T B_{ij} \delta x^j$ を最大化するベクトルは，$B_{ij}^T x^i$ を超平面 $\pi_j := \{x^j \mid e_{m_j}^T x^j = 0\}$ 上に射影したベクトル $(I_{m_j} - m_j^{-1} e_{m_j} e_{m_j}^T) B_{ij}^T x^i$ を大きさが ρ_{ij} に等しくなるよう定数倍することにより得られる．よって，

$$\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) = \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T (B_i x^{-i} + c^i) + \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \rho_{ij} \|\tilde{B}_{ij}^T x^i\|$$

を得る．ここで，$\tilde{B}_{ij} = B_{ij}(I_{m_j} - m_j^{-1} e_{m_j} e_{m_j}^T)$ である．さらに，補助変数 $y_{ij} \in \Re$ を用いると，最小化問題 (15) は次の二次錐計画問題（SOCP）に書きかえられる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^i, y_{ij}}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + (x^i)^T (B_i x^{-i} + c^i) + \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \rho_{ij} y_{ij} \\ \text{subject to} & \|\tilde{B}_{ij}^T x^i\| \le y_{ij}\ (j = 1, 2, \ldots, N,\ j \ne i), \quad x^i \ge 0, \quad e_{m_i}^T x^i = 1 \end{array} \tag{16}$$

SOCP(16) に対する KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件は次の SOCCP として表せる．

$$\mathcal{K}^{m_j+1} \ni \begin{bmatrix} \mu_{ij} \\ \lambda^{ij} \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{ij}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ij} \\ x^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}\ (j = 1, 2, \ldots, N,\ j \ne i)$$

$$\Re_+^{m_i} \ni x^i \perp A_i x^i + \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \left(B_{ij} x^j - \tilde{B}_{ij} \lambda^{ij} \right) + c^i + e_{m_i} s_i \in \Re_+^{m_i}, \quad e_{m_i}^T x^i = 1$$

$$\mu_{ij} = \rho_{ij}\ (j = 1, \ldots, N,\ j \ne i)$$

ここで，$\lambda^{ij} \in \Re^{m_j}, s_i \in \Re$ はラグランジュ乗数で，$\mu_{ij} \in \Re$ は補助変数である．ロバスト Nash 均衡解では，各プレイヤー i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ についての KKT 条件が同時に成り立つので，変数や定数を以下のように置き換えることによって，ロバスト Nash 均衡問題を SOCCP(11) に再定式化できる:

$$l = N(m + N - 1),\ \tau = N(N + 1),\ \mathcal{K} = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \mathcal{K}^{m_j+1} \times \prod_{i=1}^{N} \Re_{+}^{m_i}$$

$$\zeta = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ x^1 \\ \vdots \\ y_N \\ x^N \\ \hline \Lambda^1 \\ \vdots \\ \Lambda_N \\ \hline s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{array}\right],\ M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & 0 \\ M_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ q = 0$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \end{bmatrix},\ r = \begin{bmatrix} 0 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \end{bmatrix},\ d = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_N \end{array}\right]$$

ここで，$i = 1, \ldots, N$ に対して，

$$y_i = (y_{ij})_{j=1,\ldots,N, j\neq i} \in \Re^{N-1}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \mu_{ij} \\ \lambda_{ij} \end{bmatrix}_{j=1,\ldots,N, j\neq i} \in \Re^{m_{-i}+N-1}$$

$$\rho_i = (\rho_{ij})_{j=1,\ldots,N, j\neq i} \in \Re^{N-1}, \quad r_2 = (c^i)_{i=1,\ldots,N} \in \Re^{m}$$

である．また，N_{21} はブロック行列であり，その (i, j) ブロック成分は，

$$(N_{21})_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & A_i \end{bmatrix} \in \Re^{m_i \times (m_i+N-1)} & (i = j) \\ \begin{bmatrix} 0 & B_{ij} \end{bmatrix} \in \Re^{m_i \times (m_j+N-1)} & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, N)$$

である．さらに，$M_{12}, M_{21}, N_{11}, N_{22}, N_{23}, C_{11}, C_{22}$ はブロック対角行列であり，その対角成分は

$$
(M_{12})_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & I_{m_1} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & I_{m_{i-1}} & & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & I_{m_{i+1}} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & I_{m_N} \end{bmatrix} \in \Re^{(m_{-i}+N-1)\times(m_{-i}+N-1)},
$$

$$
(M_{21})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_i} \end{bmatrix} \in \Re^{m_i \times (m_i+N-1)}
$$

$$
(N_{11})_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B}_{i1}^T \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B}_{i2}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B}_{iN}^T \end{bmatrix} \in \Re^{m_{-i}+N-1\times(m_i+N-1)}
$$

$$
(N_{22})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{B}_{i1} & \cdots & 0 & -\tilde{B}_{iN} \end{bmatrix} \in \Re^{m_i \times (m_{-i}+N-1)}, \quad (N_{23})_{ii} = e_{m_i} \in \Re^{m_i}
$$

$$
(C_{11})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & e_{m_i}^T \end{bmatrix} \in \Re^{1\times(m_i+1)}
$$

$$
(C_{22})_{ii} = \Gamma_i \in \Re^{N-1\times(m_{-i}+1)}, \quad (\Gamma_i)_{jj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{1\times(m_j+1)} \ (j = 1, \ldots, N, \ j \neq i)
$$

である．ただし，$i = 1, \ldots, N$ である．

5.2 コスト関数に不確実性がある場合

次に，各プレイヤーのコスト関数に含まれるパラメータのみに不確実性がある場合を考える．すべての $i \in \{1, \ldots, N\}$ に対して，次の仮定をおく．

仮定 4.

(a) $X_{-i}(x^{-i}) = \{x^{-i}\}$

(b) $U_i = D_{A_i} \times \prod_{j=1, j\neq i}^{N} D_{B_{ij}} \times D_{c^i}$

ここで，$D_{A_i} := \{A_i + \delta A_i \in \Re^{m_i\times m_i} \mid \|\delta A_i\|_F \leq \rho_{A_i}\}$，$D_{B_{ij}} := \{B_{ij} + \delta B_{ij} \in \Re^{m_i\times m_j} \mid \|\delta B_{ij}\|_F \leq \rho_{B_{ij}}\}$, $D_{c^i} := \{c^i + \delta c^i \in \Re^{m_i} \mid \|\delta c^i\| \leq \rho_{c^i}\}$ であり，$\rho_{A_i}, \rho_{B_{ij}}, \rho_{c^i} (i, j = 1, \ldots, N, j \neq i)$ は与えられた非負の実数である．

仮定 4 の下で，関数 $\tilde{f}_i$ は以下のように陽に書くことができる．

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) &= \max_{\substack{\hat{A}_i \in D_{A_i}, \hat{B}_{ij} \in D_{B_{ij}}, \hat{c}^i \in D_{c^i} \\ j=1,\dots,N, j \neq i}} \left\{ \frac{1}{2}(x^i)^T \hat{A}_i x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (x^i)^T \hat{B}_{ij} x^j + (\hat{c}^i)^T x^i \right\} \\
&= \frac{1}{2}(x^i)^T A_i x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (x^i)^T B_{ij} x^j + (c^i)^T x^i \\
&\qquad + \max_{\substack{\|\delta A_i\|_F \le \rho_{A_i} \\ \|\delta B_{ij}\|_F \le \rho_{B_{ij}} \\ j=1,\dots,N, j\neq i}} \left\{ \frac{1}{2}(x^i)^T \delta A_i x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (x^i)^T \delta B_{ij} x^j \right\} + \max_{\|\delta c^i\| \le \rho_{c^i}} \{(\delta c^i)^T x^i\} \\
&= \frac{1}{2}(x^i)^T (A_i + \rho_{A_i} I) x^i + (c^i)^T x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left((x^i)^T B_{ij} x^j + \rho_{B_{ij}} \|x^i\| \|x^j\| \right) + \rho_{c^i} \|x^i\| \qquad (17)
\end{aligned}$$

ここで，最後の等式は，任意の $y \in \Re^n, z \in \Re^m, \rho \geq 0$ に対して，

$$\max_{\|M\| \le \rho} y^T M z = \max_{\|M\| \le \rho} (z \otimes y)^T \mathrm{vec}\,(M) = \|z \otimes y\| \rho = \rho \|y\| \|z\|$$

が成り立つことより従う．なお，$\otimes$ はクロネッカー積を表す [12, Sections 4.2 and 4.3].

定理 5.3. 各プレイヤーのコスト関数と戦略集合がそれぞれ (12) と (13) で与えられ，仮定 4 が成り立つとする．このとき，ロバスト Nash 均衡解が少なくとも一つ存在する．

証明. 仮定 4 が成り立つとき，$\tilde{f}_i$ は (17) によって陽に表される．さらに，$A_i \succeq O$ かつ $\rho_{A_i} \geq 0$ であるから，関数 $\tilde{f}_i(\cdot, x^{-i})$ は凸である．よって補題 3.2 より，本定理を得る． □

本定理では，3 節で議論したロバスト Nash 均衡解が存在するための仮定のうち，仮定 1(d) は必ずしも満たさなくてもよいことに注意する．実際，$A_i \succeq O$ であっても $A_i + \delta A_i \succeq O$ とは限らないので，任意の δA_i に対して，$x^{-i} \in S_{-i}$ を任意に固定した関数 $f_i^{u^i}(\cdot, x^{-i})$ は凸であるとは限らない．

次に，仮定 4 の下で，ロバスト Nash 均衡問題が SOCCP(11) に再定式化できることを示す．仮定 4 の下で，プレイヤー i が解くべき最小化問題 (3) は次のようになる．

$$\begin{array}{ll}
\underset{x^i}{\text{minimize}} & \tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) \\
\text{subject to} & x^i \geq 0, \quad e_{m_i}^T x^i = 1
\end{array} \qquad (18)$$

ここで，$\tilde{f}_i$ は (17) 式で表されるので，補助変数 $y_i \in \Re$ を用いると，最小化問題 (18) は次の SOCP に書きかえられる．

$$\begin{array}{ll}
\underset{x^i, y_i}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^i)^T (A_i + \rho_{A_i} I) x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left((x^i)^T B_{ij} x^j + \rho_{B_{ij}} \|x^j\| y_i \right) + \rho_{c^i} y_i \\
\text{subject to} & \|x^i\| \le y_i, \quad x^i \geq 0, \quad e_{m_i}^T x^i = 1
\end{array} \qquad (19)$$

さらに，SOCP(19) に対する KKT 条件は次式で表される．

$$\begin{gathered}
\mathcal{K}^{m_i+1} \ni \begin{bmatrix} y_i \\ x^i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \rho_{B_{ij}} \|x^j\| + \rho_{c^i} \\ (A_i + \rho_{A_i} I) x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} B_{ij} x^j + e_{m_i} s_i - \lambda^i + c^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_i+1} \\
\Re_+^{m_i} \ni \lambda^i \perp x^i \in \Re_+^{m_i}, \quad e_{m_i}^T x^i = 1
\end{gathered} \qquad (20)$$

ただし, $\lambda^i \in \Re^{m_i}, s_i \in \Re$ はラグランジュ乗数である．ロバスト Nash 均衡解では, 各プレイヤー $i \in \{1, \ldots, N\}$ についての KKT 条件が同時に成り立つが，(20) は $\|x^j\|$ を含んでいるので，このままでは，SOCCP(11) の形には直せない．そこで，補助変数 $z_j \in \Re, u^j \in \Re^{m_j}$ を用いて次の SOCCP に書き直す．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}^{m_i+1} \ni \begin{bmatrix} y_i \\ x^i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \rho_{B_{ij}} z_j + \rho_{c^i} \\ (A_i + \rho_{A_i} I)x^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} B_{ij} x^j + e_{m_i} s_i - \lambda^i + c^i \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_i+1}, \quad e_{m_i}^T x^i = 1 \\
&\Re_+^{m_i} \ni \lambda^i \perp x^i \in \Re_+^{m_i}, \quad \mathcal{K}^{m_j+1} \ni \begin{bmatrix} z_j \\ x^j \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1} \ (j = 1, \ldots, N, j \neq i)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

次の理由により，(20) と (21) は等価であることがわかる．まず，(21) 中の相補性条件

$$
\mathcal{K}^{m_j+1} \ni \begin{bmatrix} z_j \\ x^j \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1} \tag{22}
$$

が成り立つとする．このとき，$\begin{bmatrix} z_j \\ x^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}$ であるから，$\|x^j\| \le z_j$ である．一方，(22) の相補性条件と Cauchy-Schwarz の不等式，及び $\begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}$ から，

$$
0 = z_j y_j + (x^j)^T u^j \ge z_j y_j - \|x^j\|\|u^j\| \ge z_j y_j - \|x^j\| y_j \tag{23}
$$

が成り立つ．さらに，$\begin{bmatrix} y_j \\ x^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}$ と $e_{m_j}^T x^j = 1$ より，$y_j > 0$ であるから，$\|x^j\| \ge z_j$ である．よって，条件 (22) が成り立つならば，$\|x^j\| = z_j$ である．したがって，(21) ならば (20) である．逆に，(20) が成り立つならば，(20) を満たす x^j, y_j $(j = 1, \ldots, N, j \neq i)$ に対して，

$$
z_j := \|x^j\|, \quad u^j := -\frac{x^j y_j}{\|x^j\|}
$$

とおくと，

$$
\begin{bmatrix} z_j \\ x^j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} = z_j y_j + (x^j)^T u^j = \|x^j\| y^j - (x^j)^T \frac{(x^j y_j)}{\|x^j\|} = 0
$$

さらに，$y_j - \|u^j\| = 0$ なので，$\begin{bmatrix} y_j \\ u^j \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^{m_j+1}$ である．よって，(21) が成り立つ．

以上のことより，仮定 4 が成り立つならば，変数や定数を以下のように置き換えることによって，ロバスト Nash 均衡問題は，SOCCP(11) に再定式化できる:

$$
l = 3m + 2N, \ \tau = N, \ \mathcal{K} = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{K}^{m_i+1} \times \prod_{i=1}^{N} \Re_+^{m_i} \times \prod_{i=1}^{N} \mathcal{K}^{m_i+1}
$$

$$
\zeta = \begin{bmatrix} y_1 \\ x^1 \\ z_1 \\ u^1 \\ \vdots \\ y_N \\ x^N \\ z_N \\ u^N \\ \hline \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \\ \hline s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ M_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = 0
$$

$$
N = \left[\begin{array}{c|c|c} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & 0 & 0 \\ N_{31} & 0 & 0 \end{array}\right], \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & e_{m_1}^T & 0 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & e_{m_N}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

ここで，N_{11} はブロック行列で，その (i, j) 成分は

$$
(N_{11})_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_i + \rho_{A_i} I & 0 & 0 \end{bmatrix} (i = j) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_{B_{ij}} & 0 \\ 0 & B_{ij} & 0 & 0 \end{bmatrix} (i \neq j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, N)
$$

また，$M_{11}, M_{22}, M_{31}, N_{12}, N_{13}, N_{21}, N_{31}$ はブロック対角行列であり，それらの対角要素は

$$
(M_{11})_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{(m_i+1)\times 2(m_i+1)}, \quad (M_{22})_{ii} = I_{m_i}
$$

$$
(M_{31})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & I_{m_i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re^{(m_i+1)\times 2(m_i+1)}
$$

$$
(N_{12})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{m_i} \end{bmatrix}, \quad (N_{13})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{m_i} \end{bmatrix}
$$

$$
(N_{21})_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (N_{31})_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_i} \end{bmatrix}
$$

である．ただし，$r_1 = \begin{bmatrix} \rho_{c^i} \\ c^i \end{bmatrix}_{i=1,\ldots,N} \in \Re^{m_i+1}$ である．

6　数値実験

本節では，具体的なゲームに対して前節で議論した二つのケースを考え，それらに対するロバスト Nash 均衡解を計算する．このとき，等価に再定式化した二次錐相補性問題 (SOCCP) は，[10] で提案されている平滑化法を元にしたアルゴリズムで解く．さらに，得られた計算結果を用いて，ロバスト Nash 均衡解の性質を議論する．6.1 節では，各プレイヤーが考慮する不確実性集合の大きさが異なるとき，その違いがロバスト Nash 均衡解と実際のコスト関数値にどのような影響をもたらすかを調べる．6.2 節では，不確実性集合の大

きさを変化させていったとき，ロバスト Nash 均衡解がどのように変化するかを調べる．なお，本実験では，3.06GHz の CPU と 1GB のメモリをもつ計算機上で行い，アルゴリズムは MATLAB 7 を用いて実装した．

6.1 ロバスト Nash 均衡解とコスト関数値の関係

本実験では，プレイヤーの数が 3 人で，コスト関数が (12) で表されるゲームを考える．また，コスト関数を構成する行列とベクトルは次で与えられるものとする．

$$A_i = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & -2 \\ -4 & -2 & 13 \end{bmatrix},\ B_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ c^i = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3,\ j \neq i)$$

すなわち，各プレイヤーは同じコスト関数をもつ．

まず，戦略の評価のみに不確実性がある場合，すなわち，不確実性集合 $X_{-i}(x^{-i})$ と U_i が仮定 3 を満たす場合を考える．ここで，$\rho_{ij}(i, j = 1, 2, 3,\ j \neq i)$ は次のように設定する．

$$(\rho_{ij}) = \begin{bmatrix} * & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.02 & * & 0.02 \\ 0.05 & 0.05 & * \end{bmatrix} \tag{24}$$

すなわち，プレイヤー 1 は不確実性をほとんど考慮に入れないプレイヤー，プレイヤー 3 は不確実性を十分考慮に入れた「慎重」なプレイヤー，プレイヤー 2 は，プレイヤー 1 と 3 の中間のタイプのプレイヤーである．このとき，ロバスト Nash 均衡解は

$$\tilde{x}^1 = (0.310, 0.318, 0.372),\ \tilde{x}^2 = (0.353, 0.284, 0.363),\ \tilde{x}^3 = (0.410, 0.240, 0.350)$$

となる．一方で，実際に各プレイヤーにかかるコストは，$f_i^{u^i}(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i} + \delta x^{-i})$ のように，δx^{-i} の「ずれ」を含んだ形で評価されることに注意する．本実験では，ベクトル $\delta x^{-i} = (\delta x_1^j, \delta x_2^j, \delta x_3^j)_{j=1, j\neq i}^3$ は，次のように生成する．まず，各 $j \neq i$ に対して，平均 0，分散 0.01 の正規分布に従う乱数 λ_1^j, λ_2^j を生成する．そして，ベクトル $(\lambda_1^j, \lambda_2^j, 0)$ に対して大きさを変えない適当な線形変換を施すことにより，平面 $\{x \in \Re^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ 上に移す．このようにしてできたベクトルを $(\delta x_1^j, \delta x_2^j, \delta x_3^j)$ とする．以上の方法で δx^{-i} を 10000 回発生させ，コスト関数値 $f_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^i + \delta x^i)$ の分布を調べた．さらに，それらの値と想定した最悪ケースのコスト関数値 $\tilde{f}_i(\tilde{x})$ とを比較した．得られた結果を以下の表と図に示す．表 1 は，想定した最悪ケースのコスト関数値 $\tilde{f}_i(\tilde{x})$，各プレイヤーのコスト関数値の平均，および $(f_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i} + \delta x^{-i}) \geq \tilde{f}_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i}))$ となる割合をまとめたものである．また，図 1〜3 は，各プレイヤーのコスト関数値の分布を表す．ここで横軸はコスト関数値（刻み幅 0.1）を表し，縦軸は 10000 回の試行における頻度を表す．また，赤の縦線は，想定した最悪ケースのコスト関数値 $\tilde{f}_i(\tilde{x})$ を表す．

表 1 より，不確実性を殆ど考慮に入れなかったプレイヤー 1 の方が，不確実性を考慮に入れたプレイヤー 3 よりも実際にかかるコストの平均値が小さいことがわかる．しかし，このことはすべてのゲームにおいて言えるわけではなく，考えるゲームによっては，逆に不確実性を考慮に入れたプレイヤーの方がコストの平均値が低くなることもある．しかし，不確実性を十分に考慮すればするほど，事前に想定した最悪ケースをさけられる可能性は高くなる．実際，度数分布を見ると分かるように，不確実性をほとんど考慮しなかったプレイヤー 1 は，想定したコスト関数値 $\tilde{f}_1(\tilde{x})$ よりも 0.5 以上悪くなる場合がある．一方で，不確実性を十分に考慮した

プレイヤー 3 は，想定した最悪ケースのコスト $\tilde{f}_3(\tilde{x})$ よりも実際のコストが上回ることは，ほとんど無く．たとえ上回ったとしても，その値はわずかである．

表 1　戦略の評価のみに不確実性がある場合

	プレイヤー 1	プレイヤー 2	プレイヤー 3
$\tilde{f}_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i})$	-1.5105	-1.2782	-0.9680
$f_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i} + \delta x^{-i})$ の平均	-1.5087	-1.4316	-1.3346
悪くなった割合	50.98%	20.90%	0.63%

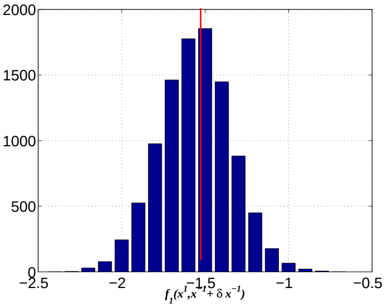

図 1　プレイヤー 1 のコストの度数分布

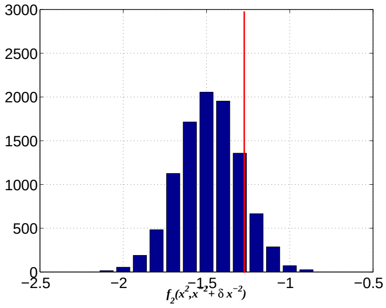

図 2　プレイヤー 2 のコストの度数分布

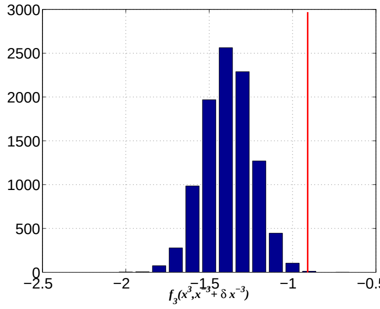

図 3　プレイヤー 3 のコストの度数分布

次に，コスト関数のみに不確実性がある場合，すなわち，不確実性集合 $X_{-i}(x^{-i})$ と U_i が仮定 4 を満たす場合を考える．ここで，$\rho_{A_i}, \rho_{B_{ij}}, \rho_{c^i}$ $(i, j = 1, 2, 3,\ j \neq i)$ は次で与えられるものとする．

$$\begin{bmatrix} \rho_{A_1} & \rho_{B_{12}} & \rho_{B_{13}} \\ \rho_{B_{21}} & \rho_{A_2} & \rho_{B_{23}} \\ \rho_{B_{31}} & \rho_{B_{32}} & \rho_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 1.50 & 1.50 & 1.50 \end{bmatrix},\ \rho_{c^1} = \rho_{c^2} = \rho_{c^3} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.50 \\ 1.50 \end{bmatrix} \tag{25}$$

このとき，ロバスト Nash 均衡解は，

$$\tilde{x}^1 = (0.364, 0.272, 0.365),\ \tilde{x}^2 = (0.344, 0.294, 0.362),\ \tilde{x}^3 = (0.334, 0.309, 0.358)$$

となる．さらに，前実験と同様，各成分が平均 0，分散 1 の正規分布に従う乱数行列および乱数ベクトル $\delta A_i, \delta B_{ij}, \delta c^i$ $(i, j = 1, 2, 3,\ j \neq i)$ を 10000 個発生させ，実際のコスト $f_i^{u^i + \delta u^i}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(x^i)^T(A_i + \delta A_i)x^i + (x^i)^T(\sum_{j=1, j\neq i}^{3}(B_{ij} + \delta B_{ij}) + (c^i + \delta c^i))$ と想定される最悪ケースのコスト $\tilde{f}_i(\tilde{x})$ を比較する．得られた結果を表 2 および図 4〜6 に示す．図 4〜6 における横軸のコスト関数の刻み幅は 0.2 である．

表と図を見ればわかるように，前実験の結果と同様，不確実性を十分に考慮したプレイヤー 3 は，想定した最悪ケースのコスト $\tilde{f}_3(\tilde{x})$ よりも実際のコストが上回ることはほとんど無かった．一方で，前実験とは逆に，実際にかかるコストの平均値は，プレイヤー 3 の方がプレイヤー 1 よりも低くなった．

表 2　コスト関数のみに不確実性がある場合

	プレイヤー 1	プレイヤー 2	プレイヤー 3
$\tilde{f}_i(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i})$	-1.3713	-0.9512	-0.0692
$f_i^{u^i+\delta u^i}(\tilde{x}^i, \tilde{x}^{-i})$ の平均	-1.3690	-1.3838	-1.4038
悪くなった割合	50.50%	28.54%	3.65%

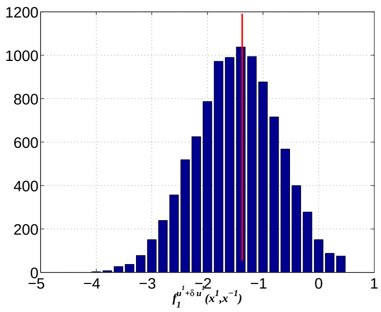

図 4　プレイヤー 1 のコストの度数分布

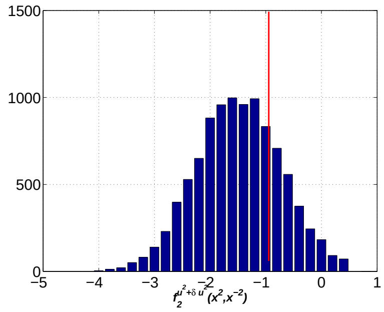

図 5　プレイヤー 2 のコストの度数分布

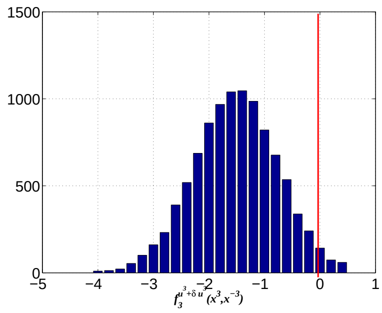

図 6　プレイヤー 3 のコストの度数分布

6.2　不確実性集合の大きさとロバスト Nash 均衡解の関係

本節では，不確実性集合の大きさを変化させたときに，ロバスト Nash 均衡解が変化するかを調べる．特に，一つめの実験では通常の Nash 均衡解が一意に存在するゲームを，二つめの実験では Nash 均衡解が複数存在するゲームを対象とする．

一つめの実験では，以下の行列とベクトルによって定義されるコスト関数 (12) を用いる．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 27 & -4 & 9 \\ -4 & 18 & 0 \\ 9 & 0 & 19 \end{bmatrix}, \; B_{1,2} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 13 \\ -3 & -10 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \; B_{1,3} = \begin{bmatrix} -10 & 6 & 10 \\ -19 & 0 & -7 \\ 12 & -10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{2,1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & -2 \\ 13 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 18 & -7 & 2 \\ -7 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 18 \end{bmatrix}, \; B_{2,3} = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 0 & 5 & 12 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_{3,1} = \begin{bmatrix} -7 & 17 & 10 \\ 7 & -4 & -13 \\ -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \; B_{3,2} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -13 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 24 & 9 & -17 \\ 9 & 28 & -5 \\ -17 & -5 & 31 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = c^2 = c^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

このとき，Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ は一意に存在し，

$$\bar{x}^1 = (0.0000, 0.4967, 0.5033),\; \bar{x}^2 = (0.7036, 0.0000, 0.2964),\; \bar{x}^3 = (0.0831, 0.4304, 0.4866)$$

である．さらに，ロバスト Nash 均衡解を計算するあたって，戦略の評価値のみに不確実性がある場合，すなわち，不確実性集合は U_i と $X_{-i}(x^{-i})$ $(i = 1, 2, 3)$ が，5.1 節の仮定 3 を満たすものを考える．ここで，パラ

メータはすべての $i, j = 1, 2, 3$ ($j \neq i$) に対して $\rho_{ij} = k$ とし，$k = 0.05, 0.1, 0.2$ の三つの場合を考える．それぞれの k に対してロバスト Nash 均衡解を計算した結果を以下の表と図に示す．表 3 は各 k に対して得られたロバスト Nash 均衡解を示したものである．また，図 7 は，不確実性集合が大きくなるにつれて，均衡解がどのように変化するかを各プレイヤーごとにプロットしたものである．出発点は Nash 均衡解を表し，矢印で順次結ばれている点が $k = 0.05, 0.1, 0.2$ のときのロバスト Nash 均衡解である．横軸は均衡解における各プレイヤーの戦略の第 1 成分，縦軸は同じく第 2 成分である*2．この図より，不確実性集合の大きさを少しずつ変えていくと，ロバスト Nash 均衡解が連続的に動いていく様子が伺える．

表 3　異なる k に対するロバスト Nash 均衡解

k	ロバスト Nash 均衡解 $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$
0.05	((0.0000,0.5230,0.4770), (0.6978,0.0283,0.2738), (0.0394,0.4938,0.4668))
0.10	((0.0000,0.5348,0.4652), (0.6659,0.0244,0.3097), (0.0677,0.4521,0.4802))
0.20	((0.0000,0.5396,0.4604), (0.6100,0.0228,0.3673), (0.1162,0.3812,0.5026))

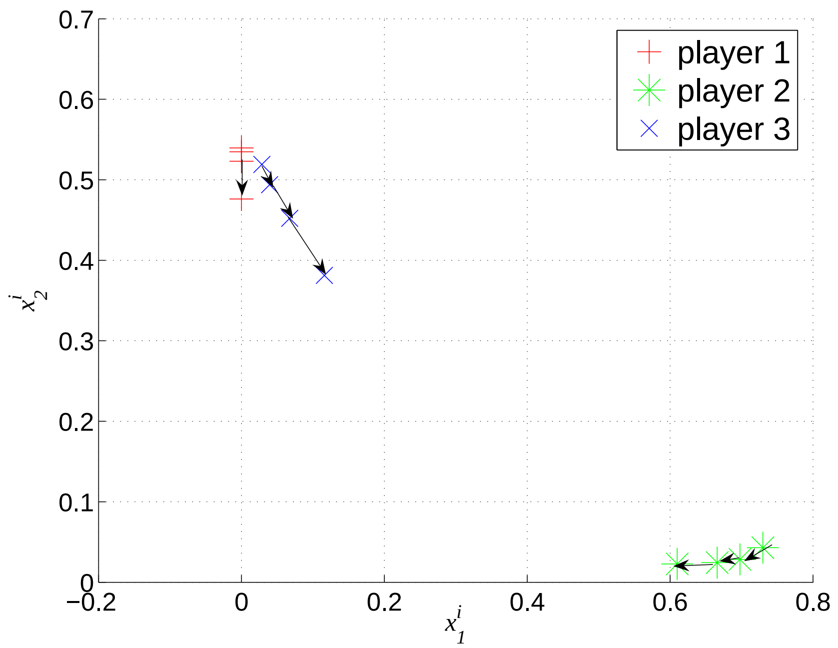

図 7　ロバスト Nash 均衡解における各プレイヤーの戦略の動き

*2 各プレイヤーは混合戦略をとるので，第 1 成分と第 2 成分が決まれば，第 3 成分は自動的に決まることに注意する．

二つめの実験では，以下の行列及びベクトルによって定義される (12) を用いる．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 12.486 & 1.249 & 5.650 \\ 1.249 & 2.516 & 4.361 \\ 5.650 & 4.361 & 13.980 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} -5.095 & -7.403 & -4.152 \\ -1.459 & -8.215 & -2.511 \\ -6.228 & -3.783 & -5.306 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} -8.250 & -8.514 & -7.015 \\ -8.178 & -2.222 & -1.091 \\ -2.004 & -5.367 & -4.486 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -7.236 & -2.175 & -5.223 \\ -1.980 & -7.579 & -3.141 \\ -3.180 & -4.678 & -1.155 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2.064 & 3.041 & 3.228 \\ 3.041 & 6.563 & 2.341 \\ 3.228 & 2.341 & 14.720 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} -5.420 & -1.153 & -1.514 \\ -4.874 & -6.610 & -3.609 \\ -7.741 & -7.763 & -5.577 \end{bmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} -2.338 & -2.981 & -6.197 \\ -7.629 & -4.076 & -4.096 \\ -5.475 & -6.967 & -6.298 \end{bmatrix}, B_{32} = \begin{bmatrix} -3.912 & -3.988 & -1.043 \\ -4.867 & -1.407 & -1.981 \\ -4.844 & -7.212 & -3.992 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 34.478 & -13.084 & -1.478 \\ -13.084 & 17.336 & -1.243 \\ -1.478 & -1.243 & 20.047 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = c^2 = c^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

このゲームに対して，次の三つの Nash 均衡解 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ が存在する[*3]．

解 1: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) =$((0.7152, 0.0108, 0.2739)，(1.0000, 0.0000, 0.0000)，(0.2337, 0.5006, 0.2658))，

解 2: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) =$((0.6714, 0.3040, 0.0246)，(0.5958, 0.2082, 0.1960)，(0.2084, 0.4564, 0.3352))，

解 3: $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) =$((0.4896, 0.5104, 0.0000)，(0.0000, 0.6879, 0.3121)，(0.1952, 0.3596, 0.4432))

一方，ロバスト Nash 均衡問題を考えるにあたって，不確実性集合 U_i と $X_{-i}(x^{-i})$ $(i = 1, 2, 3)$ が，5.2 節の仮定 4 を満たすものとする．ここで，パラメータ $\rho_{A_i}, \rho_{B_{ij}}, \rho_{c^i}$ を次のように設定する．

$$\begin{bmatrix} \rho_{A_1} & \rho_{B_{12}} & \rho_{B_{13}} \\ \rho_{B_{21}} & \rho_{A_2} & \rho_{B_{21}} \\ \rho_{B_{31}} & \rho_{B_{32}} & \rho_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01+k & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01+k & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01+k \end{bmatrix}, \quad \rho_{c^1} = \rho_{c^2} = \rho_{c^3} = 0$$

さらに，$k = 0.1, 0.5, 1.0, 1.1485, 1.5$ の五つの場合に対してロバスト Nash 均衡解を求める．なお，本実験では，できるだけ多くの均衡解を求めることができるよう，等価な SOCCP を解く際に，初期点[*4]をランダムに 100 個とって，得られたすべての解を出力する．その結果を以下の表と図に示す．表 4 は各 k に対して得られたロバスト Nash 均衡解をまとめたものである．また，図 8〜10 は，不確実性集合が大きくなるとき，均衡解がどのように変化するかを各プレイヤーごとにプロットしたものである．出発点が Nash 均衡解であり，次いで矢印で順に結ばれているのが，$k = 0.1, 0.5, 1.0, 1.1485, 1.5$ のときのロバスト Nash 均衡解である．横軸は戦略の第 1 成分，縦軸は同じく第 2 成分である．図 8〜10 より，三つの均衡解のうちの二つが k が大きくなるに従って，近づいていることがわかる．さらに，$k = 1.1485$ になると，二つの解がほぼ一致し，$k = 1.5$ のときはロバスト Nash 均衡解は一つしか得られなかった．

[*3] 本実験では，通常の Nash 均衡解を求める既存のアルゴリズムを用いて三つ見つかったが，四つ以上存在しないという理論的な保証があるわけではない

[*4] 本実験で用いた SOCCP を解くアルゴリズムは反復法を用いているため，初期点を指定することができる．実際，SOCCP が複数の解をもつときには，初期点を変えると異なる解に収束することが期待できる．

表 4　異なる k に対するロバスト Nash 均衡解

k	ロバスト Nash 均衡解 $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$
0.1	解 1: ((0.708, 0.020, 0.272), (1.000, 0.000, 0.000), (0.234, 0.499, 0.267))
	解 2: ((0.667, 0.294, 0.039), (0.608, 0.200, 0.193), (0.210, 0.457, 0.333))
	解 3: ((0.490, 0.510, 0.000), (0.000, 0.685, 0.315), (0.198, 0.360, 0.442))
0.5	解 1: ((0.684, 0.057, 0.259), (0.949, 0.0000, 0.051), (0.232, 0.491, 0.277))
	解 2: ((0.657, 0.252, 0.091), (0.660, 0.161, 0.179), (0.216, 0.460, 0.325))
	解 3: ((0.492, 0.508, 0.000), (0.000, 0.676, 0.324), (0.199, 0.363, 0.439))
1.0	解 1: ((0.658, 0.094, 0.249), (0.895, 0.000, 0.105), (0.231, 0.483, 0.286))
	解 2: ((0.650, 0.155, 0.195), (0.800, 0.059, 0.141), (0.226, 0.473, 0.301))
	解 3: ((0.493, 0.507, 0.000), (0.000, 0.666, 0.334), (0.201, 0.363, 0.436))
1.1485	解 1: (0.6507, 0.1026, 0.2467), (0.8810, 0.0000, 0.1190), (0.2312, 0.4807, 0.2881)
	解 2: (0.6507, 0.1027, 0.2466), (0.8809, 0.0001, 0.1190), (0.2312, 0.4807, 0.2881)
	解 3: (0.4937, 0.5063, 0.0000), (0.0000, 0.6637, 0.3363), (0.2015, 0.3635, 0.4350)
1.5	(0.507, 0.493, 0.000), (0.052, 0.619, 0.329), (0.204, 0.372, 0.425)

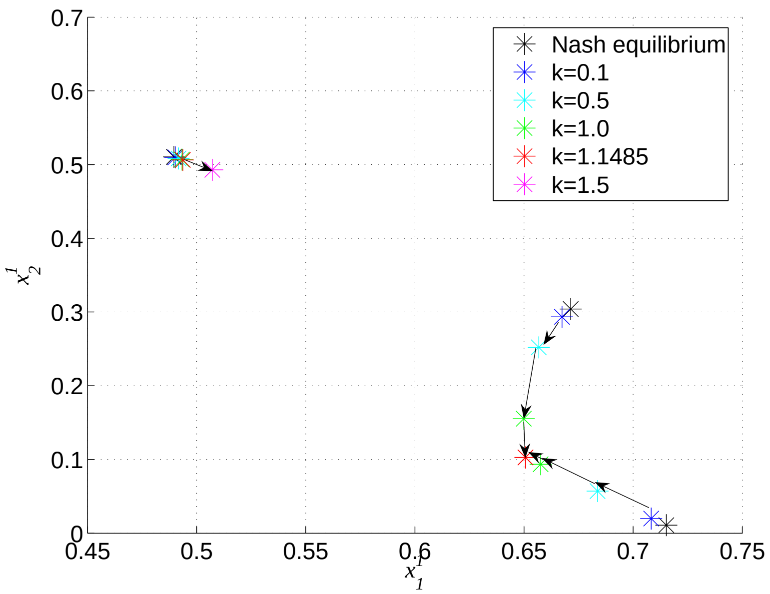

図 8　ロバスト Nash 均衡解におけるプレイヤー 1 の戦略の動き

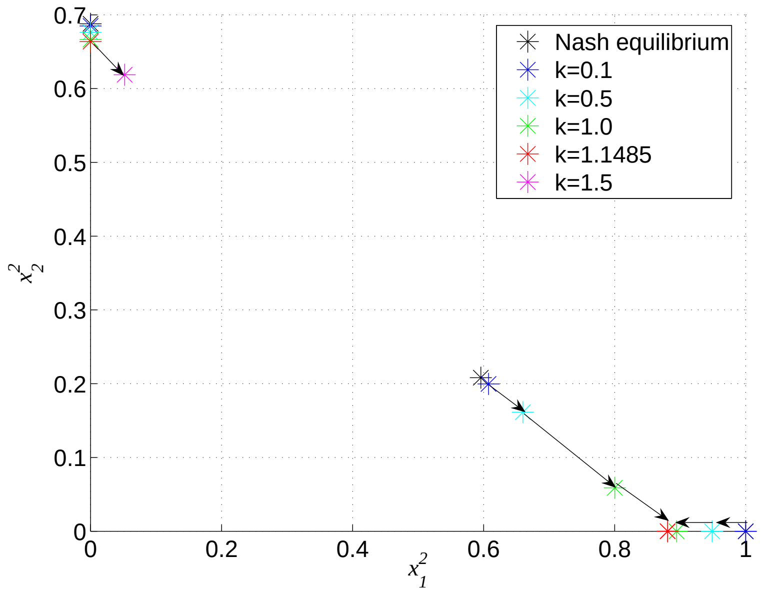

図 9　ロバスト Nash 均衡解におけるプレイヤー 2 の戦略の動き

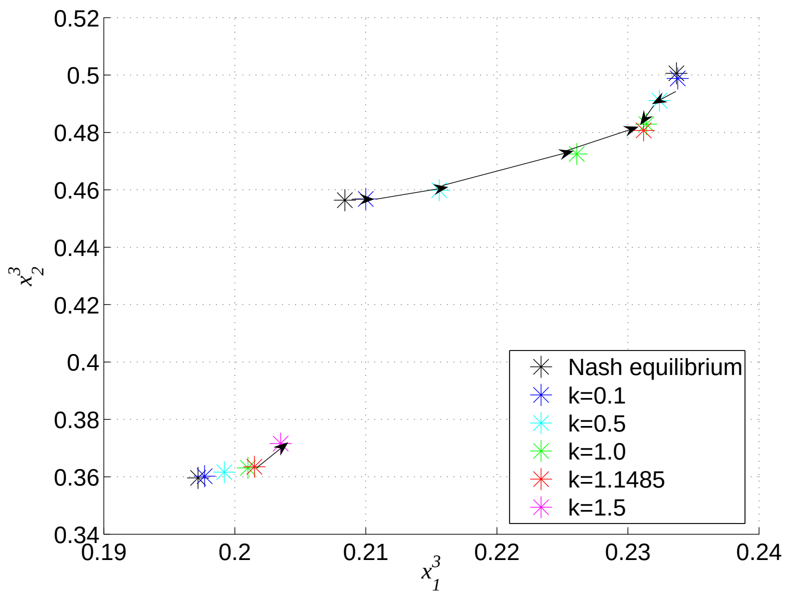

図 10　ロバスト Nash 均衡解の戦略の動き

7　結論

本報告書では，まず，文献 [1, 11] 等で与えられているロバスト Nash 均衡の概念をより一般化し，プレイヤーの数が N 人で，各プレイヤーのコスト関数（利得関数）が自分の戦略に関して非線形な場合に対して，ロバスト Nash 均衡を定義した．さらに，コスト関数や戦略集合に対する凸性とコンパクト性の仮定のもとで，ロバスト Nash 均衡解が存在することを示した．さらに，ロバスト Nash 均衡問題を等価な一般化変分不等式問題に変換することにより，解が一意に存在するための十分条件を与えた．特に，各プレイヤーのコスト関数が二次の項を含み，不確実性を表す集合がユークリッドノルムやフロベニウスノルムを用いて表されるロバスト Nash 均衡問題を二次錐相補性問題として再定式化できることを示した．二次錐相補性問題に対するアルゴリズムを用いた数値実験を行い，ロバスト Nash 均衡解の性質を調べた．

今後の課題としては，次のようなことが挙げられる．本報告書では，ロバスト Nash 均衡解の一意性について，コスト関数の不確実性を考慮しない場合でかつ，Nash 均衡解が一意であるものを取り扱った．第一の課題はそれらの条件を緩和し，もっと広いクラスの問題に対して解が一意に存在することを示すことである．また，本報告書では，ロバスト Nash 均衡問題を解く際は，不確実性が戦略の評価値のみにある場合と，コスト関数のパラメータのみにある場合だけを取り扱った．第二の課題は，戦略の評価値とコスト関数のパラメータの両方に不確実性がある場合でも，解を求められるようにすることである．

謝辞

本報告書の作成全般にわたり，長時間にわたる熱心な御指導と数多くの御助言を賜った林俊介助手，並びに本報告書の細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を賜った福嶋雅夫教授に心より感謝致します．また，日頃からお世話になっている山下信雄助教授，研究室の皆様に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. AGHASSI AND D. BERTSIMAS, *Robust game theory*, Mathematical Programming, 107 (2006), pp. 231–273.

[2] F. ALIZADEH AND D. GOLDFARB, *Second-order cone programming*, Mathematical Programming, 95 (2003), pp. 3–51.

[3] J.-P. AUBIN, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[4] A. BEN-TAL AND A. NEMIROVSKI, *Robust convex optimization*, Mathematics of Operations Research, 23 (1998), pp. 769–805.

[5] ———, *Robust solutions of uncertain linear programs*, Operations Research Letters, 25 (1999), pp. 1–13.

[6] L. ELGHAOUI AND H. LEBRET, *Robust solutions to least-squares problem with uncertain data*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 18 (1997), pp. 1035–1064.

[7] F. FACCHINEI AND J.-S. PANG, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] S. C. FANG AND E. L. PETERSON, *Generailized variational inequalities*, Journal of optimization theory and applications, 38 (1982), pp. 363–383.

[9] 福島 雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[10] S. HAYASHI, N. YAMASHITA, AND M. FUKUSHIMA, *A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems*, SIAM Journal on Optimization, 175 (2005), pp. 335–353.

[11] ——, *Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6 (2005), pp. 283–296.

[12] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[13] J.HARSANYI, *Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, Part I*, Management Science, 14 (1967), pp. 159–182.

[14] ——, *Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, Part II*, Management Science, 14 (1968), pp. 320–334.

[15] ——, *Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, Part III*, Management Science, 14 (1968), pp. 486–502.

[16] J.NASH, *Equilibrium points in N-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 36 (1950), pp. 48–49.

[17] ——, *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics, 54 (1951), pp. 286–295.

[18] 岡田 章, ゲーム理論, 有斐閣, 1996.

[19] J. B. ROSEN, *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-persons games*, Econometrica, 33 (1965), pp. 520–534.