特別研究報告書

# 複数の確率水準に対するCVaRを用いるポートフォリオ最適化モデル

指導教員　　福嶋雅夫　教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成１６年４月入学
平成２０年３月卒業

濱谷　健史

平成２０年1月３１日提出

# 複数の確率水準に対する CVaR を用いるポートフォリオ最適化モデル

濱谷　健史

摘要

近年，インターネットのオンライン株投資などの発展により投資が我々の身近なものになってきている．投資を行う際には複数の銘柄に分散して投資を行うことによってリスクを軽減することができ，その資産配分のことをポートフォリオと呼ぶ．また，投資家にとって最適なポートフォリオを求める問題をポートフォリオ最適化問題と呼び，Markowitz の平均・分散モデルに代表されるようにリスク，リターンの 2 つの尺度を用いた数理モデルがよく用いられる．分散以外にも様々なものがリスク尺度として提唱されており，その 1 つに Value-at-Risk(VaR) や Conditional-Value-at-Risk(CVaR) がある．VaR とはある一定の確率水準で発生する最大損失であり，CVaR とは VaR を超えて発生する損失の期待値として定義される．CVaR は理論的に好ましい性質を持ち，CVaR をリスク尺度とするポートフォリオ最適化問題は線形計画問題の枠組みで実現できることから近年注目を集めている．しかし一般的にはリスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題は 1 つの確率水準によって定式化されるため，確率水準の選び方によって大幅に異なる解を出力する場合がある．この問題を改善するため，本報告書では複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルを提案する．このモデルにおいては複数の確率水準に対する CVaR を制約条件として取り扱うため，複数の確率水準に対する損失額の期待値を管理することが可能になる．また，提案するモデルも通常の CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題と同様に線形計画問題として定式化できることを示す．さらに複数の確率水準に対する CVaR の許容リスクを大きくしたときの期待収益率の振る舞いを計算実験により検証した．

# 目次


**1 序論** **1**

**2 VaR と CVaR** **2**
2.1 定義 . . . . . 2
2.2 VaR の問題点 . . . . . 2
2.3 CVaR の coherent 性，凸性 . . . . . 3

**3 リスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題** **5**
3.1 準備 . . . . . 5
3.2 線形計画問題による定式化 . . . . . 6

**4 複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度に用いるポートフォリオ最適化モデル** **7**
4.1 $\beta$ の選び方によって異なるポートフォリオが構築される例 . . . . . 7
4.2 ポートフォリオ最適化モデル (a) . . . . . 8
4.3 ポートフォリオ最適化モデル (b) . . . . . 10

**5 数値実験** **11**
5.1 モデル (a) の実験結果・考察 . . . . . 12
5.2 モデル (b) の実験結果・考察 . . . . . 13

**6 結論** **14**

# 1　序論

投資を行う際，投資家はリターンを追い求めるだけでなくそれに伴うリスクを定量的に管理する必要がある．一般的に複数の銘柄に投資を行うことによってリスクを軽減することができるため，投資家は分散投資を行う．投資家にとって最適な資産配分 (ポートフォリオ) を決定する問題をポートフォリオ最適化問題といい，それを解くために様々な数理モデルが提案されている．経済学の理論では不確実性下の意思決定を分析する際，投資家はリスク回避的な効用関数を持ち，この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定する期待効用最大化の原理に基づく考え方が一般的である．しかし個々の投資家の効用関数を特定するのは困難であるため，期待効用最大化原理を実務に応用するのは難しい [5]．これに対して Markowitz はリターン (収益の期待値) とリスク (収益の分散) という 2 つの尺度を用いて，投資家が最低限要求する期待収益率以上の元で収益の分散を最小化する平均・分散モデルを提唱した．この考え方は個々の効用関数を特定する必要がないことや平均・分散モデルは凸二次計画問題として定式化できることから実務・理論的に発展をとげた．収益の分散以外にも下方半分散・絶対偏差・下方部分積率など様々なものがリスク尺度として提案されており [7]，その中の一つに Value-at-Risk(VaR) が挙げられる．VaR とはあるポートフォリオの損失が $\alpha$ 以下である確率が $\beta$ ($\beta = 0.90, 0.95, 0.99$ などがよく用いられる) 以上となるときの最小の $\alpha$ として定義される [8]．つまり「あるポートフォリオの 95% の VaR は 1 万円」という意味は「1 万円以上の損失が出る確率が 5% ある」ということである．VaR は実務上でも標準的に用いられるリスク尺度となっているが劣加法性を満たさないなどの問題点も指摘されており，それらの問題点を解消するものとして Conditional-Value-at-Risk(CVaR) がリスク尺度として提唱された．CVaR は期待ショートフォール (Expected Shortfall) や Conditional Tail Expectation などと呼ばれることもある．CVaR はあるポートフォリオの損失が VaR を上回る場合の損失の期待値として定義され，劣加法性を必ず満たしていることから VaR よりも理論的に優れているといえる．さらに CVaR をリスク尺度に用いるポートフォリオ最適化問題は適当な仮定の下で線形計画問題の枠組みで実現できることから計算機上での実装を簡単に行うことができる [3].

しかし従来のモデルでは 1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるため確率水準の選び方によって大幅に異なるポートフォリオが構築される可能性がある．そのときどのポートフォリオを採用するのかの基準が不明確である，特に他の確率水準における CVaR の値はどれくらいになっているのか分からない．この問題に対処するため，本報告書では複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度とし，それらを制約条件に用いるポートフォリオ最適化モデルを提案する．提案するモデルでは複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いることによって様々な確率水準に対する CVaR を同時に考慮するポートフォリオを構築することができる．また複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化問題も線形計画問題の枠組みで実現できるため従来のモデルと同様に計算機上で簡単に実装することが可能である．本報告書では 1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化問題と複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化問題から得られるポートフォリオや期待収益率の変化の比較を行った．

本報告書の構成を以下に記す．まず第 2 節で VaR と CVaR の定義を述べ，VaR と CVaR の理論的な性質について比較を行う．第 3 節ではリスク尺度として 1 つの確率水準に対する CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題を線形計画問題として定式化する．第 4 節では複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化モデルを提案し，その定式化を行う．第 5 節で数値実験を行い，その結果を報告する．

## 2　VaR と CVaR

この節では VaR，CVaR の定義を示し，劣加法性や凸性の観点から VaR と CVaR について比較を行う．

### 2.1　定義

投資対象の銘柄を $i = 1, \cdots, n$ とし，銘柄 $i$ に対する投資比率を $x_i$，銘柄 $i$ の収益率を $y_i$ とする．ここで，$y_i$ は確率変数であり，以下では $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$，$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ と表す．損失関数を $f(x, y)$ とし (一般に $f(x, y) = -x^T y$ が用いられる)，確率変数 $y$ は連続的な確率密度関数 $p(y)$ に従うと仮定する．まず，損失が $\alpha$ 以下となる確率を

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y)\le\alpha} p(y)\mathrm{d}y$$

で与える．$x$ を任意に固定したとき，$\Psi(x, \alpha)$ は $\alpha$ の関数として非減少であり右から連続であるが，一般に左から連続とは限らない．しかし，本報告書では簡単のため $\Psi(x, \alpha)$ は $\alpha$ に関して連続であると仮定する．VaR とはあるポートフォリオの損失が $\alpha$ 以下である確率が $\beta$ 以上となるときの最小の $\alpha$，すなわち

$$\mathrm{VaR}_\beta(x) = \min\{\alpha \mid \Psi(x, \alpha) \ge \beta\} \quad (= \alpha_\beta(x))$$

で定義される．上の仮定より $\Psi(x, \alpha)$ は $\alpha$ に関して連続であるため，$\alpha_\beta(x)$ は $\Psi(x, \alpha) = \beta$ を満たす $\alpha$ の中で最小のものとなる．CVaR とはあるポートフォリオの損失が $\alpha_\beta(x)$ を上回る場合の損失の期待値であり，

$$\mathrm{CVaR}_\beta(x) = \frac{\int_{f(x,y)\ge\alpha_\beta(x)} f(x, y)p(y)\mathrm{d}y}{\int_{f(x,y)\ge\alpha_\beta(x)} p(y)\mathrm{d}y}$$

で定義される．$\Psi(x, \alpha)$ の $\alpha$ に関する連続性の仮定より $\int_{f(x,y)\ge\alpha_\beta(x)} p(y)\mathrm{d}y = 1-\beta$ となるため，CVaR は

$$\mathrm{CVaR}_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta}\int_{f(x,y)\ge\alpha_\beta(x)} f(x, y)p(y)\mathrm{d}y \quad (= \phi_{\beta(x)})$$

と書くことができる．CVaR は VaR を上回る場合の損失の期待値という定義から明らかに

$$\alpha_\beta(x) \le \phi_\beta(x)$$

という不等式が成立し，CVaR が小さな値であるとき VaR はその値よりも小さな値となることが保証される．しかし確率変数 $y$ が正規分布などの特別な分布に従うという仮定がないならば，$\alpha_\beta(x)$ を最小にする $x$ と $\phi_\beta(x)$ を最小にする $x$ は同じであるとは限らない．

### 2.2　VaR の問題点

$X$ を確率変数とし，あるリスク尺度を $\rho(X)$ とする．[1] によるとリスク尺度が満たすべき性質として，

1. 単調性 (monotonicity)：$X_1 \le X_2$ ならば $\rho(X_1) \le \rho(X_2)$
2. 劣加法性 (subadditivity)：$\rho(X_1 + X_2) \le \rho(X_1) + \rho(X_2)$

表 1: VaR が劣加法性を満たさない例

| 状態 | 確率 | A | B | A+B |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 98.0% | 80 | 80 | 160 |
| 2 | 0.9% | -20 | -100 | -120 |
| 3 | 0.2% | -30 | -30 | -60 |
| 4 | 0.9% | -100 | -20 | -120 |

3. 正斉次性 (positive homogeneity)：任意の $\lambda > 0$ に対して $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
4. 平行移動不変性 (translation invariance)：任意の定数 $c$ に対して $\rho(X + c) = \rho(X) + c$

があげられ，これらの条件を満たすリスク尺度は Coherent measures of risk と呼ばれる．VaR はリスク尺度として 1，3，4 は満たすが 2 は満たさない．VaR が劣加法性を満たさない例を表 1 に挙げる [5]．表 1 において，A，B はポートフォリオを表し，80 や −20 などの数字は利得を表すものとする．$\beta = 0.99$ とすると $\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}) = 30$，$\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{B}) = 30$，$\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A+B}) = 120$ で，$\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A+B}) > \mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}) + \mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{B})$ となるため劣加法性を満たさない．つまり，VaR は coherent 性を有さないことが分かる．

## 2.3 CVaR の coherent 性，凸性

この節では CVaR が 2.2 節で述べた coherent 性をもつことを確かめ，さらに CVaR が凸性を満たすことを示す.

**定理 2.1.** $X$ と $Y$ を連続な分布関数を持つ確率変数とするとき，任意の $\beta \in (0,1)$ に対して確率水準 $\beta$ での CVaR は以下の劣加法性を満たす.

$$\phi_\beta(X+Y) \leq \phi_\beta(X) + \phi_\beta(Y)$$

**証明.** この証明は [5] による．$Z = X + Y$ とする．損失額 $X$ の $\beta$ 分位点を $x_\beta$，$Y$ の $\beta$ 分位点を $y_\beta$，$Z$ の $\beta$ 分位点を $z_\beta$ とすると $\phi_\beta(X)$，$\phi_\beta(Y)$，$\phi_\beta(Z)$ は下のように書ける．

$$\begin{aligned} \phi_\beta(X) &= \frac{1}{1-\beta}E[X1_{X\geq x_\beta}] \\ \phi_\beta(Y) &= \frac{1}{1-\beta}E[Y1_{Y\geq y_\beta}] \\ \phi_\beta(Z) &= \frac{1}{1-\beta}E[Z1_{Z\geq z_\beta}] \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで，$1_A$ は $A$ が真のときに 1 を，偽のときに 0 となる関数である．また，

$$\begin{cases} 1_{X\geq x_\beta} - 1_{Z\geq z_\beta} \geq 0 & \text{if } X \geq x_\beta \\ 1_{X\geq x_\beta} - 1_{Z\geq z_\beta} \leq 0 & \text{if } X \leq x_\beta \end{cases} \tag{2.2}$$

という関係が成立するので $(1_{X\geq x_\beta} - 1_{Z\geq z_\beta})(X - x_\beta) \geq 0$ となる．同様に $(1_{Y\geq y_\beta} - 1_{Z\geq z_\beta})(Y - y_\beta) \geq 0$ である．(2.1)，(2.2) より，

$$\begin{aligned}(1-\beta)(\phi_\beta(X)+\phi_\beta(Y)-\phi_\beta(Z)) &= E[X1_{X\geq x_\beta}+Y1_{Y\geq y_\beta}-Z1_{Z\geq z_\beta}]\\ &= E[X(1_{X\geq x_\beta}-1_{Z\geq z_\beta})+Y(1_{Y\geq y_\beta}-1_{Z\geq z_\beta})]\\ &\geq x_\beta E[1_{X\geq x_\beta}-1_{Z\geq z_\beta}]+y_\beta E[1_{Y\geq y_\beta}-1_{Z\geq z_\beta}]\\ &= x_\beta\{(1-\beta)-(1-\beta)\}+y_\beta\{(1-\beta)-(1-\beta)\}=0\end{aligned}$$

が成立する．したがって $\phi_\beta(Z)\leq\phi_\beta(X)+\phi_\beta(Y)$ である． ■

CVaR がリスク尺度として 1，3，4 を満たすのは明らかであり，定理 2.3 より CVaR は coherent 性を有していることが分かる．また，劣加法性と凸性には以下のような関係があることが知られている [2].

**定理 2.2.** あるリスク尺度が正斉次性を満たす場合，そのリスク尺度が劣加法性を満たすことと凸性を満たすことは同値である.

**証明.** 証明は [6] による．まず，凸性が満たされれば劣加法性が満たされることを示す．リスク尺度 $\rho(X)$ が凸性を満たす場合，定義よりある確率変数 $X_1$，$X_2$ と $0\leq\lambda\leq 1$ に対して

$$\rho(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\lambda\rho(X_1)+(1-\lambda)\rho(X_2) \tag{2.3}$$

が成立する．(2.3) 式の $\lambda$ に $\frac{1}{2}$ を代入すると，

$$\rho(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)\leq\frac{1}{2}\rho(X_1)+\frac{1}{2}\rho(X_2) \tag{2.4}$$

が成立する．(2.4) 式の左辺に正斉次性を適用すると，

$$\frac{1}{2}\rho(X_1+X_2)\leq\frac{1}{2}\rho(X_1)+\frac{1}{2}\rho(X_2)$$

を得る．これにより $\rho(X)$ は劣加法性を満たす．次に劣加法性が満たされれば凸性が満たされることを示す．リスク尺度 $\rho(X)$ が劣加法性を満たす場合，定義よりある確率変数 $X_1$，$X_2$ に対して

$$\rho(X_1+X_2)\leq\rho(X_1)+\rho(X_2) \tag{2.5}$$

が成立する．(2.5) 式で $X_1=\lambda Y_1$，$X_2=(1-\lambda)Y_2$，$0\leq\lambda\leq 1$ とすると

$$\rho(\lambda Y_1+(1-\lambda)Y_2)\leq\rho(\lambda Y_1)+\rho((1-\lambda)Y_2) \tag{2.6}$$

が成立する．(2.6) 式の右辺に正斉次性を適用すると，

$$\rho(\lambda Y_1+(1-\lambda)Y_2)\leq\lambda\rho(Y_1)+(1-\lambda)\rho(Y_2)\ \ ,\text{for}\ \ 0\leq\lambda\leq 1 \tag{2.7}$$

を得る．これにより $\rho(X)$ は凸性を満たす. ■

CVaR は coherent 性を有しているので正斉次性を満たすことは明らかであり，定理 2.1，定理 2.2 より CVaR は凸性を満たす.

# 3　リスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題

## 3.1　準備

2.1 節で定義した $\phi_\beta(x)$ を求めるためにパラメーター $\alpha \in \Re$ を用いて補助関数

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{y\in\Re^n}[f(x,y)-\alpha]^+ p(y)\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

を定める．ここで，$[t]^+ = \max\{0,t\}$ である．このとき，$\phi_\beta(x)$ と補助関数 $F_\beta(x,\alpha)$ の間に以下の関係が成り立つ [3].

**定理 3.1.** 任意に固定した $x$ に対して $F_\beta(x,\alpha)$ は $\alpha$ の関数として凸かつ連続的微分可能であり，$\phi_\beta(x)$ は $F_\beta(x,\alpha)$ を $\alpha$ に関して最小化することにより与えられる．つまり，

$$\phi_\beta(x) = \min_{\alpha\in\Re} F_\beta(x,\alpha)$$

である．また，上式の右辺の最小値を与える $\alpha$ の集合を

$$A_\beta(x) = \operatorname*{argmin}_{\alpha\in\Re} F_\beta(x,\alpha)$$

とすると $A_\beta(x)$ は空でない閉区間となり，$\alpha_\beta(x)$ は

$$\alpha_\beta(x) = \min\{\alpha \mid \alpha \in A_\beta(x)\}$$

で与えられる．

**証明.** [4] によると，固定した $x$ に対して $G(\alpha) = \int_{y\in\Re^m}[f(x,y)-\alpha]^+ p(y)\mathrm{d}y$ と定めると $G$ は凸で微分可能であり $G'(\alpha) = \Psi(x,\alpha)-1$ が成り立つ．この性質より $F_\beta(x,\alpha)$ は $\alpha$ に関して凸かつ微分可能であり，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F_\beta(x,\alpha) = (1-\beta)^{-1}[\Psi(x,\alpha)-\beta]$$

が成立する．これにより，$F_\beta(x,\alpha)$ の最小値を与える $\alpha$ は $\Psi(x,\alpha)=\beta$ を満たす $\alpha$ となる．$\Psi(x,\alpha)$ は連続で $\alpha\to\infty$ で 1 となり，$\alpha\to-\infty$ で 0 となる $\alpha$ に関して非減少な関数であるから $A_\beta(x)$ は空でない閉集合となる．これにより定理の後半は示された．また，

$$\min_{\alpha\in\Re} F_\beta(x,\alpha) = F_\beta(x,\alpha_\beta(x)) = \alpha_\beta(x) + \frac{1}{1-\beta}\int_{y\in\Re^m}[f(x,y)-\alpha_\beta(x)]^+ p(y)\mathrm{d}y$$

となり，右辺の積分は

$$\int_{f(x,y)\geq\alpha_\beta(x)}[f(x,y)-\alpha_\beta(x)]p(y)\mathrm{d}y = \int_{f(x,y)\geq\alpha_\beta(x)} f(x,y)p(y)\mathrm{d}y - \alpha_\beta(x)\int_{f(x,y)\geq\alpha_\beta(x)} p(y)\mathrm{d}y$$

と変形できる．さらに右辺の第一項は定義より $(1-\beta)\phi_\beta(x)$ であり，第二項は $\alpha_\beta(x)(1-\beta)$ となるため，

$$\min_{\alpha\in\Re} F_\beta(x,\alpha) = \alpha_\beta(x) + (1-\beta)^{-1}[(1-\beta)\phi_\beta(x) - \alpha_\beta(x)(1-\beta)] = \phi_\beta(x)$$

である． ■

CVaR は VaR の値によって定義されるが，定理 3.1 により VaR の値を求めることなく CVaR の値を求めることが可能となる．さらに $X$ をポートフォリオが満たすべき制約条件とすると，リスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題の定式化に関して次の定理が成立する [3].

**定理 3.2.** $\phi_\beta(x)$ を $x \in X$ について最小化することと，$F_\beta(x,\alpha)$ を $(x,\alpha) \in X \times \mathfrak{R}$ に関して最小化することは等価である．つまり，

$$\min_{x \in X} \phi_\beta(x) = \min_{(x,\alpha) \in X \times \mathfrak{R}} F_\beta(x,\alpha)$$

である．さらに，$f(x,y)$ が $x$ に関して凸ならば $F_\beta(x,\alpha)$ は $(x,\alpha)$ に関して凸であり，$\phi_\beta(x)$ は $x$ に関して凸である．また，$X$ が凸集合であるならば $\phi_\beta(x)$ の $x \in X$ 上での最小化問題は凸計画問題として定式化できる．

**証明.** 前半は，定理 3.1 の $\phi_\beta(x)$ の式と，$F_\beta(x,\alpha)$ の $(x,\alpha) \in X \times \mathfrak{R}$ 上での最小化ははじめに固定した $x$ に対し $\alpha \in \mathfrak{R}$ 上で最小化を行い，次にその結果を $x \in X$ 上で最小化することにより実行されるという事実より明らかである．以下では定理の後半について証明を行う．$f(x,y)$ が $x$ に関して凸ならば $f(x,y) - \alpha$ は $(x,\alpha)$ に関して凸になる．[2] より，$f(x,y) - \alpha$ が $(x,\alpha)$ に関して凸ならば $[f(x,y) - \alpha]^+$ は $(x,\alpha)$ に関して凸である．(3.1) 式より $F_\beta(x,\alpha)$ は $[f(x,y) - \alpha]^+$ の積分の形で表されるため $[f(x,y) - \alpha]^+$ が $(x,\alpha)$ に関して凸であるならば $F_\beta(x,\alpha)$ は $(x,\alpha)$ に関して凸となる．2 つの変数の拡張実数値凸関数を一方の変数に関して最小化した関数は残りの変数の凸関数であるという事実より，$\phi_\beta(x)$ は $x$ に関して凸となる． ■

以上の準備の下で，次節ではリスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題を線形計画問題として定式化する．

## 3.2 線形計画問題による定式化

密度関数 $p(y)$ に従う確率変数 $y$ をサンプルすることにより，補助関数 $F_\beta(x,\alpha)$ の近似を行う．サンプリングによって $\{y_{[1]}, y_{[2]}, \cdots, y_{[q]}\}$ が得られたとき，補助関数 $F_\beta(x,\alpha)$ は以下のように近似される．

$$\tilde{F}_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^{q} [f(x, y_{[k]}) - \alpha]^+ \tag{3.2}$$

ポートフォリオ $x$ の収益は各銘柄への投資比率とその銘柄の収益の積の総和として表されるので，損失関数は

$$f(x,y) = -x^T y$$

と定義される．よって (3.2) は以下のように書ける．

$$\tilde{F}_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^{q} [-x^T y_{[k]} - \alpha]^+$$

ここで，投資家が最低限要求するリターンの期待値を $R$ とすると次の条件が成り立たなければならない．

$$x^T \bar{y} \geq R$$

ただし，$\bar{y}$ は収益率 $y$ の平均を表すベクトルである．次にポートフォリオが満たすべき制約条件 $x \in X$ について考える．$x$ は投資比率を表すベクトルであることに注意し，空売りを行わないことを仮定すると，$x$ は

$$e^T x = 1$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

を満たす必要がある．以上より，リスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題は $\tilde{F}_\beta(x,\alpha)$ の $(x,\alpha) \in X \times \Re$ 上での最小化問題として定式化できる．正の補助変数 $u_k$ , $k = 1,\cdots,q$ を導入し $u_k = [-x^T y_{[k]} - \alpha]^+$ とすると，リスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題は以下のように書ける．

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\min_{x,\alpha,u_1,\cdots,u_q} & \displaystyle\alpha + \frac{1}{q(1-\beta)}\sum_{k=1}^{q} u_k & \\
\text{s.t.} & u_k \geq -x^T y_{[k]} - \alpha \quad (k = 1,\cdots,q) & \\
& u_k \geq 0 \quad (k = 1,\cdots,q) & \\
& e^T x = 1 & \\
& x_j \geq 0 \quad (j = 1,\cdots,n) & \\
& x^T \bar{y} \geq R &
\end{array} \tag{3.3}
$$

よってリスク尺度に CVaR を用いるポートフォリオ最適化問題は線形計画問題に帰着することができる．

# 4 複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度に用いるポートフォリオ最適化モデル

この節ではまず，確率水準 $\beta$ の選び方によって大幅に異なるポートフォリオが構築される例をあげる．次に複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化モデルを提案し，そのモデルを線形計画問題として定式化する．

## 4.1 $\beta$ の選び方によって異なるポートフォリオが構築される例

この節では確率水準 $\beta$ の選び方によって大幅に異なるポートフォリオが構築される例をあげる．表 2 ように A 社，B 社，C 社の収益が分布している例を考える．A 社に $a$，B 社に $b$，C 社に $(1-a-b)$ 投資するポートフォリオを組んだときの収益の分布を表 2 の一番右の列に示す．$x_1$ を A 社への投資比率，$x_2$ を B 社への投資比率，$x_3$ を C 社への投資比率，$x = (x_1, x_2, x_3)^T$ とする．A 社に $a$，B 社に $b$，C 社に $(1-a-b)$ 投資するポートフォリオは $x = (a, b, 1-a-b)^T$ と書ける．A 社，B 社，C 社と

表 2: $\beta$ の選び方で異なるポートフォリオが構築される例

| 状態 | 確率 | A 社 | B 社 | C 社 | ポートフォリオ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25% | 1 | 2 | 2 | 2-$a$ |
| 2 | 15% | 1 | 1 | 2 | 2-$a$-$b$ |
| 3 | 50% | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 5% | 0 | -9 | -9 | -9-9$a$ |
| 5 | 4% | -15 | -10 | -15 | -15+5$b$ |
| 6 | 0.5% | -70 | -60 | -100 | -100+30$a$+40$b$ |
| 7 | 0.5% | -140 | -150 | -100 | -100-40$a$-50$b$ |

も平均収益率は $-0.75$ であるので A 社，B 社，C 社にどのように投資しても平均収益率は $-0.75$ となることに注意し，$R=-0.75$ として表 2 の例において 1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度に用いてポートフォリオ最適化問題を解く．$\beta=0.99$ として解くとポートフォリオの $\phi_{0.99}(x)$ は $100+5a+5b$ となることより $a\geq 0$，$b\geq 0$，$a+b\leq 1$ であることに注意すると $a=b=0$，つまり $x_1=0,x_2=0,x_3=1$ が $\phi_{0.99}(x)$ を最も小さくする投資比率である．次に $\beta=0.95$ として解くとポートフォリオの $\phi_{0.95}(x)$ は $32+a-3b$ となることより $a=0,b=1$，つまり $x_1=0,x_2=1,x_3=0$ が $\phi_{0.95}(x)$ を最も小さくする投資比率である．最後に $\beta=0.90$ として解くとポートフォリオの $\phi_{0.90}(x)$ は $20.5-4a-1.5b$ となることより $a=1,b=0$，つまり $x_1=1,x_2=0,x_3=0$ が $\phi_{0.90}(x)$ を最も小さくする投資比率である．以上のことより $\beta=0.90$ とすると $x=(1,0,0)^T$ が最適解となり，$\beta=0.95$ とすると $x=(0,1,0)^T$ が最適解となり，$\beta=0.99$ とすると $x=(0,0,1)^T$ が最適解となる．このように，$\beta$ の選び方によって全く異なるポートフォリオが構築されてしまうことがあるため，複数の $\beta$ における CVaR を考慮するモデルが必要となる．

## 4.2　ポートフォリオ最適化モデル (a)

前節であげた問題点を改善するため，$m$ 個の確率水準 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ に対する CVaR の値を考慮するモデルを提案する．$\beta=\beta_i$ のときに式 (3.3) を解いて得られた CVaR の値を $W_{\beta_i}$ とする．要求するリターンは元の問題と同じとし，$m$ 個の CVaR の値が $(1+d)W_{\beta_i}$ 以下となるような最小の $d$ を求める問題は以下のように表される．このモデルをモデル (a) と名付ける．

$$\begin{aligned} \min_{(x,d)\in X\times\mathfrak{R}} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{\beta_i}(x)\leq(1+d)W_{\beta_i} \quad (i=1,\cdots,m) \\ & x^T\bar{y}=R \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで，$\beta=\beta_i$ に対する補助関数を $F_{\beta_i}(x,\alpha_i)$ とすると

$$\phi_{\beta_i}(x)=\min_{\alpha_i\in\mathfrak{R}} F_{\beta_i}(x,\alpha_i) \tag{4.2}$$

より，(4.1) は

$$\begin{aligned} \min_{(x,d)\in X\times\mathfrak{R}} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & \min_{\alpha_i\in\mathfrak{R}} F_{\beta_i}(x,\alpha_i)\leq(1+d)W_{\beta_i} \quad (i=1,\cdots,m) \\ & x^T\bar{y}=R \end{aligned} \tag{4.3}$$

と書ける．$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)^T$ として以下の問題を考える．

$$\begin{aligned} \min_{(x,\alpha,d)\in X\times\mathfrak{R}^m\times\mathfrak{R}} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & F_{\beta_i}(x,\alpha_i)\leq(1+d)W_{\beta_i} \quad (i=1,\cdots,m) \\ & x^T\bar{y}=R \end{aligned} \tag{4.4}$$

ここで，(4.3) と (4.4) の間に以下の定理が成り立つ．

**定理 4.1.** $(x^*,d^*)$ が (4.3) の最適解であるとき，$(x^*,\alpha^*,d^*)$ は (4.4) の最適解である．また $(\bar{x},\bar{\alpha},\bar{d})$ が (4.4) の最適解であるとき，$(\bar{x},\bar{d})$ は (4.3) の最適解である．

**証明.** $(x^*, d^*)$ が (4.3) の最適解であると仮定する．$(x^*, d^*)$ は (4.3) の実行可能解であるため，

$$\min_{\alpha_i \in \Re} F_{\beta_i}(x^*, \alpha_i) \leq (1 + d^*) W_{\beta_i} \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{4.5}$$

が成立．ここで，

$$\alpha_i^* = \operatorname*{argmin}_{\alpha_i \in \Re} F_{\beta_i}(x^*, \alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{4.6}$$

で $\alpha^* = (\alpha_1^*, \cdot\cdot, \alpha_m^*)^T$ と定めると $F_{\beta_i}(x^*, \alpha_i^*) \leq (1 + d^*) W_{\beta_i}$ $(i = 1, \cdots, m)$ となるため $(x^*, \alpha^*, d^*)$ は (4.4) の実行可能解となる．$(x^*, \alpha^*, d^*)$ が (4.4) の最適解でないとすると $\overline{d} < d^*$ となる実行可能解 $\overline{x}, \overline{\alpha}, \overline{d}$ が存在する．ここで，$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_i}, \cdots, \overline{\alpha_m})^T$ である．

$$\min_{\alpha_i \in \Re} F_{\beta_i}(\overline{x}, \alpha_i) \leq F_{\beta_i}(\overline{x}, \overline{\alpha_i}) \leq (1 + \overline{d}) W_{\beta_i} \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{4.7}$$

が成り立つため，$(\overline{x}, \overline{d})$ は (4.3) の実行可能解となるが，これは $d^*$ が (4.3) の最適解であることに矛盾する．よって $(x^*, \alpha^*, d^*)$ が (4.4) の最適解となる．次に，$(\overline{x}, \overline{\alpha}, \overline{d})$ が (4.4) の最適解であると仮定する．$(\overline{x}, \overline{\alpha}, \overline{d})$ は (4.4) の実行可能解より $F_{\beta_i}(\overline{x}, \overline{\alpha_i}) \leq (1 + \overline{d}) W_{\beta_i}$ $(i = 1, \cdots, m)$ が成立する．これにより (4.7) が成立するため，$(\overline{x}, \overline{d})$ は (4.3) の実行可能解となる．$(\overline{x}, \overline{d})$ が (4.3) の最適解でないとすると $d^* < \overline{d}$ を満たす実行可能解 $(x^*, d^*)$ が存在する．(4.6) のように $\alpha_i^*$ を定めると (4.5) より $(x^*, \alpha^*, d^*)$ は (4.4) の実行可能解となる．これは $\overline{d}$ が (4.4) の最適解であることに矛盾する．よって $(\overline{x}, \overline{d})$ が (4.4) の最適解となる． ■

定理 4.1 より (4.1) と (4.4) は等価な問題となるため，(4.1) は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \min_{(x,\alpha,d) \in X \times \Re^m \times \Re} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{1 - \beta_i} \int_{y \in \Re^n} [f(x, y) - \alpha_i]^+ p(y) \mathrm{d}y \leq (1 + d) W_{\beta_i} \quad (i = 1, \cdots, m) \\ & x^T \overline{y} = R \end{aligned} \tag{4.8}$$

3 節と同様に損失関数を $f(x, y) = -x^T y$ とすると，サンプル $y_{[1]}, \cdots, y_{[q]}$ を用いて (4.8) は次のように近似できる．

$$\begin{aligned} \min_{(x,\alpha,d) \in X \times \Re^m \times \Re} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{q(1 - \beta_i)} \sum_{k=1}^{q} [-x^T y_{[k]} - \alpha_i]^+ \leq (1 + d) W_{\beta_i} \quad (i = 1, \cdots, m) \\ & x^T \overline{y} = R \end{aligned}$$

正の補助変数 $u_k^i$ , $k = 1, \cdots, q$ , $i = 1, \cdots, m$ を導入して $u_k^i = [-x^T y_{[k]} - \alpha_i]^+$ とおくと複数の CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化モデルは以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\alpha_1,\cdots,\alpha_m,u_1^1,\cdots,u_q^m,d} \quad & d \\
\text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{q(1-\beta_i)} \sum_{k=1}^{q} u_k^i \leq (1+d) W_{\beta_i} \ \ (i = 1,\cdots,m) \\
& u_k^i + x^T y_{[k]} + \alpha_i \geq 0 \ \ (i = 1,\cdots,m) \ \ (k = 1,\cdots,q) \\
& u_k^i \geq 0 \ \ (i = 1,\cdots,m) \ \ (k = 1,\cdots,q) \\
& x^T \overline{y} = R \\
& e^T x = 1 \\
& x_j \geq 0 \ \ (j = 1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

よってモデル (a) は線形計画問題として定式化できる．

## 4.3 ポートフォリオ最適化モデル (b)

次に $\phi_{\beta_i}(x)$ , $i = 1,\cdots,m$ , の各々をある与えられた定数 $h$ に対して $(1+h)W_{\beta_i}$ 以下に収めながら期待収益率を大きくすることを目標とした以下のモデルを提案する．このモデルをモデル (b) と名付ける．

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in X} \quad & x^T \overline{y} \\
\text{s.t.} \quad & \phi_{\beta_i}(x) \leq (1+h) W_{\beta_i} \ \ (i = 1,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

$x^T\overline{y}$ の最大化は $-x^T\overline{y}$ の最小化と表せるため，(4.9) は以下のモデルと等価である．

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in X} \quad & -x^T \overline{y} \\
\text{s.t.} \quad & \phi_{\beta_i}(x) \leq (1+h) W_{\beta_i} \ \ (i = 1,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

(4.2) より，(4.10) は以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in X} \quad & -x^T \overline{y} \\
\text{s.t.} \quad & \min_{\alpha_i \in \Re} F_{\beta_i}(x,\alpha_i) \leq (1+h) W_{\beta_i} \ \ (i = 1,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

さらに $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m)^T$ として以下の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,\alpha) \in X \times \Re^m} \quad & -x^T \overline{y} \\
\text{s.t.} \quad & F_{\beta_i}(x,\alpha_i) \leq (1+h) W_{\beta_i} \ \ (i = 1,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

ここで，(4.11) と (4.12) の間に次の関係が成り立つ．

**定理 4.2.** $x^*$ が (4.11) の最適解であるとき，$(x^*,\alpha^*)$ は (4.12) の最適解である．また $(\overline{x},\overline{\alpha})$ が (4.12) の最適解であるとき，$\overline{x}$ は (4.11) の最適解である．

**証明.** 定理 4.1 と同様. ■

定理 4.2 より (4.10) と (4.12) は等価な問題となり，(4.10) は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\min_{(x,\alpha)\in X\times\Re^m} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{1-\beta_i}\int_{y\in\Re^n}[f(x,y)-\alpha_i]^+ p(y)\mathrm{d}y \le (1+h)W_{\beta_i} \ \ (i=1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{4.13}$$

損失関数を $f(x,y)=-x^Ty$ とすると，サンプル $y_{[1]},\cdots,y_{[q]}$ を用いて (4.13) は次のように近似できる．

$$\begin{aligned}\min_{(x,\alpha)\in X\times\Re^m} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{q(1-\beta_i)}\sum_{k=1}^{q}[-x^Ty_{[k]}-\alpha_i]^+ \le (1+h)W_{\beta_i} \ \ (i=1,\cdots,m)\end{aligned}$$

正の補助変数 $u_k^i$，$k=1,\cdots,q$，$i=1,\cdots,m$ を導入して $u_k^i=[-x^Ty_{[k]}-\alpha_i]^+$ とおくと (4.11) は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\min_{x,\alpha_1,\cdots,\alpha_m,u_1^1,\cdots,u_q^m,d} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \frac{1}{q(1-\beta_i)}\sum_{k=1}^{q}u_k^i \le (1+h)W_{\beta_i} \ \ (i=1,\cdots,m) \\ & u_k^i + x^Ty_{[k]} + \alpha_i \ge 0 \ \ (i=1,\cdots,m) \ \ (k=1,\cdots,q) \\ & u_k^i \ge 0 \ \ (i=1,\cdots,m) \ \ (k=1,\cdots,q) \\ & e^Tx = 1 \\ & x_j \ge 0 \ \ (j=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

よってモデル (b) は線形計画問題として定式化できる．

# 5 数値実験

この節では 4 節で提案したモデルの有用性を確認するため数値実験を行う．本実験は CPU が 3.2GHz の Turbolinux10 上で，Matlab7.0 を用いて行った．線形計画問題を解く際は Matlab の optimization toolbox が提供する linprog 関数を‘ Large scale ’を‘ off ’として使用した．モデル (a) に対しては (4.1) において $m=3$，つまり 3 つの確率水準に対する CVaR を考え，$\beta_1=0.90$，$\beta_2=0.95$，$\beta_3=0.99$ とする．そのとき解く問題は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\min_{(x,d)\in X\times\Re} \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{0.90}(x) \le (1+d)W_{0.90} \\ & \phi_{0.95}(x) \le (1+d)W_{0.95} \\ & \phi_{0.99}(x) \le (1+d)W_{0.99} \\ & x^T\bar{y} = R\end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで $W_{0.90}$ は $\beta=0.90$ として (3.3) を解いたときの目的関数の値，$W_{0.95}$ は $\beta=0.95$ として (3.3) を解いたときの目的関数の値，$W_{0.99}$ は $\beta=0.99$ として (3.3) を解いたときの目的関数の値である．$x$ は $x\in\Re^3$，つまり 3 つの銘柄についてポートフォリオを構築するとした．収益率のサンプル $y_{[k]}$ の与え方であるが，[3] より収益率のサンプルが多変量正規乱数に従う場合どんな $\beta$ を選ん

表 3: 平均収益率

| 銘柄 | 平均収益 |
|---|---|
| S&P | 0.0101110 |
| Gov. bond | 0.0043532 |
| Small cap | 0.0137058 |

表 4: 共分散行列

| | S&P | Gov. bond | Small cap |
|---|---|---|---|
| S&P | 0.00324625 | 0.00022983 | 0.00420395 |
| Gov. bond | 0.00022983 | 0.00049937 | 0.00019247 |
| Small cap | 0.00420395 | 0.00019247 | 0.00764097 |

でも (3.3) を解けば同じポートフォリオが得られることが知られている．(a) のモデルでは (3.3) を解く際に $\beta$ の選び方で異なるポートフォリオが構築される場合を考えたいので $y_{[k]}$ は平均収益率が表 3，共分散行列が表 4 に従う多変量正規乱数を 960 個生成し，それに (S&P，Gov. bond，Small cap)=$(-0.1, -0.05, -0.2)$ を 10 個，(S&P，Gov. bond，Small cap)=$(-0.1, -0.05, 0)$ を 10 個，(S&P，Gov. bond，Small cap)=$(0, -0.05, 0)$ を 20 個追加したものを考える．$R$ は 0.006 とする．

モデル (b) に対しては (4.10) において $m = 3$ として $\beta_1 = 0.90$，$\beta_2 = 0.95$，$\beta_3 = 0.99$ としたモデル

$$\begin{aligned} \min_{x\in X} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{0.90}(x) \le (1+h)W_{0.90} \\ & \phi_{0.95}(x) \le (1+h)W_{0.95} \\ & \phi_{0.99}(x) \le (1+h)W_{0.99} \end{aligned} \tag{5.2}$$

$m = 1$ として $\beta_1 = 0.90$ としたモデル

$$\begin{aligned} \min_{x\in X} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{0.90}(x) \le (1+h)W_{0.90} \end{aligned} \tag{5.3}$$

$m = 1$ として $\beta_1 = 0.95$ としたモデル

$$\begin{aligned} \min_{x\in X} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{0.95}(x) \le (1+h)W_{0.95} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$m = 1$ として $\beta_1 = 0.99$ としたモデル

$$\begin{aligned} \min_{x\in X} \quad & -x^T\bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & \phi_{0.99}(x) \le (1+h)W_{0.99} \end{aligned} \tag{5.5}$$

に対して数値実験を行い，その結果を比較する．モデル (b) に対する収益率のサンプル $y_{[k]}$ の与え方であるが，平均収益率が表 3，共分散行列が表 4 に従う多変量正規乱数を 288 個生成し，それに (S&P，Gov. bond，Small cap)=$(-0.1, -0.05, -0.2)$ を 3 個，(S&P，Gov. bond，Small cap)=$(-0.1, -0.05, 0)$ を 3 個，(S&P，Gov. bond，Small cap)=$(0, -0.05, 0)$ を 6 個追加したものを考える．$R$ は 0.006 とする．

### 5.1 モデル (a) の実験結果・考察

$W_{0.90}$，$W_{0.95}$，$W_{0.99}$ を求めるため $\beta = 0.90$，$\beta = 0.95$，$\beta = 0.99$ のそれぞれに対して (3.3) を解く．得られた結果とそのポートフォリオを組んだときの $\phi_{0.90}(x)$，$\phi_{0.95}(x)$，$\phi_{0.99}(x)$ の値を表 5 に示す．表 5 の結果より $W_{0.90} = 0.0745$，$W_{0.95} = 0.0909$，$W_{0.99} = 0.1069$ が得られる．この値を

表 5: (3.3) を解いた結果

| $\beta$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\phi_{0.90}(x)$ | $\phi_{0.95}(x)$ | $\phi_{0.99}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.90 | 0.2000 | 0.4332 | 0.3668 | 0.0745 | 0.0914 | 0.1156 |
| 0.95 | 0.3986 | 0.3421 | 0.2593 | 0.0760 | 0.0909 | 0.1102 |
| 0.99 | 0.6131 | 0.2437 | 0.1432 | 0.0793 | 0.0915 | 0.1069 |

表 6: (5.1) を解いた結果

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d$ | $\phi_{0.90}(x)$ | $\phi_{0.95}(x)$ | $\phi_{0.99}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4249 | 0.3300 | 0.2451 | 0.0256 | 0.0764 | 0.0909 | 0.1096 |

代入し，(5.1) を解いた結果を表 6 に示す．$0.0764 \le 1.0256 \times 0.0745$，$0.0909 \le 1.0256 \times 0.0909$，$0.1096 \le 1.0256 \times 0.1069$ より (5.1) を解いて得られたポートフォリオは制約をすべて満たしていることが確認できる．$\beta = \beta_i$ のとき (3.3) を解いて得られた $\phi_{\beta_i}(x)$ の値は (5.1) を解いて得られたポートフォリオに対する $\phi_{\beta_i}(x)$ 以下になる．これは (3.3) が $\beta = \beta_i$ の $\phi_\beta(x)$ のみを対象に最小化を行っていることから明らかである．実際 $\beta = 0.90$ のとき (3.3) を解いて得られた $\phi_{0.90}(x)$ の値は 0.0745 で，(5.1) を解いて得られた $\phi_{0.90}(x)$ の値は 0.0764 であるため (5.1) を解いて得られたポートフォリオから定まる $\phi_{0.90}(x)$ の方が大きくなる．$\beta = 0.95$ や $\beta = 0.99$ のときも同様のことがいえる．しかし (5.1) を解くことによって $\phi_{0.90}(x)$，$\phi_{0.95}(x)$，$\phi_{0.99}(x)$ の値がそれぞれを個別に最小化したものの 1.0256 倍の範囲に収まるポートフォリオを構築できる．(3.3) を解くことにより 1 つの確率水準 $\beta$ に対する CVaR は最小化できるが，得られたポートフォリオの $\beta$ 以外の確率水準に対する CVaR は高い値をもつ可能性がある．(5.1) を解くことによって得られたポートフォリオは 3 つの確率水準に対する CVaR の値の情報を含むことになり，(3.3) を解くことによって得られるポートフォリオと比べるとより頑健なポートフォリオが構築されるといえる．

## 5.2　モデル (b) の実験結果・考察

$W_{0.90}$，$W_{0.95}$，$W_{0.99}$ を求めるため $\beta = 0.90$，$\beta = 0.95$，$\beta = 0.99$ のそれぞれに対して (3.3) を解く．得られた結果を表 7 に示す．表 7 より $W_{0.90} = 0.0613$，$W_{0.95} = 0.0729$，$W_{0.99} = 0.0908$ が得られる．この値を代入し $h$ を 0.0 から 0.1 ずつ増やしていき，(5.2)，(5.3)，(5.4)，(5.5) を解く．(5.3) を解いた結果を表 8 に，(5.4) を解いた結果を表 9 に，(5.5) を解いた結果を表 10 に，(5.2) を解いた結果を表 11 に示す．$h \ge 1.4$ のときは (5.2)，(5.3)，(5.4)，(5.5) の結果はすべて $x_1 = 0.0000$，$x_2 = 0.0000$，$x_3 = 1.0000$，$x^T\bar{y} = 1.0945$ となる．期待収益率は 100 倍した値で表示する．$h \ge 0.4$ のとき表 8 と表 11 を比較するとポートフォリオ・期待収益率とも等しい値となっている．つまり $h \ge 0.4$ のとき (5.2) と (5.5) では同じ結果が出力されるが，(5.2) では $\phi_{0.95}(x) \le (1+h)W_{0.95}$，$\phi_{0.99}(x) \le (1+h)W_{0.99}$

表 7: (3.3) を解いた結果

| $\beta$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\phi_\beta(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.90 | 0.2221 | 0.4918 | 0.2860 | 0.0613 |
| 0.95 | 0.3232 | 0.4554 | 0.2214 | 0.0729 |
| 0.99 | 0.5441 | 0.3756 | 0.0803 | 0.0908 |

となることが保証されており，それだけ多くの情報が含まれている．$h \leq 0.3$ のとき表 8，表 9，表 10，表 11 の期待収益率 ($= x^T\bar{y}$) を比較すると 3 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルの期待収益率は 1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルの期待収益率と比べると小さくなっている．これは (5.2) は $\phi_{0.90} \leq (1+h)W_{0.90}$，$\phi_{0.95} \leq (1+h)W_{0.95}$，$\phi_{0.99} \leq (1+h)W_{0.99}$ を保証していることにより制約が厳しくなるため，目的関数 $-x^T\bar{y}$ の値が大きくなる結果だと考えられる．以上のことから (5.3)，(5.4)，(5.5) のような 1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルから得られるポートフォリオと比べると，(5.2) のような 3 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルを解くことによって，より頑健なポートフォリオが構築されるといえる．

## 6　結論

本報告書では複数の確率水準に対する CVaR をリスク尺度に用いるポートフォリオ最適化モデルを提案し，そのモデルを線形計画問題として定式化した．また，サンプルデータに対して提案したモデルを解くことによってポートフォリオや期待収益率を計算し，1 つの確率水準に対する CVaR をリスク尺度として用いるモデルから得られるポートフォリオや期待収益率と比較を行った．それにより，提案したモデルを解くことによって，より頑健なポートフォリオが構築されることを確認した．

今回用いたサンプルデータ $y_{[1]},\cdots,y_{[q]}$ には自分で作ったものも含まれるため，実際の銘柄の収益率からデータを得ているわけではない．提案したモデルを実際の銘柄の過去の収益率のデータからサンプルを得るヒストリカル法で解くとどうなるかの検証が今後の課題である．

表 8: (5.3) を解いた結果

| $h$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x^T\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.2220 | 0.4917 | 0.2863 | 0.6000 |
| 0.1 | 0.2878 | 0.4080 | 0.3042 | 0.6519 |
| 0.2 | 0.3793 | 0.3216 | 0.2991 | 0.6981 |
| 0.3 | 0.4501 | 0.2454 | 0.3045 | 0.7419 |
| 0.4 | 0.5079 | 0.1761 | 0.3160 | 0.7838 |
| 0.5 | 0.5468 | 0.1152 | 0.3380 | 0.8243 |
| 0.6 | 0.6095 | 0.0464 | 0.3440 | 0.8643 |
| 0.7 | 0.6114 | 0.0000 | 0.3886 | 0.9038 |
| 0.8 | 0.4872 | 0.0000 | 0.5128 | 0.9426 |
| 0.9 | 0.3686 | 0.0000 | 0.6314 | 0.9796 |
| 1.0 | 0.2642 | 0.0000 | 0.7358 | 1.0121 |
| 1.1 | 0.1723 | 0.0000 | 0.8277 | 1.0408 |
| 1.2 | 0.0838 | 0.0000 | 0.9162 | 1.0684 |
| 1.3 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0945 |

表 9: (5.4) を解いた結果

| $h$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x^T\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.3233 | 0.4552 | 0.2215 | 0.6000 |
| 0.1 | 0.3919 | 0.3693 | 0.2388 | 0.6529 |
| 0.2 | 0.4258 | 0.3017 | 0.2725 | 0.7007 |
| 0.3 | 0.4450 | 0.2403 | 0.3146 | 0.7479 |
| 0.4 | 0.4671 | 0.1795 | 0.3534 | 0.7935 |
| 0.5 | 0.4914 | 0.1182 | 0.3904 | 0.8390 |
| 0.6 | 0.4896 | 0.0674 | 0.4430 | 0.8835 |
| 0.7 | 0.5360 | 0.0000 | 0.4640 | 0.9273 |
| 0.8 | 0.4272 | 0.0000 | 0.5728 | 0.9613 |
| 0.9 | 0.3324 | 0.0000 | 0.6676 | 0.9908 |
| 1.0 | 0.2401 | 0.0000 | 0.7599 | 1.0196 |
| 1.1 | 0.1478 | 0.0000 | 0.8522 | 1.0484 |
| 1.2 | 0.0554 | 0.0000 | 0.9446 | 1.0772 |
| 1.3 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0945 |

表 10: (5.5) を解いた結果

| $h$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x^T\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5440 | 0.3756 | 0.0804 | 0.6000 |
| 0.1 | 0.6522 | 0.2632 | 0.0846 | 0.6635 |
| 0.2 | 0.6323 | 0.2167 | 0.1509 | 0.7098 |
| 0.3 | 0.6125 | 0.1703 | 0.2172 | 0.7562 |
| 0.4 | 0.5927 | 0.1240 | 0.2834 | 0.8024 |
| 0.5 | 0.5755 | 0.0839 | 0.3406 | 0.8424 |
| 0.6 | 0.5584 | 0.0438 | 0.3978 | 0.8824 |
| 0.7 | 0.5412 | 0.0038 | 0.4550 | 0.9224 |
| 0.8 | 0.4457 | 0.0000 | 0.5543 | 0.9555 |
| 0.9 | 0.3421 | 0.0000 | 0.6579 | 0.9878 |
| 1.0 | 0.2385 | 0.0000 | 0.7615 | 1.0201 |
| 1.1 | 0.1519 | 0.0000 | 0.8481 | 1.0471 |
| 1.2 | 0.0655 | 0.0000 | 0.9345 | 1.0741 |
| 1.3 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0945 |

表 11: (5.2) を解いた結果

| $h$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x^T\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.4398 | 0.4349 | 0.1253 | 0.5812 |
| 0.1 | 0.4653 | 0.3595 | 0.1753 | 0.6385 |
| 0.2 | 0.4870 | 0.2916 | 0.2214 | 0.6904 |
| 0.3 | 0.4903 | 0.2332 | 0.2765 | 0.7399 |
| 0.4 | 0.5079 | 0.1761 | 0.3160 | 0.7838 |
| 0.5 | 0.5468 | 0.1152 | 0.3380 | 0.8243 |
| 0.6 | 0.6095 | 0.0464 | 0.3440 | 0.8643 |
| 0.7 | 0.6114 | 0.0000 | 0.3886 | 0.9038 |
| 0.8 | 0.4872 | 0.0000 | 0.5128 | 0.9426 |
| 0.9 | 0.3686 | 0.0000 | 0.6314 | 0.9796 |
| 1.0 | 0.2642 | 0.0000 | 0.7358 | 1.0121 |
| 1.1 | 0.1723 | 0.0000 | 0.8277 | 1.0408 |
| 1.2 | 0.0838 | 0.0000 | 0.9162 | 1.0684 |
| 1.3 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0945 |

謝辞

日頃からご教授くださり，本報告書の作成にあたっても細部に至るまで熱心なご指導を賜った福嶋雅夫教授に心より感謝致します．また日頃からお世話になり，本研究に対しても適切な助言をしていただいた山下信雄准教授や林俊介助教をはじめ福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

## 参考文献

[1] P.Artzner, F.Delbaen, J.M.Eber, and D.Heath, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol.9, pp.203-228, 1999.

[2] R.T.Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[3] R.T.Rockafellar and S.Uryasev, *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, Vol.2, pp.21-41, 2000.

[4] A.Shapiro and Y.Wardi, *Nondifferentiability of the steady-state function in discrete event dynamic systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, pp.1707-1711, 1994.

[5] 山井康浩, 吉羽要直，バリューアット・リスクと期待ショートフォールの比較分析，Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.45, pp.498-501, 2002.

[6] 山井康浩, 吉羽要直，リスク指標の性質に関する理論的整理 -VaR と期待ショートフォールの比較分析-，IMES Discussion Paper, Vol.20, pp.99-101, 2001.

[7] 枇々木規雄，金融工学と最適化，朝倉書店，2001.

[8] 枇々木規雄, 田辺隆人，ポートフォリオ最適化と数理計画法，朝倉書店，2005.