

特別研究報告書

DSM 通信方式における総レート最大化問題と  
部分的FDMAに基づく解法

指導教員 福嶋雅夫 教授  
林 俊介 助教

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成16年4月入学  
平成20年3月卒業

山本 大輔

平成20年1月31日提出

# DSM 通信方式における総レート最大化問題と 部分的 FDMA に基づく解法

山本 大輔

## 摘要

本報告書では、離散マルチトーン変調に対する DSM 通信方式を考える。この通信方式では、利用可能な周波数帯域は複数のトーンに分割されており、各ユーザーはトーンに対する伝送パワーの配分を状況に応じて変えることができる。その結果、複数のユーザーが同じトーンにアクセスすることができるため、クロストークと呼ばれる他のユーザーの信号による電磁干渉が発生し、十分なデータレートが得られないという問題が起こる。したがって、クロストークの影響を軽減し、すべてのユーザーがある種の「公的な最適性」を満足するようなスペクトル管理法を考えることが重要である。

本報告書では、各ユーザーのデータレートの総和である「総レート」を公的な最適性の指標として採用し、それを最大化する「総レート最大化問題」に焦点を絞る。しかし、総レート最大化問題は凸計画問題ではないため、大域的最適解を求めるのは一般に困難である。そこで、局所的最適解、もしくは十分大きな総レートをもつ実行可能解を求めるアプローチを考えることになる。一般に、すべてのトーンにおいてクロストークの影響が小さいときは、なるべく多くのトーンに伝送パワーを配分した方が総レートが大きくなり、クロストークの影響が大きいときは、1つのトーンを1人以下のユーザーで使うようなパワー配分、すなわち FDMA の方がより大きな総レートを達成することが知られている。

本報告書では、デジタル加入者線などでよく見られるクロストークの影響の大きいトーンと小さいトーンが混在している状況を想定する。このような状況においては、クロストークが強いトーンに対してのみ FDMA の構造をもつような、すなわち部分的 FDMA であるようなパワー配分が最適であることが期待される。この観点から、総レート最大化問題の実行可能解を部分的 FDMA に限定して解くことを考え、それに基づいたいくつかのアルゴリズムを提案する。最後に数値実験を行い、提案するアルゴリズムの有効性を検証する。

## 目次

1	序論	1
2	モデルの定式化	2
3	注水定理と IWFA	4
4	FDMA と部分的 FDMA	7
5	部分的 FDMA に基づくアルゴリズム	8
5.1	Hybrid Algorithm . . . . .	8
5.2	双対分解法 . . . . .	10
6	数値実験	13
7	結論	17

# 1 序論

近年、デジタル加入者線 (Digital Subscriber Line: DSL) や無線通信といった複数のユーザーが同時にコミュニケーションを行うようなシステムに対して、DSM (Dynamic Spectrum Management) という新しい通信方式が注目を集めている [14]。現在、一般的に用いられているのは SSM (Static Spectrum Management) という方式であるが、この方式ではユーザーのスペクトル密度が制限されているため、各ユーザーは十分なデータレートを得ることができない。しかし、DSM ではユーザーのスペクトル密度を状況に応じて変えることができるため、各ユーザーのデータレートを SSM に比べて大幅に改善させることが期待できる。

本報告書で扱うモデルでは、変調方式として離散マルチトーン (Discrete Multi-Tone: DMT) が採用されているものとする。DMT 変調では、利用可能な周波数帯域が複数の離散的なトーン (サブチャンネル) に分割されているため、各トーンに対する信号の伝送パワーの配分をもって、その信号のスペクトルとみなすことができる。したがって、DMT 変調を用いた DSM 通信方式では、各ユーザー (もしくはそれらを統括するセンターオフィス) は、各トーンへの伝送パワーを状況に応じて任意に変えることができる。

しかし、複数のユーザーが同じトーンに伝送パワーを配分した際に、クロストークと呼ばれる電磁干渉が発生し、その結果、ある特定のユーザーのデータレートを向上させようとする他のユーザーのデータレートが低下してしまうというジレンマが発生する。そこで、クロストークの影響を軽減し、各ユーザーのデータレートを向上させるような伝送パワー配分を考える必要がある。本報告書では、各ユーザーのデータレートの総和である「総レート (Sum-rate)」を公的な最適性の指標として採用し、それを最大化する「総レート最大化問題」に焦点を絞る。<sup>1</sup> 総レート最大化問題は、凹でない関数を目的関数としてもつため、しばしば複数の局所的最適解が存在する。さらに、総レート最大化問題の大域的最適解を求めることは NP 困難であることが知られている [7]。したがって、局所的最適解、もしくは十分大きな目的関数値をもつ実行可能解を求めるアプローチを考えることが重要となる。

総レート最大化問題、およびその他の伝送パワー配分問題に対して、これまで様々なアプローチが提案されてきた。それらは大きく分けて、ゲーム理論に基づく手法 [5, 14, 10, 12, 13, 15, 17]、双対理論 [1] に基づく手法 [2, 3, 9, 16, 18]、周波数分割多元接続 (Frequency Division Multiple Access: FDMA<sup>2</sup>) に基づく手法 [7] の 3 つに分類することができる。ゲーム理論に基づく手法の中で、最もよく知られているのが反復注水法 (Iterative Water-Filling Algorithm: IWFA) である [17]。この手法では、総レート最大化問題を直接解くことよりは、むしろ元の伝送パワー配分問題を非協力 Nash ゲームと考え、各ユーザーが自分自身のデータレートを独立に最大化するいうところに主眼が置かれている。具体的には、非協力ゲームにおける各プレイヤーの利得関数は各ユーザーのデータレートに対応しており、各々のユーザーは他のユーザーからの干渉をノイズとして扱うことにより、自身の最適なパワー配分を注水定理を用いて求める。さらに、これを順々に繰り返し、全ユーザーのパワー配分をある値に収束させることにより、最終的なパワー配分を求める。<sup>3</sup> 実際、クロストークが弱い場合には、IWFA が収束することが示されており [5, 10, 17]、得られるパワー配分によって十分大きな総レートが達成されることも分かっている。一方で、クロストークが強い場合には、IWFA は収束しないことも多く、たとえ収束したとしても十分な総レートを得ることができない。双対理論に基づいた手法も、ここ数年で盛んに研究されている。双対理論に基づく手法では、元の総レート最大化問題を直接解くかわりにラグランジュ双対問題を解くことを考える。双

<sup>1</sup>総レート以外にも公的な最適性の指標はこれまでにいくつか考えられている [4, 11]。

<sup>2</sup>1 つのトーンに対して、高々1人のユーザーにしか伝送パワーが配分されていない状況。詳細は4節で述べる。

<sup>3</sup>IWFA が収束した時点で各ユーザーが得ているパワー配分は、Nash 均衡解に他ならない。

対問題は凸最小化問題となり、しかも次元の低い独立な問題に分解することができるので、劣勾配法などを用いて効率的に解が得られることが期待できる。しかしながら、双対問題の目的関数を評価するためには非凹関数に対する最大化問題を解かなければならないので、双対問題が必ずしも正確に解けるという保証はない。その上、一般には双対ギャップが存在するため、たとえ双対問題が解けたとしても、それによって元の総レート最大化問題の大域的最適解が得られるとは限らない。FDMA に基づく手法は、Hayashi and Luo[7] により最近提案されたものである。彼らは、すべてのトーンにおいてクロストーク係数がある閾値よりも大きい場合には、総レート最大化問題の大域的最適解が完全 FDMA<sup>4</sup> の構造をもつことを証明した。さらに、解が完全 FDMA となるような制約を事前に付加することによって、総レート最大化問題を効率的に解く手法を提案した。実際、彼らの数値実験では、すべてのトーンにおいてクロストークが強い場合には、IWFA に比べてより良い解、すなわち、より大きな総レートを達成するような解が得られた。しかし、すべてのトーンにおいてクロストークが弱い場合には、この手法による解は IWFA による解よりも劣っていた。

Hayashi らの実験結果でも分かるように、すべてのトーンにおいてクロストークが弱い場合には、たとえ複数のユーザーが同じトーンを使うことになっても、なるべく多くのトーンに伝送パワーを配分した方が一般的に総レートが大きくなることが知られている。一方で、すべてのトーンにおいてクロストークが強い場合には、たとえ各ユーザーが使用できるトーンの数を少なくしても、1つのトーンを1人以下のユーザーで使うようなパワー配分、すなわち完全 FDMA の方がより大きな総レートを達成することが期待できる。しかし、現実の DSL などではクロストークが極端に強いトーンと弱いトーンが混在していることが知られている。このような状況においては、クロストークが強いトーンに対してのみ FDMA の構造をもつ解が、より良い総レートを返すことが予想される。そこで、本報告書では、一部のトーンに対してのみ FDMA の構造をもたせる部分的 FDMA という概念を導入し、総レート最大化問題の実行可能解を部分的 FDMA に限定して解くことを考える。

本報告書の構成は、次の通りである。第2節で本報告書で取り扱う通信モデルと、それに対する総レート最大化問題を定式化する。第3節では、注水定理と IWFA について説明する。第4節では FDMA と、部分的 FDMA について説明する。第5節では、部分的 FDMA の構造をもつ解を求めるためのアルゴリズムを提案する。第6節では、いくつかの数値実験を行い、提案したアルゴリズムの有効性を議論する。第7節では、まとめと今後の課題について述べる。

## 2 モデルの定式化

本節では、本報告書で取り扱う通信モデルについて説明し、総レート最大化問題を定式化する。本報告書では利用可能な帯域が  $N$  個のトーンに分割されているとし、 $K$  人のユーザーが各トーンを共有している場合を考える。以降では  $\mathcal{N}$  をトーンの集合  $\{1, \dots, N\}$  とし、 $\mathcal{K}$  をユーザーの集合  $\{1, \dots, K\}$  とする。一般に、 $N \gg K$  であることに注意する。 $x_l^n$  をユーザー  $l$  ( $l = 1, \dots, K$ ) がトーン  $n \in \mathcal{N}$  に対して送信した信号とする。このとき、ユーザー  $k \in \mathcal{K}$  はトーン  $n \in \mathcal{N}$  において、信号

$$\sum_{l=1}^K h_{lk}^n x_l^n + z_k^n$$

を受信する。ここで、 $h_{lk}^n$  はユーザー  $l$  と  $k$  の距離に依存する係数であり、 $z_k^n$  は平均 0 で分散  $N_0$  の複素正規分布に従うノイズである。このとき、必要な信号とノイズの比である SN 比 (Signal to

<sup>4</sup>すべてのトーンが FDMA であるようなパワー配分を完全 FDMA と呼ぶ。詳細は 4 節を参照のこと。

Noise Ratio : SNR) は

$$\text{SNR} = \frac{E(|h_{kk}^n x_k^n|^2)}{E(|\sum_{l \neq k} h_{lk}^n x_l^n + z_k^n|^2)} \quad (2.1)$$

で与えられる．ただし， $E(\cdot)$  は期待値を表す．SN 比 (2.1) を用いると，ユーザー  $k$  がトーン  $n$  において達成するデータレート  $R_k^n$  は，Shannon の定理 [6] より，

$$\begin{aligned} R_k^n(\mathbf{S}^n) &:= \log(1 + \text{SNR}) \\ &= \log\left(1 + \frac{|h_{kk}^n|^2 S_k^n}{N_0 + \sum_{l \neq k} |h_{lk}^n|^2 S_l^n}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

で与えられる．ただし， $\mathbf{S}^n := (S_1^n, \dots, S_K^n)^\top \in \mathfrak{R}^K$  であり， $S_k^n := E(|x_k^n|^2)$  はトーン  $n$  におけるユーザー  $k$  の信号の伝送パワーである．本報告書では，ユーザー  $k$  の全トーンに対する伝送パワーの合計はパワー容量  $P_k > 0$  によって抑えられるとする．つまり，以下が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^N S_k^n \leq P_k, \quad k \in \mathcal{K}$$

式 (2.2) における  $\log$  の内部の分数に対して，分子，分母ともに  $|h_{kk}^n|^2$  で割ると，

$$R_k^n(\mathbf{S}^n) = \log\left(1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n}\right) \quad (2.3)$$

となる．ここで， $\sigma_k^n := N_0/|h_{kk}^n|^2$  はトーン  $n$  におけるユーザー  $k$  のバックグラウンドノイズを， $\alpha_{lk}^n := |h_{lk}^n|^2/|h_{kk}^n|^2$  はトーン  $n$  におけるユーザー  $l$  から  $k$  への（正規化）クロストーク係数を表す．ただし，正規化したために，すべてのユーザーに対して  $\alpha_{kk}^n = 1$  となることに注意する．さらに，パワーベクトル  $\mathbf{S} := ((\mathbf{S}^1)^\top, \dots, (\mathbf{S}^N)^\top)^\top \in \mathfrak{R}^{NK}$  に対して，ユーザー  $k$  がトーン全体で達成するデータレート  $R_k$  は (2.3) を用いて以下で与えられる．

$$\begin{aligned} R_k(\mathbf{S}) &:= \sum_{n=1}^N R_k^n(\mathbf{S}^n) \\ &= \sum_{n=1}^N \log\left(1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

すべてのユーザーのデータレート  $R_k(\mathbf{S})$  ( $k \in \mathcal{K}$ ) が大きくなるように伝送パワーを配分することが DSM 本来の目的であるが，式 (2.4) でも分かるように，クロストークの影響のために，あるユーザーのデータレートを向上させようとするとき，他のユーザーのデータレートが低下する恐れがある．そこで，システム全体のパフォーマンスの評価基準を考える必要がある．具体的には，これまでに以下のような指標が提案されている [4, 11] ．

- 総レート： $\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{S})$
- 重みつき総レート： $\sum_{k=1}^K w_k R_k(\mathbf{S})$  ( $w_1, \dots, w_K$  は正定数)
- 幾何レート： $(\prod_{k=1}^K R_k(\mathbf{S}))^{1/K}$
- 調和レート： $K \left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{S})^{-1}\right)^{-1}$
- 最小レート： $\min_{1 \leq k \leq K} R_k(\mathbf{S})$

本報告書では、これらのうち、すべてのユーザーのデータレートの和である総レートをパフォーマンスの評価基準として採用する。総レート  $R$  は、(2.4) を用いて以下で表される。

$$\begin{aligned} R(\mathbf{S}) &:= \sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{S}) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n} \right) \end{aligned}$$

したがって、総レート最大化問題  $\text{SMP}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$  は以下で定義される。

$$\begin{aligned} \text{SMP}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}) \quad & \underset{\mathbf{S}}{\text{maximize}} \quad R(\mathbf{S}) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{S} \geq 0, \quad \sum_{n=1}^N \mathbf{S}^n \leq \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &:= (P_1, \dots, P_K)^\top \in \mathfrak{R}^K \\ \boldsymbol{\sigma} &:= (\sigma_1^1, \dots, \sigma_K^K)^\top \in \mathfrak{R}^{NK} \\ \boldsymbol{\alpha} &:= (\alpha_{11}^1, \dots, \alpha_{KK}^K)^\top \in \mathfrak{R}^{NK^2} \end{aligned}$$

である。一般的に総レート  $R(\mathbf{S})$  は凹関数ではない。これは、ユーザー  $k$  の伝送パワー  $S_k^n$  が他のユーザーのデータレート  $R_l(\mathbf{S})$  ( $l \neq k$ ) の  $\log$  の内部の分母に現れることから見てとれる。したがって、この問題は凸計画問題ではなく、大域的最適解を求めるのは一般に困難である。

### 3 注水定理とIWFA

前節で定式化した総レート最大化問題 (2.5) は、目的関数が凹ではないため、大域的最適解を求めることは一般に難しい。しかし、ある一人のユーザーに注目すれば、そのユーザーのデータレートは注水定理を用いることにより最大化できることが知られている。そこで、本節では、まず注水定理について説明し、その定理に基づいた総レート最大化問題に対する一つのアプローチである反復注水法 (IWFA) [17, Algorithm 1] を紹介する。

他のユーザーのパワーベクトル  $\mathbf{S}_l := (S_l^1, \dots, S_l^N)^\top \in \mathfrak{R}^N$  ( $l \neq k$ ) を固定し、ユーザー  $k$  のパワーベクトル  $\mathbf{S}_k := (S_k^1, \dots, S_k^N)^\top \in \mathfrak{R}^N$  のみを変数としてみたとき、ユーザー  $k$  のデータレートは

$$R_k(\mathbf{S}_k) = \sum_{n=1}^N \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{X_k^n} \right)$$

で与えられる。ただし、 $X_k^n := \sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n > 0$  はユーザー  $k$  からみたトーン  $n$  におけるノイズとクロストークの総和を表す。また、ここでは  $X_k^n$  を定数とみなしているため、 $R_k$  は定義域  $[0, +\infty)^N$  上で狭義凹である。したがって、ユーザー  $k$  のデータレート最大化問題

$$\begin{aligned} \text{UMP}_k(\{\mathbf{S}_l\}_{l \neq k}) \quad & \underset{\mathbf{S}_k}{\text{maximize}} \quad \sum_{n=1}^N \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{X_k^n} \right) \\ & \text{subject to} \quad \sum_{n=1}^N S_k^n \leq P_k, \quad \mathbf{S}_k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

の大域的最適解は唯一存在し、それは Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) を満たす点として与えられる。以下の命題は注水定理として知られており、ユーザー  $k$  のデータレート最大化問題 (3.1) の大域的最適解を与えている。

命題 1. (注水定理)  $\lambda_k$  を次の等式を満たすような正数とする。

$$\sum_{n=1}^N \max\{0, \lambda_k - X_k^n\} = P_k \quad (3.2)$$

このとき、ユーザー  $k$  に対するデータレート最大化問題 (3.1) の大域的最適解は、

$$S_k^n = \max\{0, \lambda_k - X_k^n\}, \quad n \in \mathcal{N} \quad (3.3)$$

で与えられる。

証明. 問題 (3.1) の大域的最適解を  $S_k = (S_k^1, \dots, S_k^N)^\top$  とする。このとき、KKT 条件より、ラグランジュ乗数  $\mu_k$  が存在して以下が成り立つ。

$$\mu_k \geq 0, \quad \sum_{n=1}^N S_k^n - P_k \leq 0, \quad \mu_k \left( \sum_{n=1}^N S_k^n - P_k \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$S_k^n \geq 0, \quad \mu_k - \frac{1}{X_k^n + S_k^n} \geq 0, \quad S_k^n \left( \mu_k - \frac{1}{X_k^n + S_k^n} \right) = 0, \quad n \in \mathcal{N} \quad (3.5)$$

ここで、(3.5) および  $X_k^n > 0$  より

$$\mu_k \geq \frac{1}{X_k^n + S_k^n} > 0$$

であることに注意すると、相補性条件 (3.4) より

$$\sum_{n=1}^N S_k^n - P_k = 0 \quad (3.6)$$

を得る。さらに、 $\lambda_k := \mu_k^{-1} > 0$  とおくと、相補性条件 (3.5) は以下の相補性条件 (i)–(iii) に等価に書き換えることができる。

$$(i) S_k^n \geq 0, \quad (ii) \lambda_k - (X_k^n + S_k^n) \leq 0, \quad (iii) S_k^n (\lambda_k - (X_k^n + S_k^n)) = 0, \quad n \in \mathcal{N}$$

次に、 $S_k$  と  $\lambda_k$  が (3.2) および (3.3) を満たすことを示す。まず  $\lambda_k > X_k^n$  のときを考える。このとき、(ii) より  $S_k^n \geq \lambda_k - X_k^n > 0$  を得る。したがって (iii) より  $\lambda_k - (X_k^n + S_k^n) = 0$ 、すなわち  $S_k^n = \lambda_k - X_k^n$  を得る。次に  $\lambda_k \leq X_k^n$  の場合を考える。このとき、 $S_k^n > 0$  ならば  $\lambda_k - (X_k^n + S_k^n) < \lambda_k - X_k^n \leq 0$  となるが、これは (iii) に矛盾する。したがって、 $S_k^n = 0$  を得る。以上より、

$$S_k^n = \begin{cases} \lambda_k - X_k^n & \text{if } \lambda_k > X_k^n \\ 0 & \text{if } \lambda_k \leq X_k^n \end{cases}$$

となり、式 (3.3) を得る。さらに、(3.3) を (3.6) に代入することにより式 (3.2) を得る。  $\square$



式 (3.2) を満たすような  $\lambda_k > 0$  は必ず一意に存在する . 実際 ,  $w(\lambda) := \sum_{n=1}^N \max\{0, \lambda - X_k^n\}$  ,  $X_0 := \min_{n \in \mathcal{N}} X_k^n$  とおくと , 関数  $w$  は  $[X_0, +\infty)$  上で連続かつ単調増加であり ,  $w(X_0) = 0$  および  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} w(\lambda) = +\infty$  を満たす .

ところで , 命題 1 は次のようにも理解することができる . 各地点  $n = 1, \dots, N$  ( トーンに相当 ) での地面の高さが  $X_k^n$  であるような容器を考える ( 図 1 ) . この容器に対して総量  $P_k$  の水を流し込んだとき , 各地点での水量が  $S_k^n$  に , 水面の高さが  $\lambda_k$  に相当する . このことが注水定理という名前の由来にもなっている .

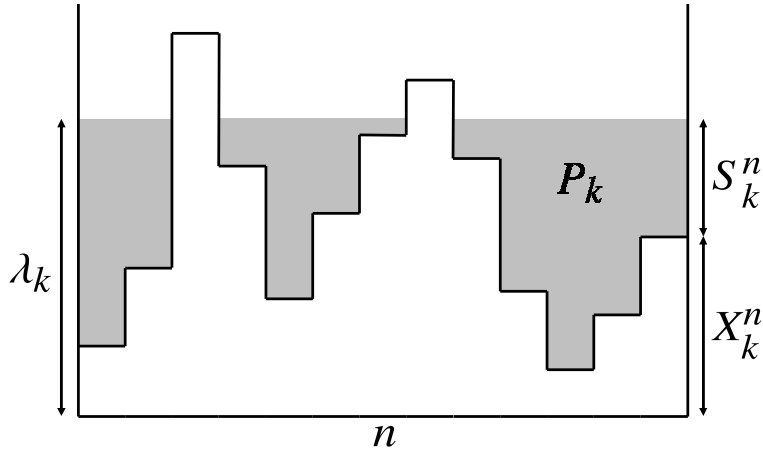


図 1: 注水定理

IWFA は , 注水定理を用いてユーザー 1 からユーザー  $K$  までの問題 (3.1) を何度も繰り返し解いていくアルゴリズムである . このアルゴリズムの概要を以下に示す .

IWFA

**Step 0** 初期点  $S^{(0)}$  を与える .  $\nu := 0$  とする .

**Step 1** 注水定理を用いてユーザー 1 からユーザー  $K$  まで順番に問題 (3.1) を解く . ユーザー  $k$  について問題 (3.1) を解く際 , ユーザー 1 からユーザー  $k-1$  までの問題 (3.1) を解いた結果を用いる . すなわち , 以下の手順を実行する .

**Step 1-0**  $k := 1$  とする .

**Step 1-1** 問題  $\text{UMP}_k(\{S_l^{(\nu+1)}\}_{l=1}^{k-1} \cup \{S_l^{(\nu)}\}_{l=k+1}^K)$  を解き , 得られた解を  $S_k^{(\nu+1)}$  とする .

**Step 1-2**  $k = K$  ならば終了する . そうでなければ  $k := k + 1$  として Step 1-1 に戻る .

**Step 2** 終了条件を満たしているならば終了する . そうでなければ ,  $\nu := \nu + 1$  として Step 1 に戻る .

すべてのトーンにおいてクロストークが十分に弱い場合は , IWFA が収束することが示されてお

り [5, 10, 17], 得られる実行可能解が達成する総レートが十分大きくなることが知られている。しかし IWFA は, すべてのトーンにおいてクロストークが強い場合には収束しないことも多く, たとえ収束したとしても十分大きな総レートを得ることができない。

## 4 FDMA と部分的 FDMA

前節でも述べたように, IWFA はクロストークが大きい問題に対して十分な性能を発揮しない。このような欠点を克服するため, Hayashi and Luo[7] は (完全) FDMA という概念を導入し, それに基づくアルゴリズムをいくつか提案した。本節では, FDMA の概念とその背景を説明するとともに, FDMA を一部分のトーンのみ限定した部分的 FDMA という新しい概念を定義する。

まず, FDMA と完全 FDMA の概念を定義する。

定義 1. パワーベクトル  $S \in \mathfrak{R}^{NK}$  が与えられているものとする。このとき,

$$S_k^n > 0 \Rightarrow S_l^n = 0, \quad (l, k) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \ (l \neq k) \quad (4.1)$$

が成立すれば, パワーベクトル  $S$  はトーン  $n$  において FDMA であるという。さらに, すべてのトーン  $n \in \mathcal{N}$  において FDMA であるとき, パワーベクトル  $S$  は完全 FDMA<sup>5</sup> であるという。

言い換えれば, パワーベクトル  $S$  がトーン  $n$  において FDMA であるとは, トーン  $n$  に伝送パワーを配分しているユーザーが高々一人しか存在しないということである。Hayashi and Luo[7] は, すべてのトーンにおいてクロストークが強い場合には, 総レート最大化問題 (2.5) の大域的最適解が完全 FDMA であることを証明した。以下の定理はその十分条件を与えている。

定理 1. [7, Theorem 3.1] 総レート最大化問題 (2.5) の大域的最適解  $S^*$  に対して, ある整数  $C \geq 2$  が存在して

$$\begin{aligned} & \bullet \min_{k \in \mathcal{K}} |\{n \mid (S_k^n)^* > 0\}| \geq C \\ & \bullet \sum_{n=1}^N (S^n)^* = P \end{aligned}$$

を満たすとする。ただし,  $|\cdot|$  は集合に属する要素の数を表す。このとき, クロストーク係数が

$$\begin{aligned} \alpha_{lk}^n > \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \alpha_{lk}^n \alpha_{kl}^n > \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{C-1}\right)^2 \\ n \in \mathcal{N}, \quad (l, k) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \ (l \neq k) \end{aligned}$$

を満たすならば,  $S^*$  は完全 FDMA である。

$C$  が十分大きければ,  $1 + \frac{1}{C-1} \simeq 1$  となり,  $\alpha_{lk}^n \alpha_{kl}^n > \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{C-1})^2$  という条件は実質的に  $\alpha_{lk}^n > \frac{1}{2}$  という条件に含まれる。実際, 多くの応用問題において  $N \gg K$  であるので,  $C$  は十分大きいものと考えられる。さらに, Hayashi and Luo[7] の数値実験では,  $\alpha_{lk}^n \leq \frac{1}{2}$  であるような場合でも, しばしば完全 FDMA である解の方が IWFA よりも良い総レートを与えることが報告されている。

このように, すべてのトーンにおいてクロストークが強い場合には, 総レート最大化問題 (2.5) の最適解が完全 FDMA であることが理論的に示されている。一方, DSL などでは, クロストーク

<sup>5</sup>[7] ではこれを単に FDMA と呼んだが, 本報告書では, 部分的 FDMA との対応関係をはっきりさせるため, あえて完全 FDMA と呼ぶ。

が強いトーンと弱いトーンが混在しているため、完全 FDMA であるような解よりも、むしろクロストークが強いトーンにのみ FDMA の構造をもつような解の方がより大きな総レートを与えることが知られている。このような一部のトーンにおいてのみ FDMA の構造をもつような解を部分的 FDMA という。

定義 2. あるパワーベクトル  $S$  が、一部のトーン  $n \in \mathcal{F} \subset \mathcal{N}$  においてのみ FDMA であるとき、パワーベクトル  $S$  は部分的 FDMA であるという。

次節では、部分的 FDMA を事前に制約に加えることにより、総レート最大化問題 (2.5) を効率的に解くアルゴリズムを提案する。

## 5 部分的 FDMA に基づくアルゴリズム

本節では、最適解が部分的 FDMA と予想されるような総レート最大化問題 (2.5) に対して、その実行可能領域を部分的 FDMA に限定し、その構造を活用することにより、近似最適解を効率的に計算するアルゴリズムを提案する。

まず、適当な方針に従い、トーン集合  $\mathcal{N}$  を二つの集合  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{N}\mathcal{F}$  に分割する。ただし、これらは

$\mathcal{F}$  : FDMA 制約を付加するトーンの集合

$\mathcal{N}\mathcal{F}$  : FDMA 制約を付加しないトーンの集合

を意味し、 $\mathcal{F} \cup \mathcal{N}\mathcal{F} = \mathcal{N}$  および  $\mathcal{F} \cap \mathcal{N}\mathcal{F} = \emptyset$  を満たす。このとき、部分的 FDMA 制約を付加した総レート最大化問題は

$$\begin{aligned} & \underset{S}{\text{maximize}} && R(S) \\ & \text{subject to} && S^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \quad (\forall n \in \mathcal{F}) \\ & && S^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{F}} \quad (\forall n \in \mathcal{N}\mathcal{F}) \\ & && \sum_{n=1}^N S^n \leq P \end{aligned} \tag{5.1}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} & := \{S^n \in \mathbb{R}^K \mid S^n \geq 0, S_l^n S_k^n = 0, (\forall l \neq k)\} \\ \mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{F}} & := \{S^n \in \mathbb{R}^K \mid S^n \geq 0\} \end{aligned}$$

である。

集合  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{N}\mathcal{F}$  への分割は問題 (5.1) を解く前に決めておく必要があり、その決め方によって問題 (5.1) の最適解も異なる。どのように分割するのが最適であるかは自明ではないが、本報告書では、トーンにおけるクロストーク係数の大きさを分割の指標とし、クロストーク係数が大きいトーンに対してのみ FDMA 制約を付加することが有効であると考えられる。

### 5.1 Hybrid Algorithm

まず、Hybrid Algorithm について述べる。このアルゴリズムは、完全 FDMA に基づく手法である逐次トーン配分法 [7, Algorithm 2] と、IWFA とを組み合わせたものである。

Hybrid Algorithm では、まず、FDMA 制約を付加したトーン集合  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  に分割する。ただし、

$\mathcal{F}_k$  : ユーザー  $k \in \mathcal{K}$  が使うことのできる FDMA 制約を付加したトーンの集合

であり、以下が成立することに注意する。

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{F}_l \cap \mathcal{F}_k = \emptyset \quad (l \neq k)$$

分割の方法としては様々な手法が考えられるが、本報告書では逐次トーン配分法を適用する。この手法では、あるトーンをユーザーに与えたときに一番データレートを増やすユーザーを  $\bar{k}$  とすると、そのトーンをトーン集合  $\mathcal{F}_{\bar{k}}$  に加えることによって、トーン集合  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  を逐次構築していく。逐次トーン配分法の概要を以下に述べる。

#### 逐次トーン配分法

**Step 0** トーン集合  $\mathcal{F}$  の要素を  $n_1, \dots, n_{|\mathcal{F}|}$  とする。すべての  $k \in \mathcal{K}$  に対して、 $\mathcal{F}_k^{(0)} := \emptyset$ ,  $\bar{R}_k^{(0)} := 0$  とする。  $\nu := 0$  とする。

**Step 1** すべての  $k \in \mathcal{K}$  に対して、以下の問題  $\text{RMP}_k(\mathcal{F}_k^{(\nu)} \cup \{n_{\nu+1}\})$  を解き、最適値  $\bar{R}'_k$  を求める。

$$\begin{aligned} \text{RMP}_k(\mathcal{F}_k) \quad & \text{maximize} && \sum_{n \in \mathcal{F}_k} \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n} \right) \\ & \text{subject to} && \sum_{n \in \mathcal{F}_k} S_k^n \leq P_k \\ & && S_k^n \geq 0 \quad (n \in \mathcal{F}_k) \\ & && S_k^n = 0 \quad (n \notin \mathcal{F}_k) \end{aligned}$$

**Step 2** 次式を満たす  $\bar{k}$  を 1 つ求める。

$$\bar{k} \in \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{K}} \left( \bar{R}'_k - \bar{R}_k^{(\nu)} \right)$$

その後、すべての  $k \in \mathcal{K}$  に対して、

$$\mathcal{F}_k^{(\nu+1)} := \begin{cases} \mathcal{F}_k^{(\nu)} \cup \{n_{\nu+1}\} & (k = \bar{k}) \\ \mathcal{F}_k^{(\nu)} & (k \neq \bar{k}) \end{cases} \quad \bar{R}_k^{(\nu+1)} := \begin{cases} \bar{R}'_k & (k = \bar{k}) \\ \bar{R}_k^{(\nu)} & (k \neq \bar{k}) \end{cases}$$

と更新する。

**Step 3**  $\nu := \nu + 1$  とする。  $\nu = |\mathcal{F}|$  ならば、 $\mathcal{F}_1^{(\nu)}, \dots, \mathcal{F}_K^{(\nu)}$  を出力して終了する。そうでなければ Step 1 に戻る。

Step 1 において部分問題の目的関数が  $\sum_{n \in \mathcal{F}_k} \log(1 + S_k^n / \sigma_k^n)$  となっているが、これは  $\mathcal{F}_k$  に属するすべてのトーンがユーザー  $k$  にのみ配分されており、他のユーザーからのクロストークが発生しないためである。

逐次トーン配分法によってトーン集合  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  に分割すると, ユーザー  $k$  はトーン  $n \in \mathcal{F}_l$  ( $l \neq k$ ) を使うことができない. このことは, ユーザー  $k$  のトーン  $n \in \mathcal{F}_l$  ( $l \neq k$ ) におけるノイズ  $\sigma_k^n$  を  $\infty$  とみなすことによって実現できる. そこで, 仮想のノイズ  $\bar{\sigma} := (\bar{\sigma}_1^1, \dots, \bar{\sigma}_K^K)^\top \in \mathbb{R}^{NK}$  を

$$\bar{\sigma}_k^n = \begin{cases} \sigma_k^n & (n \in \mathcal{NF} \text{ or } n \in \mathcal{F}_k) \\ \infty & (n \in \mathcal{F} \text{ and } n \notin \mathcal{F}_k) \end{cases} \quad (5.2)$$

で定義し,  $\sigma$  の代わりに  $\bar{\sigma}$  を用いた問題  $\text{SMP}(\bar{\sigma}, \alpha, P)$  に対して IWFA を実行することにより, 部分的 FDMA の構造を持つ近似最適解を得ることができる.

以上をまとめた Hybrid Algorithm の概要を以下に述べる.

Hybrid Algorithm

**Step 0** 逐次トーン配分法を行うことにより, FDMA 制約を付加したトーン集合  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  に分割する.

**Step 1** 仮想ノイズ  $\bar{\sigma}$  を (5.2) で定め, 問題  $\text{SMP}(\bar{\sigma}, \alpha, P)$  に対して IWFA を実行する.

## 5.2 双対分解法

次に, 双対分解法について述べる. このアルゴリズムは, 双対理論を用いることにより, 部分的 FDMA の構造をもつ解を効率的に求めるものである. 問題 (5.1) の双対問題は凸最小化問題となるが, 双対関数の値を評価するには非凸関数の最大化問題を解かなければならない. しかし, この最大化問題はトーンごとの独立な問題に分解することができるので, 分解した問題をうまく解くことができれば, 劣勾配法などを用いて効率的に双対問題を解くことができる.

以下の記号を導入する.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}} &:= \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \{\mathbf{S}^n \in \mathbb{R}^K \mid 0 \leq S_k^n \leq P_k, k \in \mathcal{K}\} \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{NF}} &:= \mathcal{S}_{\mathcal{NF}} \cap \{\mathbf{S}^n \in \mathbb{R}^K \mid 0 \leq S_k^n \leq P_k, k \in \mathcal{K}\} \\ &= \{\mathbf{S}^n \in \mathbb{R}^K \mid 0 \leq S_k^n \leq P_k, k \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^N S_k^n \leq P_k, k \in \mathcal{K}$  という制約の下では,  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  を  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}$  を  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{NF}}$  としても問題 (5.1) の制約領域は変わらない. 本節では, 非有界集合  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \mathcal{S}_{\mathcal{NF}}$  の代わりに有界集合  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{NF}}$  を用いて双対関数を定義し, その劣勾配を使って問題 (5.1) の双対問題を解く.

まず, 問題 (5.1) のラグランジュ関数を定義する. 不等式制約  $\sum_{n=1}^N \mathbf{S}^n \leq P$  に対するラグランジュ乗数を  $\lambda$  とすると, ラグランジュ関数  $L: \mathbb{R}^{NK} \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$\begin{aligned} L(\mathbf{S}, \lambda) &:= R(\mathbf{S}) - \lambda^\top \left( \sum_{n=1}^N \mathbf{S}^n - P \right) \\ &= \sum_{n=1}^N R^n(\mathbf{S}^n) - \lambda^\top \left( \sum_{n=1}^N \mathbf{S}^n - P \right) \end{aligned}$$

と書ける．ただし，

$$R^n(\mathbf{S}^n) := \sum_{k=1}^K \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n} \right)$$

であり，トーン  $n$  における各ユーザーのデータレートの総和を表す．したがって，問題 (5.1) の双対関数は， $\lambda \in \mathbb{R}^K$  に対して，

$$\begin{aligned} d(\lambda) &:= \max \left\{ L(\mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) \mid \mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}} (n \in \mathcal{F}), \mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{N}\mathcal{F}} (n \in \mathcal{N}\mathcal{F}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^K \lambda_k P_k + \sum_{n \in \mathcal{F}} \max_{\mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}} \left( R^n(\mathbf{S}^n) - \sum_{k=1}^K \lambda_k S_k^n \right) + \sum_{n \in \mathcal{N}\mathcal{F}} \max_{\mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{N}\mathcal{F}}} \left( R^n(\mathbf{S}^n) - \sum_{k=1}^K \lambda_k S_k^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \lambda_k P_k + \sum_{n \in \mathcal{F}} \max_{\mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}} \sum_{k=1}^K \left( \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n} \right) - \lambda_k S_k^n \right) \\ &\quad + \sum_{n \in \mathcal{N}\mathcal{F}} \max_{\mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{N}\mathcal{F}}} \sum_{k=1}^K \left( \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n} \right) - \lambda_k S_k^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \lambda_k P_k + \sum_{n \in \mathcal{F}} \max_{k=1, \dots, K} M_k^n(\lambda_k) \\ &\quad + \sum_{n \in \mathcal{N}\mathcal{F}} \max_{\mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{N}\mathcal{F}}} \sum_{k=1}^K \left( \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n} \right) - \lambda_k S_k^n \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} M_k^n(\lambda_k) &:= \max_{0 \leq S_k^n \leq P_k} \left( \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n} \right) - \lambda_k S_k^n \right) \\ &= \log \left( 1 + \frac{\bar{S}_k^n}{\sigma_k^n} \right) - \lambda_k \bar{S}_k^n \\ \bar{S}_k^n &:= \begin{cases} \mathcal{P}_k(\lambda_k^{-1} - \sigma_k^n) & \text{if } \lambda_k > 0 \\ P_k & \text{if } \lambda_k \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_k(\cdot)$  : 閉区間  $[0, P_k]$  への射影

である．パワー容量の制約が無い場合，双対関数 (5.3) はトーンごとに分解されている点に注意する．

双対関数 (5.3) は，一般に微分不可能である．しかし，

$$\hat{\mathbf{S}} \in \operatorname{argmax} \left\{ L(\mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) \mid \mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}} (n \in \mathcal{F}), \mathbf{S}^n \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{N}\mathcal{F}} (n \in \mathcal{N}\mathcal{F}) \right\} \quad (5.4)$$

とすると，

$$\left( P_1 - \sum_{n=1}^N \hat{S}_1^n, P_2 - \sum_{n=1}^N \hat{S}_2^n, \dots, P_K - \sum_{n=1}^N \hat{S}_K^n \right)^\top \quad (5.5)$$

が双対関数 (5.3) の劣勾配であることは簡単に示すことができる．したがって，問題 (5.1) の双対問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && d(\boldsymbol{\lambda}) \\ &\text{subject to} && \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

に対して劣勾配法を適用することができる．双対分解法の概要を以下に述べる．

#### 双対分解法

**Step 0** 初期点  $\lambda^{(0)}$  を決める． $\nu := 0$  とする．

**Step 1** すべてのトーン  $n \in \mathcal{N}$  に対して， $(\hat{S}^n)^{(\nu)}$  を以下の手順で計算する：

- $n \in \mathcal{F}$  ならば， $\bar{k} \in \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{K}} \{M_k^n(\lambda_k)\}$  となるユーザー  $\bar{k}$  を 1 人選び，

$$(\hat{S}_k^n)^{(\nu)} := \begin{cases} M_k^n(\lambda_k) & (k = \bar{k}) \\ 0 & (k \neq \bar{k}) \end{cases}$$

とする．

- $n \in \mathcal{NF}$  ならば，問題

$$\begin{aligned} \underset{S^n}{\text{maximize}} \quad & \sum_{k=1}^K \left( \log \left( 1 + \frac{S_k^n}{\sigma_k^n + \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n S_l^n} \right) - \lambda_k S_k^n \right) \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq S_k^n \leq P_k, \quad k \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (5.7)$$

を解き，その解を  $(\hat{S}^n)^{(\nu)}$  とする．

さらに，双対関数 (5.3) の劣勾配

$$g_k^{(\nu)} := P_k - \sum_{n=1}^N (\hat{S}_k^n)^{(\nu)}, \quad k \in \mathcal{K}$$

を計算する．

**Step 2** 双対変数  $\lambda$  を次の式で更新する．

$$\lambda_k^{(\nu+1)} = [\lambda_k^{(\nu)} - \beta^{(\nu)} g_k^{(\nu)}]_+, \quad k \in \mathcal{K} \quad (5.8)$$

ただし， $[\cdot]_+ = \max\{0, \cdot\}$  であり， $\beta^{(\nu)} > 0$  は適当なルールによって定められたステップサイズである．

**Step 3** 終了条件が満たされていれば，Step 4 に進む．そうでなければ， $\nu := \nu + 1$  として Step 1 に戻る．

**Step 4**  $\|g^{(\bar{\nu})}\| = \min \{\|g^{(0)}\|, \dots, \|g^{(\nu)}\|\}$  をみたく  $\bar{\nu}$  を求める．さらに， $(\hat{S}^n)^{(\bar{\nu})}$  を用いて主問題 (5.1) の実行可能解  $S$  を以下の方法で生成する．

$$S_k = \frac{P_k}{\sum_{n=1}^N (\hat{S}_k^n)^{(\bar{\nu})}} (\hat{S}_k^n)^{(\bar{\nu})}, \quad k \in \mathcal{K}$$

本研究では，問題 (5.7) を解く際に， $S_k^n$  のみを変数とした 1 変数の最大化問題を各ユーザーで順次繰り返し解く方法を用いた [18]．問題 (5.7) は非凹最大化問題であるため，この手法では必ずしも大域的最適解が求まる保証はないが， $n \in \mathcal{NF}$  に対する  $\alpha_{lk}^n$  の値が十分に小さければ，目的関

数は凹関数に似た性質をもち，その結果，大域的最適解が求まることが多くなると期待できる．

## 6 数値実験

本節では，前節で提案したアルゴリズムの有効性を確かめるために行ったいくつかの数値実験と，それによって得られた結果を報告する．実験は CPU が 3.20GHz の Pentium 4，メモリが 4.0GB の計算機上で行い，アルゴリズムは MATLAB7.0 を用いて実装した．

本実験を通して，IWFA および Hybrid Algorithm の初期点  $S^{(0)}$  は

$$(S_k^n)^{(0)} = \gamma_k^n \max_{k \in \mathcal{K}} P_k$$

とする．ただし， $\gamma_k^n$  は区間  $[0, 1]$  に対する一様乱数として生成する．また，IWFA の終了条件として，

$$\|S^{(\nu)} - S^{(\nu-1)}\| \leq 10^{-4} \quad \text{or} \quad \nu \geq 300$$

を採用する．

一方，双対分解法の初期点は

$$\lambda^{(0)} = (1, \dots, 1)^\top$$

とする．また，ステップサイズ  $\beta^{(\nu)}$  は以下のようにして定める．これは，[8] で提案されたステップサイズルールを修正したものである．

$$\beta^{(\nu)} := \theta^{(\nu)} (d(\lambda^{(\nu)}) - L^*) / \|g^{(\nu)}\|^2$$

ここで，

$$\theta^{(\nu)} := \begin{cases} 2 & \text{if } \nu = 0 \\ \theta^{(\nu-1)} / 2 & \text{if } \|g^{(\nu)}\| > \|g^{(\nu-1)}\| \\ \theta^{(\nu-1)} & \text{if } \|g^{(\nu)}\| \leq \|g^{(\nu-1)}\| \end{cases}$$

であり， $L^*$  は，双対関数  $d(\lambda)$  の下界値である．本実験では， $L^*$  として Hybrid Algorithm によって計算した総レートをを用いる．終了条件としては，

$$\|\lambda^{(\nu)} - \lambda^{(\nu-1)}\| \leq 10^{-4} \quad \text{or} \quad \nu \geq 300$$

を採用する．

### 【実験 1】既存のアルゴリズムと提案するアルゴリズムの比較

本実験では，クロストークが強いトーンと弱いトーンが混在するような問題を生成し，それに対して既存のアルゴリズムである IWFA，逐次トーン配分法と，提案するアルゴリズムである Hybrid Algorithm，双対分解法とを比較する．以下の方法で各  $N$  に対してテスト問題 (2.5) を 100 個作成し，総レートと計算時間の平均を比較する．

- ユーザーの数は  $K = 4$  とする．



- トーンの数  $N = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  とする .
- ノイズ  $\sigma_k^n$  は  $[0, 0.01]$  の一様分布から生成する .
- トーン  $n \in \mathcal{N}$  に対して , クロストーク係数は  $\alpha_{lk}^n = 10^{r_{lk}^n}$  ( $l \neq k$ ) とする . ただし ,  $r_{lk}^n$  は  $\left[-6 + \frac{7(n-1)}{N-1}, -4 + \frac{7(n-1)}{N-1}\right]$  の一様分布から生成する .
- パワー容量  $P_k$  は  $[\frac{N}{2}, N]$  の一様分布から生成する .

本実験ではトーン  $n$  に対して ,

$$\frac{1}{K(K-1)} \sum_{l \neq k} \alpha_{lk}^n > 0.1 \quad (6.1)$$

が成立すればクロストーク係数が十分大きいと判断し , FDMA 制約を付加した . 結果を表 1 , 表 2 に示す . ただし , 表 2 の括弧内の数字は , 各 100 回の試行のうち , 収束しなかった ( 最大反復回数を超えてしまったためにアルゴリズムが終了した ) 回数を表す . IWFA については収束しない場合があったため , 収束した問題のみに対する平均値も載せる .

表 1: 総レートの平均

	IWFA	逐次トーン配分法	Hybrid	双対分解法
$N = 16$	187.0	122.0	201.4	208.1
$N = 32$	374.1	247.9	403.4	417.3
$N = 64$	745.5	495.6	804.2	831.3
$N = 128$	1487.4	994.0	1607.8	1661.4
$N = 256$	2969.4	1988.8	3215.6	3319.7
$N = 512$	5943.8	3987.1	6437.8	6646.8

表 2: 計算時間の平均 ( 秒 )

	IWFA	( 収束した問題のみ )	逐次トーン配分法	Hybrid	双対分解法
$N = 16$	3.1e-01 (13)	8.9e-02	1.5e-03 (0)	3.5e-02 (0)	1.4e+01 (0)
$N = 32$	1.4e+00 (36)	2.0e-01	3.0e-03 (0)	7.4e-02 (0)	3.2e+01 (0)
$N = 64$	3.6e+00 (45)	6.4e-01	5.9e-03 (0)	1.6e-01 (0)	6.5e+01 (0)
$N = 128$	1.2e+01 (76)	2.2e+00	1.2e-02 (0)	3.4e-01 (0)	1.4e+02 (0)
$N = 256$	2.7e+01 (98)	2.6e+00	2.2e-02 (0)	6.7e-01 (0)	3.4e+02 (0)
$N = 512$	5.8e+01 (100)	-	4.9e-02 (0)	1.5e+00 (0)	8.2e+02 (0)

表 1 より , 提案する手法が , 既存のアルゴリズムよりも良い総レートを与えることがわかる . さらに , 提案した 2 つの手法を比べると , Hybrid Algorithm よりも双対分解法の方が総レートが大きくなっていることがわかる . しかし , 表 2 より , 双対分解法は Hybrid Algorithm に比べて計算時間が長くなっていることが見てとれる . これは , 双対分解法は双対関数値を求めるために , さ

らに内部反復を行う必要があるからである．また，Hybrid Algorithm は仮定のノイズ  $\sigma$  を用いた SMP( $\sigma, \alpha, P$ ) に対して IWFA を適用した手法であるが，IWFA が収束しないような問題に対しても収束しており，計算時間も短くなることわかる．

### 【実験 2】FDMA 制約を付加するための条件と総レートの関係

本実験では，実験 1 と同様の問題に対して FDMA 制約を付加するトーンの集合  $\mathcal{F}$  と，付加しないトーンの集合  $\mathcal{NF}$  の境界を動かしながら，Hybrid Algorithm によって得られた解に対する総レートの変化を観察する．

まず，テスト問題 (2.5) を以下の方法で 10 個生成する．

- ユーザーの数は  $K = 4$  とする．
- トーン数は  $N = 256$  とする．
- ノイズ  $\sigma_k^n$  は  $[0, 0.01]$  の一様分布から生成する．
- トーン  $n \in \mathcal{N}$  に対して，クロストーク係数は  $\alpha_{lk}^n = 10^{r_{lk}^n}$  ( $l \neq k$ ) とする．ただし， $r_{lk}^n$  は  $\left[-6 + \frac{7(n-1)}{N-1}, -4 + \frac{7(n-1)}{N-1}\right]$  の一様分布から生成する．
- パワー容量  $P_k$  は  $[\frac{N}{2}, N]$  の一様分布から生成する．

さらに，集合  $\mathcal{NF}$  と  $\mathcal{F}$  を

$$\mathcal{NF} = \{1, \dots, i\}, \quad \mathcal{F} = \{i+1, \dots, N\}$$

で定める．この  $i$  を 0 から 256 まで動かすことにより，FDMA 制約を付加するトーンと付加しないトーンの境界を変える．なお，本実験ではトーンの番号  $n$  が小さいほど，クロストーク係数が小さくなる傾向がある点に注意する．

結果を表 3，図 2 に示す．ただし， $i = 0$  のときは，すべてのトーンに対し FDMA 制約を付加しているので，逐次トーン配分法に対応し， $i = 256$  のときは，すべてのトーンに対し FDMA 制約を付加していないので，IWFA に対応することに注意する．

表 3: FDMA 制約を付加するトーンを変えた場合の総レート ( $\times 10^3$ )

	問題 1	問題 2	問題 3	問題 4	問題 5	問題 6	問題 7	問題 8	問題 9	問題 10
$i = 0$	2.01	1.98	2.00	2.02	2.00	2.00	1.98	1.94	1.98	1.99
$i = 32$	2.49	2.46	2.47	2.49	2.48	2.48	2.45	2.40	2.46	2.46
$i = 64$	2.88	2.87	2.87	2.90	2.88	2.88	2.86	2.80	2.88	2.86
$i = 96$	3.15	3.14	3.13	3.16	3.15	3.14	3.10	3.07	3.13	3.13
$i = 128$	3.22	3.22	3.21	3.24	3.24	3.22	3.19	3.16	3.22	3.22
$i = 160$	3.14	3.16	3.15	3.17	3.17	3.13	3.12	3.10	3.18	3.16
$i = 192$	3.03	3.05	3.05	3.08	3.08	3.05	3.02	3.01	3.08	3.06
$i = 224$	2.98	3.00	2.99	3.04	3.03	3.00	2.96	2.96	3.05	3.02
$i = 256$	2.94	2.96	2.95	3.00	3.01	2.97	2.93	2.92	3.02	2.97

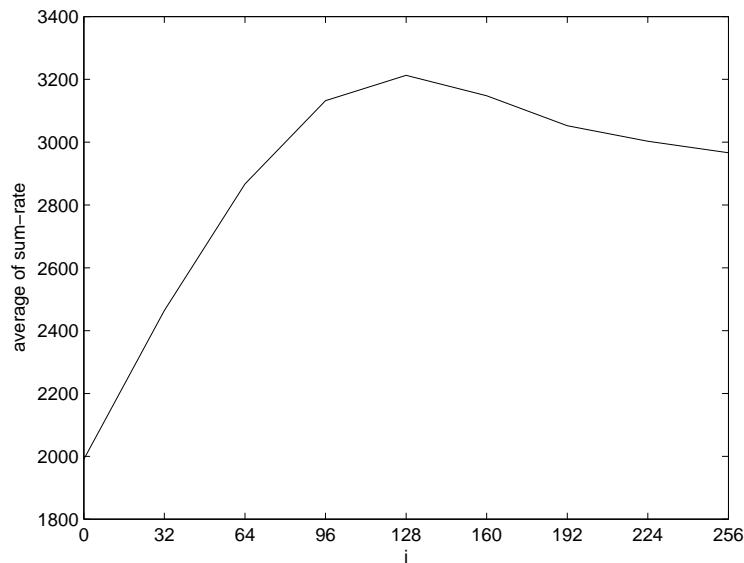


図 2: 総レートの平均

表 3 および図 2 より，クロストークの強いトーンと弱いトーンが混在するような問題に対しては，クロストークが強いトーンにのみ FDMA の制約を付加したほうが，総レートが大きくなることからわかる．さらに，実験した  $i$  のなかでは，すべての問題に対して  $i = 128$  のときに総レートが最も大きくなることからわかる．

### 【実験 3】実際の問題に対する実験

本実験では，2 人のユーザーが ADSL のシステムを用いてデータをダウンロードしているというシナリオを考える．このシナリオに対し，FDMA 制約を付加するための条件を変え，Hybrid Algorithm による総レートを比較する．具体的には，実験 2 と同様にトーン  $i+1$  以降には FDMA 制約を付加するとし，この  $i$  を 0 から  $N$  まで変化させた．なお，ADSL の具体的なループボロージは図 3 に示す．また，トーンの数  $N = 256$ ，ノイズレベルは  $-140\text{dB}$ ，キャパシティギャップは  $12\text{dB}$ ，各ユーザーのパワー容量  $P_k$  ( $k = 1, 2$ ) は  $20.4\text{dB}$  とする．これらの値を用いてクロストーク係数  $\alpha_{ik}^n$  とノイズパラメータ  $\sigma_k^n$  を計算することにより<sup>6</sup>，総レート最大化問題 (2.5) に変換した．この問題でも，実験 1 および 2 で用いたテスト問題と同様，トーンの番号  $n$  が小さいほど，クロストークが小さくなる傾向がある．

<sup>6</sup>ループボロージからこれらの値を計算するため，本報告書ではトロント大学の Yu 博士のグループで作成されたルーチンを用いた．

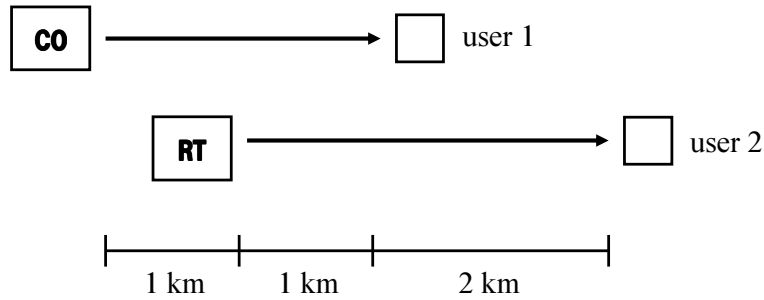


図 3: ADSL downstream scenario

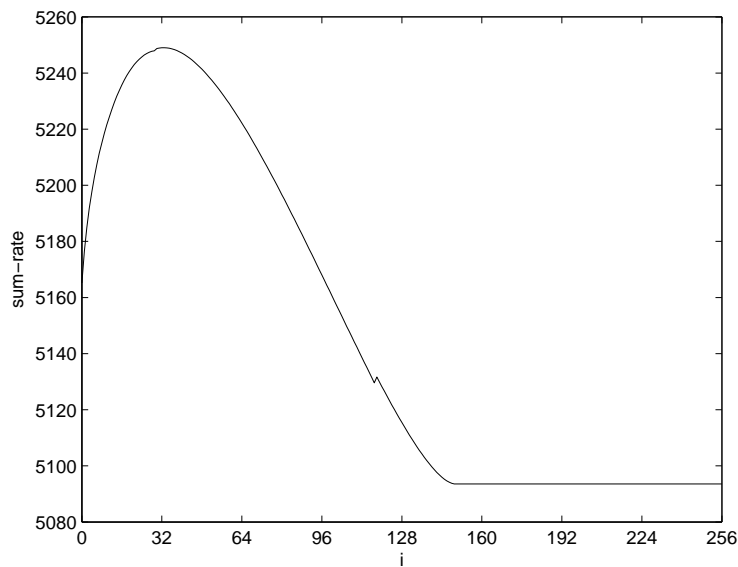


図 4: ADSL の問題に対して FDMA 制約を付加するトーンを変えた場合の総レート

図 4 より、実際の ADSL の問題に対しても、Hybrid Algorithm が有効であることがわかる。具体的には、 $i = 32$  のときに最大値  $5.249 \times 10^3$  を取り、逐次トーン配分法に対応する  $i = 0$  のときには  $5.165 \times 10^3$ 、IWFA に対応する  $i = 256$  のときには  $5.094 \times 10^3$  であった。 $i = 150$  程度から  $i = 256$  までほぼ変化が見られないのは、ほとんどの場合においてユーザー 2 がトーン 150 以降を使おうとしなかったためである。その結果、IWFA に対応する  $i = 256$  の場合においても部分的 FDMA となるような解が得られた。

## 7 結論

本報告書では、DSM 通信方式における総レート最大化問題に対して、部分的 FDMA という概念を導入し、それに基づく 2 つのアルゴリズムを提案した。これらのアルゴリズムでは、総レート最大化問題の実行可能領域を部分的 FDMA に限定することにより、効率的に近似最適解を求める

工夫がなされている。また数値実験では、クロストークの強いトーンと弱いトーンが混在するような問題に対して、クロストークの強いトーンだけが FDMA となるような部分的 FDMA 制約を考えた。その結果、本報告書で提案した解法の方が、既存の解法よりも良い総レートを与えることが確認できた。

今後の課題としては、次のようなことが挙げられる。

- FDMA 制約を付加するトーン集合  $\mathcal{F}$  と付加しないトーン集合  $\mathcal{NF}$  の分割に関して、より妥当性のある判断基準を考える。実際、数値実験では、クロストーク係数の各トーンにおける相加平均値などによってそれらを分割したが、相乗平均を用いたり、ノイズパラメータ  $\sigma_k^n$  やパワー容量  $P_k$  といった要素も加味することで、より正確な判断基準が得られるかもしれない。
- Hybrid Algorithm では、トーン集合  $\mathcal{F}$  をさらに  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_K$  に分割する必要があったが、そのための手段として逐次トーン配分法以外の方法も考えてみる。
- 双対分解法の部分問題 (5.7) を効率的に解く手法を考える。実際、本報告書で用いた手法は大域的最適解を求める保証がなく、計算に時間がかかる。
- 総レート最大化問題の大域的最適解が部分的 FDMA となるための十分条件を与える。

#### 謝辞

まず、本報告書作成にあたり、細部にいたるまで熱心なご指導をいただいた林俊介助教に心より感謝の意を表します。また、日頃からお世話になっている福嶋雅夫教授、山下信雄准教授、ならびに本研究を進める上で数々の助言を賜った修士課程の西村亮一さんをはじめとする福嶋研究室の皆様にも厚く御礼申し上げます。

#### 参考文献

- [1] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, second edition, Athena Scientific Press, 1999.
- [2] R. Cendrillon, W. Yu, M. Moonen, J. Verliden and T. Bostoen, *Optimal multiuser spectrum balancing for digital subscriber lines*, IEEE Transactions on Communications, 54 (2006), no. 5, pp. 922–933.
- [3] V. M. K. Chan and W. Yu, *Joint multiuser detection and optimal spectrum balancing for digital subscriber lines*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2006, Article ID 80941.
- [4] V. M. K. Chan and W. Yu, *Multiuser spectrum optimization for discrete multitone systems with asynchronous crosstalk*, IEEE Transactions on Signal Processing, 55 (2007), no. 11, pp. 5425–5435.
- [5] S. T. Chung, *Transmission schemes for frequency selective Gaussian interference channels*, Doctoral dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, Calif, USA, 2003.

- [6] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley & Sons, Inc., (1991).
- [7] S. Hayashi and Z.-Q. Luo, *Spectrum management for interference-limited multiuser communication systems*, Manuscript, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Minnesota, 2006.
- [8] E. Kalvelagen, *Lagrangian relaxation with GAMS*, Technical note, GAMS Development Corporations, (2002), <http://www.gams.com/~erwin/lagrel/lagrange.pdf>.
- [9] R. Lui and W. Yu, *Low complexity near optimal spectrum balancing for digital subscriber lines*, IEEE International Conference on Communications (ICC), Seoul, Korea, (2005).
- [10] Z.-Q. Luo and J.-S. Pang, *Analysis of iterative water-filling algorithm for multiuser power control in digital subscriber lines*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2006, Article ID 24012.
- [11] Z.-Q. Luo and S. Zhang, *Dynamic spectrum management: Complexity and Duality*, Manuscript, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Minnesota, 2007.
- [12] G. Scutari, D.P. Palomar, and S. Barbarossa, *Optimal linear precoding for wideband non-cooperative systems based on game theory-part I: Nash equilibria*, IEEE Transactions on Signal Processing, to appear.
- [13] G. Scutari, D.P. Palomar, and S. Barbarossa, *Optimal linear precoding for wideband non-cooperative systems based on game theory-part II: Algorithms*, IEEE Transactions on Signal Processing, to appear.
- [14] K. B. Song, S. T. Chung, G. Ginis and J. M. Cioffi, *Dynamic spectrum management for next-generation DSL systems*, IEEE Communications Magazine, 40 (2002), pp. 101–109.
- [15] N. Yamashita and Z.-Q. Luo, *A nonlinear complementarity approach to multiuser power control for digital subscriber lines*, Optimization Methods and Software, 19 (2004), pp. 633–652.
- [16] W. Yu and R. Cendrillon, *Dual optimization methods for multiuser orthogonal frequency division multiplex systems*, IEEE Global Communications Conference (Globe-com), 1, Dallas, USA, 2004, pp. 255–229.
- [17] W. Yu, G. Ginis and J. M. Cioffi, *Distributed multiuser power control for digital subscriber lines*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 20 (2002), pp. 1105–1115.
- [18] W. Yu and R. Lui, *Dual methods for nonconvex spectrum optimization of multicarrier systems*, IEEE Transactions on Communications, 54 (2006), no. 7, pp. 1310–1322.