特別研究報告書

カーネル技法を用いた資産配分関数の構築

指導教員　　　山下信雄　准教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 17 年 4 月入学
平成 21 年 3 月卒業

吉田　雅基

平成 21 年 1 月 30 日提出

カーネル技法を用いた資産配分関数の構築

吉田　雅基

摘要

近年，日本では低金利が常態化し，期間投資家のみならず，一般の人の間でも貯蓄から投資への流れが起きている．株式などの資産への投資においては，貯蓄と違い，投資した資産が減るというリスクがある．そのため，投資においては収益を上げるだけでなく，リスクをいかにコントロールするかが重要になる．通常，異なる性質の資産を適当な配分で投資すれば，単一の資産にすべて投資するよりもリスクを軽減することができる．各々の投資家にとって，最適な資産の配分を数理的に求める問題を資産配分問題と呼ぶ．資産配分問題を定式化するためには，まず資産価格を何らかの手法で予測し，その予測の下に収益とリスクをモデル化する．次にそのモデルに基づいて，投資家のリスク選好度合を考慮して資産配分問題を定式化する．これまでに数多くのリスクのモデルとそれに基づいた資産配分問題が提案されている．それらのモデルの多くはある固定された時点での資産価格の予測に基づいているため，そのモデルの解である資産配分は他の時点で用いるのには適していないことがある．一方，投資判断を行う各時点の経済状況 (例えば円高等) に合わせて，資産配分を変えることができれば，より柔軟にリスクや収益をコントロールすることができるはずである．そのため，本報告書では現在の経済状況に応じて最適な資産配分を与える関数を求めることを考える．

本報告書では，対象とする資産に関する経済指標を入力として与えると，それに対する最適な投資割合を出力する関数を定義し，この関数を資産配分関数と呼ぶ．最適な資産配分関数を構築する問題は半無限計画問題として定式化できる．一般には半無限計画問題は非常に難しい問題であるので，資産配分関数をある基底関数の線形結合に限定することにより，半無限計画問題を凸二次計画問題に変換する．さらにその問題の双対問題を導出し，カーネル技法を用いることによって基底関数を陽に表さなくても，カーネル関数を用いて最適な資産配分関数が与えられることを示す．現実のデータを用いて数値実験を行ったところ，提案手法による資産運用は，従来のモデルに基づいた資産運用に比べて，低リスクで高い収益を得られることが分かった．

目次

1 序論

近年，日本では長期に渡り低金利政策が続けられており，貯蓄をするより投資を行うという人が増えてきている．また，インターネット技術の発展や規制緩和により，投資はますます身近なものとなりつつある．

投資には資産が増えるというリターンだけではなく，逆に資産が減るというリスクも伴う．そのため，投資を行うときには，リターンだけでなく，リスクも考慮することが重要である．ある程度のリターンを確保しつつ，リスクをできるだけ小さくするために，投資家は複数の資産に分散して投資を行う．この資産配分をポートフォリオと呼び，投資家にとって最適なポートフォリオを求める問題を資産配分 (ポートフォリオ最適化) 問題と呼ぶ．

ポートフォリオ最適化の分野において，多くの手法の基礎となるモデルを考案したのが Markowitz である [8]．Markowitz は，ポートフォリオのリスクとリターンをその期待収益率と分散で表し，期待収益率を一定値に保ちつつ，分散を最小化する平均・分散モデルを提案した．平均・分散モデルは凸二次計画問題に定式化できるため，内点法などによって解くことができる．Markowitz の平均・分散モデルの提案以降，実務家の要請にしたがって，今日までにより現実的であり，扱いやすいモデルが数々提案されている．Konno [7] はリスクとして標準偏差の代わりに絶対偏差を用いる平均・絶対偏差モデルを提案した．平均・絶対偏差モデルは線形計画問題に定式化することができるため，平均・分散モデルに比べて少ない計算時間で解を見つけることができる．一方，収益率の標準偏差や絶対偏差などでリスクを評価するモデルは，投資家が期待収益率より大きいリターンを望ましくないと判断することを前提としている．しかし，通常の場合，リターンがある目標以上になることをリスクとは考えない．そこで現実的にも妥当なモデルとしてリスク尺度に下方分散や下方絶対偏差をとるモデルが提案されている [5]．

これまでに提案されてきた多くのモデルは，資産価格の確率分布が何らかの手法によって推定されており，その推定に基づいてリスクやリターンが計算できることを前提としている．すなわち，資産価格の推定と資産配分の決定とが別々に行われている．そのため，そのようなモデルを解いて得られるポートフォリオは資産価格を推定したときの状況に依存している．したがって，経済状況が変われば，その状況に基づいて，再び資産価格の推定を行い，ポートフォリオを計算しなければならない．一般に資産価格，特にその確率分布の推定をすることは難しい．また最尤推定などの通常の推定手法では，よりよい推定を行うためには多くのデータを必要とする．ところが現在の状況とまったく合致する過去のデータは限られているため，そのようなデータを数多く集めるのは困難である．例えば，為替相場に応じて資産配分を変えることを考えるとき，同程度の為替相場の時期のデータを集めて資産価格を推定することになる．しかし，ある特定の為替の状況はまれにしかないことがある．そのため，そのような状況のデータを十分に集めることができない．一方で，各状況ごとに資産価格の推定をしなくても，そのときの状況に合わせて最適な資産の配分を与える関数があれば，よりよい資産運用を行うことができるはずである．そこで本報告書では，資産価格を推定した状況に基づいて固定したポートフォリオを求めるのではなく，現在の経済状況に応じて最適な配分を与える関数を求めることを考える．

本報告書では，対象とする資産に関する経済指標を入力として与えると，それに対する最適な投資割合を出力とする関数を資産配分関数と呼ぶことにする．本報告書の目的は，最適な資産配分関数を求める問題を定式化し，その問題を解いて得られた資産配分が実際によりよい運用結果となることを確かめることである．

最適な資産配分関数を求める問題は，決定変数が関数となるため，半無限計画問題となる．半無限計画問題は一般に解くことが難しい問題である．そこで資産配分関数がある基底関数の線形結合で表されていると仮定することによって，半無限計画問題を凸二次計画問題へと変換する．この凸二次計画問題を解くためには基底

関数がどのような形をしているかを知る必要があり，また各々の関数値を求めなければならない．よりよい資産配分関数を求めるためには，基底関数は高次元であることが望ましい．しかし，基底関数の次元が高次元や無限次元である場合は，凸二次計画問題も大規模または無限次元の問題となってしまう．そこで，その凸二次計画問題の双対問題を考える．双対問題はカーネル関数を用いることによって表すことができる．さらに，この双対問題の解とカーネル技法を用いることによって，基底関数を陽に計算することなく，カーネル関数の線形和として資産配分関数を表すことができることを示す．

本報告書の構成は以下のとおりである．2 節では既存の資産配分問題として Konno の提案した平均・絶対偏差モデル，さらにより一般的な平均・下方リスクモデルの紹介する．また，カーネル技法の紹介をする．3 節では最適な資産配分関数を求める問題の定式化を行う．4 節では，3 節で定式化した問題のラグランジュ双対問題を導出し，双対問題の解とカーネル技法を用いることによって，資産配分関数がカーネル関数の和で表されることを示す．5 節では実際のデータを用いて数値実験によって，平均・絶対偏差モデルとの比較を行う．6 節ではまとめと今後の課題について述べる．

2 準備

この節では，既存の資産配分問題の一つである，Konno の平均・絶対偏差モデル [7] とそれを発展させた平均・下方絶対偏差モデル [6] を紹介する．また，学習法の一つであるカーネル技法 [2] の紹介と，本報告書で使用するカーネル関数について述べる．

2.1 平均・絶対偏差モデルと下方リスクモデル

n 種の資産 S_j に投資することを考える．各資産への投資割合 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ を投資家が所有するポートフォリオと呼ぶ．定義より y は

$$\sum_{j-1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

を満たす．ただし，ここでは空売りを考えていない．S_j の収益率を R_j とすると，ポートフォリオ y の収益率は

$$R(y) = \sum_{j=1}^{n} R_j y_j$$

で表される．ここで R_j は確率変数であるため，$R(y)$ も確率変数となる．以下では，期待収益をある程度以上確保しつつリスクを最小化するモデルを考える．リスクを表す関数を $u(y)$ とし，最低限確保する期待収益を β とすると，このモデルは次のように定式化できる，

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u(y) \\ \text{subject to} & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E[R_i] y_i \geq \beta \end{array}$$

ただし，$E[\cdot]$ は確率変数の期待値である．

資産配分問題ではリスクを表す関数 $u(y)$ の定義が重要であり，これまでに様々なものが提案されている．Markowitz [8] はリスク尺度として標準偏差を用いた．すなわち，

$$u(y) = \sqrt{E\left[\left\{\sum_{j=1}^{n} R_j y_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j y_j\right]\right\}^2\right]}$$

とした．このリスク尺度を用いた平均・分散モデルは二次計画問題として定式化される．また Konno [7] は標準偏差の代わりに，次のような絶対偏差関数をリスク尺度として用いた．

$$u(y) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i y_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i y_i\right]\right|\right]$$

この $u(y)$ を用いた L_1 リスク最小化問題は次の形で表される．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i y_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i y_i\right]\right|\right] \\ \text{subject to} \quad & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{n} E[R_i] y_i \geq \beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

このモデルの最も大きな利点は，Markowitz の平均・分散モデル [8] が二次計画問題として定式されるのに対し，(2.1) は線形計画問題として定式化されるところである．

平均・分散モデル，平均・絶対偏差モデルはともに，実際の収益が期待収益 $\sum_{i=1}^{n} E[R_i] y_i$ を越えることもリスクとして扱っている．これは通常の投資家の感覚とはずれたものである．そこで収益が期待収益やある目標を下回るときのみをリスクとするモデルが考えられている．

いま，α^t を時刻 t における，許容できる最低の収益率とする．このとき $R(y)$ の下方絶対偏差は以下のように定義される．

$$\sigma(y) = E[|R(y) - \alpha^t|_-]$$

ここで $|\cdot|_-$ は

$$|t|_- = \max\{0, -t\}$$

で表される関数である．α^t の例としては，$R(y)$ の期待収益や，ベンチマークとなる資産の収益などが挙げられる．

一般には R_i の確率分布が未知であるため，$R(y)$ の期待値や分散を計算することは難しい．そこで過去のデータを用いて計算された推定値で代用することが提案されている．r_i^t を，過去の時刻 $t (t = 1, \ldots, T)$ での確率変数 R_i の実測値とする．このとき，確率変数 R_i の期待値はこれらの平均によって近似される．つまり

$$E[R_i] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_i^t$$

である．同様に下方絶対偏差 $\sigma(y)$ は次のように表せる．

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= E[|R(y)-\alpha^t|_-] \\ &= E\left[\max\left\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n R_i y_i\right\}\right] \\ &\approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \max\left\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i\right\}\end{aligned}$$

過去のデータを用いたこれらの近似式を用いると，平均・下方絶対偏差モデルは以下のようにかける．

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \max\left\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i\right\} \\ \text{subject to}\quad & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i = 1 \\ & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \beta\end{aligned}$$

この問題は次の線形計画問題と等価である．

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \eta^t \\ \text{subject to}\quad & \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \leq \eta^t, \quad t = 1, \ldots, T \\ & \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i = 1 \\ & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \beta\end{aligned} \tag{2.2}$$

この問題 (2.2) を解いて得られるポートフォリオ y はデータ r_i^t に基づいているため，ある経済状況に合わせてポートフォリオ y の構成を変えるには，その状況におけるデータ r_i^t を用いて解く必要がある．しかし，一般にある特定の状況のデータの数は限られている．また，各状況に合わせて何回も問題 (2.2) を解かなければならない．そこで，ポートフォリオを固定された値ではなく，状況によらない過去の全てのデータを用いて，状況 x に合わせて異なる値をとる $y(x)$ のような関数を求めることを考える．そのような関数が構築できれば，状況ごとにデータを収集したり，問題 (2.2) を解くことなく，よりよい資産運用ができるはずである．この関数が本報告書で議論する資産配分関数である．

2.2 学習法とカーネル技法

学習法は，ある問題に対して，過去のデータを用いてその問題に潜む法則を導き出す手法である．過去のデータの入力と出力のペアをトレーニングデータと呼ぶ．入力から出力への関数が存在すると考えられる場合

には，学習法はその入出力関係を満たす関数を求める手法と考えることができる．学習する問題における求めたい関数のことを，学習問題の解と呼ぶ．本報告書における解は資産配分関数である．学習問題の解は入力空間から出力空間へ写像するある特定のクラスの関数から選ばれる．この関数のクラスは仮説と呼ばれ，普通，学習を行う前に仮説は特定されている．

最も単純な関数の仮説として線形関数の集合がある．この仮説は入力変数を $x \in R^n$ とすると，次のような形で表される線形関数の集合として与えられる．

$$f(x) = \langle w, x \rangle + b$$

ただし，$(w, b) \in R^n \times R$ は関数を定義するパラメータである．線形関数の集合を仮説とした学習を線形学習マシンと呼ぶ．線形学習マシンの重要な特性の一つに，パラメータ w がトレーニングデータの入出力点の線形結合で表現できるという性質がある．すなわち，l 個のトレーニングデータ点 $((x^1, z^1), \dots, (x^l, z^l))$ が与えられているとき，w はある α^j，$j = 1, \dots, l$ を用いて

$$w = \sum_{j=1}^{l} \alpha^j z^j x^j$$

と表せる [2]．したがって，この学習問題の解は α^j を用いて次式で表すことができる．

$$f(x) = \sum_{i=j}^{l} \alpha^j z^j \langle x^j, x \rangle + b$$

与えられたトレーニングデータによっては線形学習マシンでは十分によい解が与えられないことがある．このようなときには，トレーニングデータを線形学習マシンで学習できるように入力データを変換する．すなわち，関数 $\phi : R^n \mapsto R^m$ を用いて

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_m(x))$$

と変換する．このデータ変換は結局，入力空間から新たな空間への写像を考えることに他ならない．この新たな空間を特徴空間と呼び，学習において非常に有効な概念である．

線形学習マシンを用いて，変換されたトレーニングデータを学習することを考える．このとき，考える仮説は

$$f(x) = \langle w, \phi(x) \rangle + b$$

となる．ここで線形学習マシンの特性を利用すると，$f(x)$ は入出力のペア $((\phi(x^1), z^1), \dots, (\phi(x^l), z^l))$ とある α^j を用いて，次式で表すことができる．

$$f(x) = \sum_{j=1}^{l} \alpha^j z^j \langle \phi(x^j), \phi(x) \rangle + b$$

ここで，特徴空間内の内積 $\langle \phi(x^j), \phi(x) \rangle$ を元の入力点 x の関数 $K(x^j, x)$ と考え，ϕ を用いずに直接計算する方法が，カーネル技法と呼ばれるものである．ここで，関数 K は以下に定義するカーネル関数となる．

定義 2.1

カーネル (kernel) は，ある関数 $\phi : X \mapsto F$ が存在し，すべての $x, z \in X$ に対し，

$$K(x, z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle$$

となるような関数 K である．

カーネル関数を決めれば，$\phi(x)$ を計算しなくても $\langle \phi(x^j), \phi(x) \rangle$ の値を求められる．よく用いられるカーネル関数の例としては，次のものが挙げられる．

$$K(x,z) = (x^\top z + c)^d \quad (d: \text{自然数}, \quad c \geq 0) \tag{2.3}$$

$$K(x,z) = \exp\biggl(-\frac{\|x-z\|^2}{\sigma^2} \biggr) \tag{2.4}$$

(2.3) を多項式カーネル，(2.4) をガウスカーネルと呼ぶ．多項式カーネルを構成する ϕ は有限次元の関数であるが，ガウスカーネルを構成する ϕ は無限次元となる．

3 最適な資産配分関数を求める問題の定式化

本節では過去のデータを用いて，状況に応じた最適な資産配分を求める問題を定式化する．

ここでは n 種の資産と安全資産のポートフォリオを考える．資産 i に対して時刻 t における経済指標 x_i^t が与えられているとする．このときの資産 i への投資割合 $g_i(x_i^t)$ を求めたい．ここで $g_i(x_i^t) = 1$ であれば，時刻 t においてすべての資金を資産 i に投資することを意味する．

時刻 t においての安全資産への投資割合を y_0^t，資産 i への投資割合を y_i^t とすると，ポートフォリオ y^t は $g_1(x_1^t), \ldots, g_n(x_n^t)$ を用いて

$$y^t = (y_0^t, y_1^t, \ldots, y_n^t) = \biggl(1 - \sum_{i=1}^n g_i(x_i^t), g_1(x_i^t), \ldots, g_n(x_i^t) \biggr)$$

で与えられる．

過去の時刻 $t+1$ における資産 i の実現した収益率を r_i^t，安全資産の利率を$\bar{r}^t$ とする．このとき，投資割合 $g_i(x_i^t)$，$i = 0, \ldots, n$ に基づいたポートフォリオの，時刻 $t+1$ における収益率は

$$\biggl(1 - \sum_{i=1}^n g_i(x_i^t) \biggr) \bar{r}^t + \sum_{i=1}^n g_i(x_i^t) r_i^t = \sum_{i=1}^n (r_i^t - \bar{r}^t) g_i(x_i^t) + \bar{r}^t$$

で与えられる．

確保すべき期待収益を β とし，各時刻 $t+1$ において，ポートフォリオの実現する収益率が最低でも α^t 以上になるような投資割合を決定する関数 g_i を求める最適化問題は，

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^T \max\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n (r_i^t - \bar{r}^t) g_i(x_i^t) - \bar{r}^t\} \\ \text{subject to} \quad & g_i(x_i^t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n : t = 1, \ldots, T \\ & \sum_{i=1}^n g_i(x_i^t) \leq 1, \quad t = 1, \ldots, T \\ & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \biggl\{ \sum_{i=1}^n (r_i^t - \bar{r}^t) g_i(x_i^t) + \bar{r}^t \biggr\} \geq \beta \end{aligned} \tag{3.1}$$

と定式化できる．この問題は一般に半無限計画問題となり，容易に解くことはできない．したがって，求める関数の形をある関数の線形結合に制限することで，問題を扱えるようにすることを考える．

ϕ_i を入力空間 X から新たな空間 F_i への非線形な写像とする．資産配分関数 $g_i(x_i^t)$ は ϕ_i を用いて

$$g_i(x) = \langle w_i, \phi_i(x) \rangle \tag{3.2}$$

という形で表されると仮定する．この表現を用いると (3.1) は次のように w_i を求める問題に変換できる．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \max\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t)\} \\
\text{subject to} \quad & 0 \leq \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle, \quad i = 1, \ldots, n : t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle \leq 1, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t) \geq \beta
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
p_i^t = r_i^t - \bar{r}^t, \quad q_i^t = \frac{1}{n}\bar{r}^t
$$

である．さらに，この問題は次の線形計画問題と等価である．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \eta^t \\
\text{subject to} \quad & \alpha^t - \sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t) \leq \eta^t, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle \geq 0, \ t = 1, \ldots, T, \ i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle \leq 1, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t) \geq \beta
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

この問題を解いて得られる資産配分関数 g_i は過去のデータに適応し過ぎてしまう場合がある．この現象を過学習と呼ぶ．過学習が起きると g_i を用いた将来の資産運用成績が悪くなることがある．この過学習を制御するためによく用いられる手法の一つに正則化がある [1]．これは目的関数に罰金項を付加することにより，過学習を防ぐという手法である．そのような罰金項として様々な形のものが存在するが，ここでは $\tau \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|^2$ を用いることにする．ただし，τ は過学習を制御する正のパラメータである．問題 (3.3) にこの罰金項を付加したものを改めて定式化すると次のようにかける．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \lambda \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|^2 + \sum_{t=1}^{T} \eta^t \\
\text{subject to} \quad & \alpha^t - \sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t) \leq \eta^t, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle \geq 0, \ t = 1, \ldots, T, \ i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle \leq 1, \quad t = 1, \ldots, T \\
& \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t)\rangle + q_i^t) \geq \beta
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

この問題は凸二次計画問題である．この問題を解いて得られた解を w_i^* とすると，資産配分関数 $g_i(x_i)$ は次のような形でかくことができる．

$$g_i(x_i) = \langle w_i^*, \phi(x_i) \rangle$$

なお，(3.1) の制約条件は $t = 1, \ldots, T$ の過去のデータに対して成り立つため，一般に $g_i(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq 1$ が成り立つとは限らない．そのようなときは，$g_i(x_i) < 0$ となった場合は $g_i(x_i) = 0$ とし，$\sum_{i=1}^n g_i(x_i) > 1$ となった場合は各資産への投資割合を保ちながら $\sum_{i=1}^n g_i(x_i) = 1$ となるように正規化すればよい．

4 双対問題とカーネル技法

前節で定式化した資産配分問題 (3.4) を解くためには，全ての入力データ x_i^t に対して ϕ_i の関数値を具体的に求める必要があり，その計算に時間がかかることがある．また，ϕ_i が高次元への写像であったり，無限次元への写像である場合には，問題 (3.4) は大規模，または無限次元の最適化問題となり，容易に解くことができない．そこで本節では問題 (3.4) の双対問題を考え，$\phi_i(x)$ を陽に計算しなくても，カーネル技法を使うことによって，資産配分関数 $g_i(x_i)$ がカーネル関数で表せることを示す．

問題 (3.4) のラグランジュ関数は次のようにかける [3]．

$$\begin{aligned}
L(w, \eta, \kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi) \ &= \tau \sum_{i=1}^n \|w_i\|^2 + \sum_{t=1}^T \eta^t + \sum_{t=1}^T \kappa^t \left\{ \alpha^t - \sum_{i=1}^n (p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle + q_i^t) - \eta^t \right\} \\
&\quad - \sum_{t=1}^T \lambda^t \eta^t - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \mu_i^t (\langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle) + \sum_{t=1}^T \nu^t \left(\sum_{i=1}^n \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle - 1 \right) \\
&\quad + \xi \left\{ \beta - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \left(p_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle + q_i^t \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで，$\kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi$ は問題 (3.4) の各制約に対応したラグランジュ乗数である．

いま，ラグランジュ関数 L を用いて，関数 ω: $R^{\{(n+2)T+1\}} \mapsto [-\infty, +\infty)$ を

$$\omega(\kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi) = \inf\{L(w, \eta, \kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi) | (w^\top, \eta^\top) \in R^{(n+T)}\} \tag{4.2}$$

によって定義すると，問題 (3.4) のラグランジュの双対問題は次のように表される．

$$\begin{array}{ll}
\text{maxmize} & \omega(\kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi) \\
\text{subject to} & \kappa \geq 0, \lambda \geq 0, \mu_i \geq 0, \nu \geq 0, \xi \geq 0
\end{array} \tag{4.3}$$

双対問題の目的関数 ω は以下のように陽に与えることができる．

L を w, η の項で整理すると，

$$\begin{aligned}
L(w, \eta, \kappa, \lambda, \mu_i, \nu, \xi) =& \tau \sum_{i=1}^n \|w_i\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\langle w_i, -\sum_{t=1}^T \kappa^t p_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(x_i^t) - \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T p_i^t \phi_i(x_i^t) \right\rangle \\
&+ \sum_{t=1}^T \eta^t (1 - \kappa^t - \lambda^t) + \sum_{t=1}^T \left(\alpha^t - \sum_{i=1}^n q_i^t \right) \kappa^t \\
&- \sum_{t=1}^T \nu^t + \xi \left(\beta - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \frac{q_i^t}{T} \right)
\end{aligned}$$

とかける．この式は w と η で分解して表されているので双対問題の目的関数値は L を w と η で独立して最小化すれば計算できる．まず，w について最小化する．L は w に関して凸二次関数であるので，

$$\nabla_w L(w,\eta,\kappa,\lambda,\mu_i,\nu,\xi) = 0$$

を満たす w^* が最適解となる．

$$\nabla_{w_i} L(w,\eta,\kappa,\lambda,\mu_i,\nu,\xi) = 2\tau w_i - \sum_{t=1}^{T}\kappa^t p_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^{T}\mu_i^t\phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^{T}\nu^t\phi_i(x_i^t) - \xi\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}p_i^t\phi_i(x_i^t)$$
$$(i = 1,\ldots,n)$$

であるから，

$$w_i^* = \frac{1}{2\tau}\left(\sum_{t=1}^{T}\kappa^t p_i^t\phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^{T}\mu_i^t\phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^{T}\nu^t\phi_i(x_i^t) + \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T}p_i^t\phi_i(x_i^t)\right) \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{4.4}$$

を得る．次に η について最小化する．L は η^t に関して線形関数であるので

$$\inf\{\eta^t(1-\kappa^t-\lambda^t) | \eta^t \in R\} = \begin{cases} 0 & (\kappa^t+\lambda^t = 1) \\ -\infty & (\kappa^t+\lambda^t \neq 1) \end{cases}$$

となる．よって，ある t に対して $\kappa^t+\lambda^t \neq 1$ のときは，$\omega(\kappa,\lambda,\mu_i,\nu,\xi) = -\infty$ となる．双対問題は最大化問題であるため，このような領域を考える必要がない．そこで $\kappa^t+\lambda^t = 1,\ \ t = 1,\ldots,T$ の場合のみ考えることとし，双対問題の制約条件に $\kappa^t+\lambda^t = 1,\ \ t = 1,\ldots,T$ を加える．

L に $\kappa^t+\lambda^t = 1$ と w^* を代入すると

$$\begin{aligned}
&\omega(\kappa,\lambda,\mu_i,\nu,\xi) = L(w^*,\eta,\kappa,\lambda,\mu_i,\nu,\xi) \\
&= \tau\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\langle w_i^*, -\sum_{t=1}^{T}\kappa^t p_i^t\phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^{T}\mu_i^t\phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^{T}\nu^t\phi_i(x_i^t) - \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T}p_i^t\phi_i(x_i^t)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{t=1}^{T}\eta^{t*}(1-\kappa^t-\lambda^t) + \sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n}q_i^t\right)\kappa^t - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^t \\
&\quad + \sum_{t=1}^{T}\nu^t(n-2) + \xi\left(\beta - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T}\right) - \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \beta\xi - \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}q_i^t - \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}p_i^t\langle w_i, \phi_i(x^t)\rangle \\
&= \tau\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\left\langle w_i^*, \left(\sum_{t=1}^{T}\kappa^t p_i^t\phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^{T}\mu_i^t\phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^{T}\nu^t\phi_i(x_i^t) + \tfrac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T}p_i^t\phi_i(x_i^t)\right)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \xi\left(\beta - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n}q_i^t\right)\kappa^t \\
&= \tau\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 - 2\tau\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 + \sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n}q_i^t\right)\kappa^t - \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \xi\left(\beta - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T}\right) \\
&= -\tau\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 + \sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n}q_i^t\right)\kappa^t - \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \xi\left(\beta - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T}\right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

を得る．ここで $\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2$ は，

$$\sum_{i=1}^{n}\|w_i^*\|^2 = \frac{1}{2\tau}\begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix}^{\top} Q \begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

と表せる．ただし $Q \in R^{\{(n+2)T+1\}\times\{(n+2)T+1\}}$ は

$$Q = \begin{pmatrix}
\bar{H} & P_1H_1 & \cdots & \cdots & P_nH_n & -\sum_{i=1}^{n} P_iH_i & \bar{h}\\
H_1P_1 & H_1 & 0 & \cdots & 0 & -H_1 & h_1\\
\vdots & 0 & H_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots\\
H_nP_n & 0 & \cdots & 0 & H_n & -H_n & h_n\\
-\sum_{i=1}^{n} H_iP_i & -H_1 & \cdots & \cdots & -H_n & \sum_{i=1}^{n} H_i & -\sum_{i=1}^{n} h_i\\
\bar{h}^{\top} & h_1^{\top} & \cdots & \cdots & h_n^{\top} & -\sum_{i=1}^{n} h_i & \gamma
\end{pmatrix}$$

となる行列で，各成分 H_i，$\bar{H} \in R^{T\times T}$，$h_i$ $(i = 1,\dots,n)$，$\bar{h} \in R^T$，γ は $p_i = (p_1^i,\dots,p_i^T)$，$P_i = \mathrm{diag}(p_i^1,\dots,p_i^T) \in R^{T\times T}$ とすると，それぞれ次のようにかける．

$$H_i^{kl} = \frac{\langle\phi_i(x_i^k),\phi_i(x_i^l)\rangle}{2\tau},\quad \bar{H} = \sum_{i=1}^{n} P_iH_iP_i$$

$$\bar{h} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} P_iH_ip_i,\quad h_i = \frac{1}{T}H_ip_i,\quad \gamma = \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} p_i^{\top}H_ip_i$$

以上より，問題 (3.4) のラグランジュの双対問題 (4.3) は以下のように書き表される．

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix}^{\top} Q \begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix} + \sum_{t=1}^{T}\Big(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n} q_i^t\Big)\kappa^t - \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \xi\Big(\beta - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T}\Big)\\
\text{subject to}\quad & \kappa^t \ge 0, \lambda^t \ge 0, \kappa^t + \lambda^t \le 1,\ \ t = 1,\dots,T\\
& \mu_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n\\
& \nu \ge 0, \xi \ge 0
\end{aligned}$$

さらに λ^t を消去すると

$$\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix}^{\top} Q \begin{pmatrix}\kappa\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\\ \nu\\ \xi\end{pmatrix} + \sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i^t - \alpha^t\Big)\kappa^t + \sum_{t=1}^{T}\nu^t + \xi\Big(\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^t}{T} - \beta\Big)\\
\text{subject to}\quad & 0 \le \kappa^t \le 1,\ \ t = 1,\dots,T\\
& \mu_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n\\
& \nu \ge 0, \xi \ge 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．

ここで $K_i(x_i^k, x_i^l) = \langle \phi_i(x_i^k), \phi_i(x_i^l) \rangle$ とすると K_i はカーネル関数であり，Q の各成分は K_i を使って表すことができる．逆にカーネル技法を考えれば，先にカーネル関数 K_i を定めることによって各成分に対して $\phi_i(x)$ を陽に求めなくても，Q を定めることができる．

元の資産配分問題 (3.4) の解は双対問題 (4.7) の解を用いて，次のように表すことができる．(4.7) の解を $(\kappa^*, \mu_1^*, \dots, \mu_n^*, \nu^*, \xi^*)$ とすると，(4.4) より w_i^* は次のようになる．

$$w_i^* = \frac{1}{2\tau}\left(\sum_{t=1}^{T} \kappa^{t*} p_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^{T} \mu_i^{t*} \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^{T} \nu^{t*} \phi_i(x_i^t) + \frac{\xi^*}{T} \sum_{t=1}^{T} p_i^t \phi_i(x_i^t)\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

したがって，資産配分関数 (3.2) はカーネル関数 K_i を用いて，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} g_i(x_i) &= \langle w_i^*, \phi_i(x_i) \rangle \\ &= \frac{1}{2\tau}\left(\sum_{t=1}^{T} \kappa^{t*} p_i^t K_i(x_i^t, x_i) + \sum_{t=1}^{T} \mu_i^{t*} K_i(x_i^t, x_i) - \sum_{t=1}^{T} \nu^{t*} K_i(x_i^t, x_i) + \frac{\xi^*}{T} \sum_{t=1}^{T} p_i^t K_i(x_i^t, x_i)\right) \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) より，カーネル関数を決めれば，ϕ_i がどのような写像であるかを知る必要なく $g_i(x_i)$ を求めることができる．なお，3 節で述べたように，(3.1) の制約条件は $t = 1, \dots, T$ における過去のデータに対してのみ成り立つので，一般に $g_i(x_i) \geq 0$，$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leq 1$ が成り立つわけではない．そのときは 3 節にあるように正規化する必要がある．

5 数値実験

この節では，提案手法と，今野 [6] の平均・下方絶対偏差リスクモデルとの比較を行う．本実験は CPU が Pentium4，3.2GHz，メモリーが 2GB，OS が fedora7.0 の計算機上で，Matlab7.4 を用いて行った．凸二次計画問題を解く際は ILOG Optimization [4] のソルバーを用いた．

実験では，トレーニングデータを用いて 2 銘柄の株式と安全資産に対するポートフォリオを構築し，テストデータに対するその運用成績で提案手法の評価をする．まず，1 つ目の実験として，入力データに関して提案手法の資産運用成績がどのようになるかを調べ，次に平均・下方絶対偏差モデルとの比較をする．2 つ目の実験として，要求する収益率 β を様々な値に動かして，得られた資産運用の実際の収益率の期待値と標準偏差を求め，その関係を調べる．

ある特定企業の株価は，その特殊要因で不安定な挙動を示すことがある．そこで，同一業界のいくつかの企業をまとめたものを 1 つの銘柄として扱う．実験では，入力する経済指標として，1 ドルの価格 (円) を選び，円高，円安に対する相関が強い業界として電力，自動車を考えた．つまり，関西電力・中部電力・東京電力の 3 社の株価を平均したものを電力銘柄の株価として取扱い，電力銘柄を銘柄 1 とした．同様に，日産・ホンダ・トヨタの 3 社の株価を平均したものを自動車銘柄として取扱い，自動車銘柄を銘柄 2 とした．また，時刻 t におけるそれぞれの経済指標 x_1^t, x_2^t には，円ドル相場の変動率 s^t，$t = 1, \dots, T$ を使用した．

$$\begin{aligned} s^t &= \frac{d^t - d^{t-1}}{d^{t-1}} \quad (t = 2, \dots, T) \\ s^0 &= 0 \end{aligned}$$

ここで d^t は時刻 t の 1 ドルの価格 (円) である．問題 (3.4) に用いるデータ (x_i^t, r_i^t) は以下のように定めた．x_i^t として直前の 4 週間の円ドル相場とし，r_i^t として各銘柄の収益率 $\hat{r}_i^t$ とした．つまり，

$$x_1^t = x_2^t = (s^{t-1}, s^{t-2}, s^{t-3}, s^{t-4})$$
$$r_i^t = \hat{r}_i^t, \quad i = 1, 2 \tag{5.1}$$

とした．ただし，このように r_i^t を選ぶと，特定の t において $\hat{r}_i^t$ が大きければ，うまく資産配分関数が求まらないことがある．そこで，r_i^t として次の 4 週の各銘柄の収益率を平均したもの

$$r_i^t = \frac{\hat{r}_i^t + \hat{r}_i^{t+1} + \hat{r}_i^{t+2} + \hat{r}_i^{t+3}}{4} \tag{5.2}$$

も考えた．

実験に使うトレーニングデータには 2000 年から 2004 年までの期間と，2001 年から 2005 年までの期間の週ごとのデータを用いた．また，それぞれのトレーニングデータに対して，テストデータを 2005-2006 年，2006-2007 年とした．これらの期間データをそれぞれデータ 1，データ 2 とする (表 1)．これらのデータは Yahoo!ファイナンスの株価・投信・為替時系列データ [9] より収集した．

表 1　実験に用いたデータ

	トレーニングデータ	テストデータ
データ 1	2000 年から 2004 年	2005 年・2006 年
データ 2	2001 年から 2005 年	2006 年・2007 年

本実験では $\alpha^t = 0, \bar{r}^t = 0$ とし，過学習を防ぐパラメータ τ は $\tau = 0.05$ とした．さらに，本実験に使用するカーネル関数はガウスカーネルとした．なお，ガウスカーネルとは以下の形で与えられるカーネル関数である．

$$K(x, z) = \exp\left(-\frac{\|x - z\|^2}{\sigma^2} \right)$$

本実験では σ^2 として，トレーニングデータ x_i^t のノルムの平均を用いた．

5.1　実験結果

まず，r_i^t として (5.1) と (5.2) を用いた場合の比較を行う．図 1，2 は $\beta = 0.0025$ としたときの，データ 1，データ 2 における提案手法の資産運用成績である．この図を見ると，r_i^t を (5.1) とした場合，銘柄の売買をほとんど行っておらず，収益を上げられていないということが分かる．一方，r_i^t として (5.2) を用いた場合，資産の増減は激しいものの結果的によい運用成績を上げている．このような結果になった要因として以下のことが考えられる．過去のデータ $\hat{r}_i^t$ は目標とする収益率 β よりも非常に大きな値をとる場合が多い．そのため，(5.1) の結果では $\hat{r}_i^t$ が β よりも非常に大きな値をとる時刻では，少しの投資で β を実現することができるため，ほとんど投資を行っていない．さらに，$\hat{r}_i^t$ が β と同じ程度の値を与える時刻 t にのみ，大きく投資を行っている．しかし，テストデータにおいて $\hat{r}_i^t$ が β と同じ程度の値を与えるトレーニングデータと同じような入力 x_i^t がなければ，ほとんどの時刻で投資を行わない．このような問題を回避するためには，もっと多くのトレーニングデータを集めて学習させればよい．一方，r_i^t を (5.2) とした場合は，4 週の平均をとるため，r_i^t は

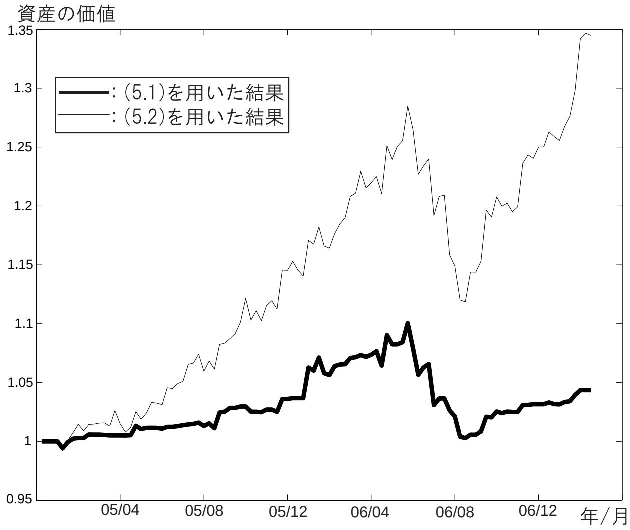

図 1　データ 1 における提案手法の資産運用成績

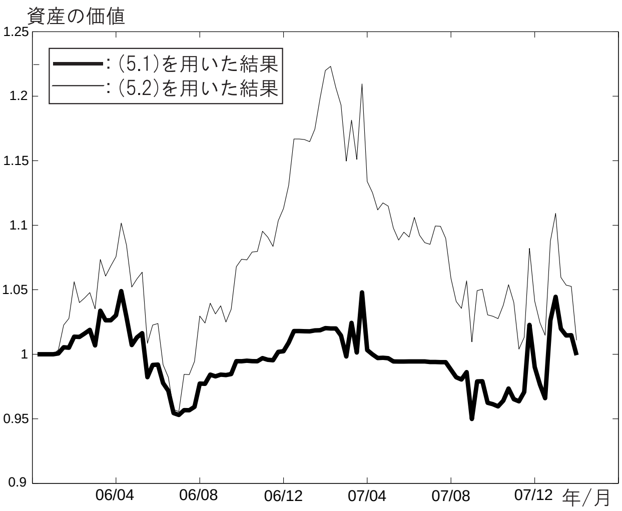

図 2　データ 2 における提案手法の資産運用成績

β と比べてそれほど大きくはならない．このため，目標値 β を実現するために，より多くの時刻において売買するようになったと考えられる．

図 3，4 は $\beta = 0.0025$ としたときの提案手法の運用成績と下方 L_1 リスクモデルとの運用成績とを比較した結果である．提案手法では r_i^t として (5.2) を用いたものを使っている．ここで提案手法はデータ 1 においては，下方 L_1 リスクモデルと比べ，収益では劣っているが，資産の増減が少なく，後で見るように提案手法の方が低リスクであることが分かる．また，データ 2 においては，よりよい成績をあげていることが分かる．次に β を 0.0005 から 0.0030 の間の 11 個の値に対してポートフォリオを求め，運用成績を計算した．得られた

運用成績の各週の収益率の平均と標準偏差の関係を図 5，6 に与える．これらの図を見ると，提案手法は下方 L_1 リスクモデルと比べ，リスクが同程度で大きい収益を上げられていることが分かる．また，逆に収益が同程度でリスクが少なくなっているということが分かる．特にデータ 2 においては銘柄 1，2 ともに収益率の平均がマイナスであるため，下方 L_1 リスクモデルの運用成績もマイナスとなっているが，提案手法によるものはプラスとなっている．

図 3　データ 1 における提案手法・出力 2 と下方 L_1 リスクモデルとの資産運用成績の比較

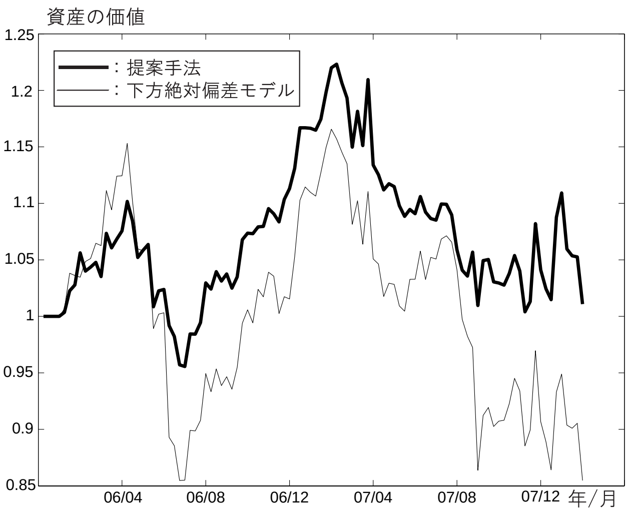

図 4　データ 2 における提案手法・出力 2 と下方 L_1 リスクモデルとの資産運用成績の比較

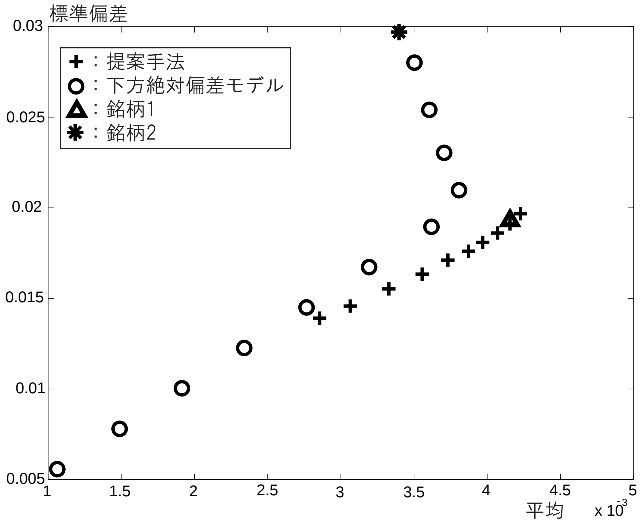

図 5　データ 1 における収益率の平均と標準偏差の関係

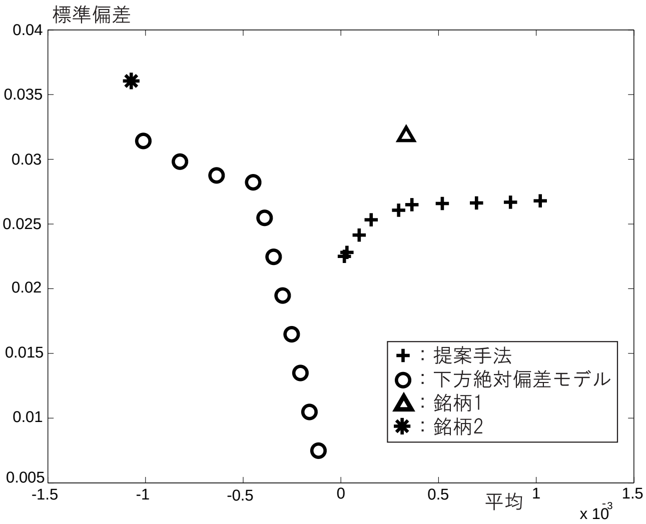

図 6　データ 2 における収益率の平均と標準偏差の関係

6　まとめと今後の課題

本報告書では，ポートフォリオを固定された値ではなく，現在の状況に応じて，構成を変えることができる資産配分関数を考え，最適な資産配分関数を求める問題を凸二次計画問題に定式化した．さらに，この問題の双対問題を考えることによって，最適な資産配分関数がカーネル関数の和の形で表せることを示した．数値実験では，既存の手法である下方 L_1 リスクモデルとの比較を行い，提案手法が様々な点で既存の手法より優れているということが分かった．

今後の課題として，適切な入力データを見つけることが挙げられる．今回は円ドル相場の変動率を用いたが，もっと，資産の変動を的確に表すことのできる経済指標を用いれば，さらによい資産運用ができるはずである．また，今回の報告では双対問題を解く計算時間は考慮に入れていなかった．投資する資産の数やトレーニングデータの数が増えれば，双対問題は非常に大規模なものになる．そのため，効率のよい双対問題の解法を構築することは大きな課題となる．最後に，状況に応じて資産配分を変える場合，取引コストを無視することはできない．そのため，コストを考慮した最適な資産配分関数を考えることも今後の課題の一つである．

謝辞

まず，本報告書作成にあたり，細部にいたるまで熱心なご指導をいただいた山下信雄准教授に心より感謝の意を表します．また，日頃からお世話になっている福嶋雅夫教授，林俊介助教，ならびに本研究を進める上で数々の助言を賜った福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] C.M. ビショップ, (元田 浩, 栗田, 多喜夫, 樋口 知之, 松本 裕治, 村田 昇訳)，パターン認識と機械学習 上　ベイズ理論による統計的予測, シュプリンガー・ジャパン, 2007.

[2] N. Cristianini, J. Taylor, (大北 剛 訳)，サポートベクターマシン入門, 共立出版, 2005.

[3] 福島雅夫，非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[4] ILOG CPLEX,　http://www.ilog.co.jp/product/opti/cplex/cplex.html.

[5] 今野 浩，理財工学 I -平均・分散モデルとその拡張-, 日科技連出版社, 1995.

[6] ——, 下方リスクモデルによるポートフォリオ最適化, オペレーションズ・リサーチ, **46** (2001), pp. 635–639.

[7] H. Konno and H. Yamazaki, *Mean-Absolute Deviation Portfolio Opitimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market*, Management Science, **37** (1991), pp. 519–531.

[8] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, (1959).

[9] Yahoo!ファイナンス,　http://quote.yahoo.co.jp.