特別研究報告書

平均・分散モデルを用いた資産均衡問題と解の一意性

指導教員　　山下信雄　准教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成18年4月入学
平成22年3月卒業

新見　朋広

平成22年1月29日提出

摘要

現在, 債権や株式のみならず, 不動産, 商品など様々な資産が市場で取引されている. 市場に参加する投資家は個々の効用を最大とするように各資産に分散投資している. 各資産の価格は投資家からの投資額によって変動し, その均衡状態から妥当な価格が決まる. この価格を資産均衡という. この均衡状態を知ることができれば投資に関する様々な有用な知見が得られる. これまでに, この均衡状態を表す様々なモデルが提案されており, その存在や一意性が議論されている. しかしそのようなモデルの多くは抽象的な確率微分方程式や効用関数に基づいており, 一般的ではあるが具体性に欠けていた. そのため実際に均衡状態を求めたり, その均衡への個々の投資家の影響を分析することは困難であった. そこで, 均衡状態の計算が容易な資産均衡問題のモデルを提案し, その性質を調べることを考える.

本報告書では, まず投資額によって収益率が変動する平均・分散モデルを提案し, その平均・分散モデルに基づいたポートフォリオ最適化問題を定式化する. つづいて, 各投資家はこの問題によって投資配分を決定しているものと仮定し, 複数の投資家による非協力ゲームを考えることによってこのゲームの均衡解を求める資産均衡問題を定式化する. さらに変分不等式問題へと再定式化することで均衡解の存在と一意性について調べ, 均衡状態が計算可能であることを示す. また, 均衡状態の分析や計算の効率化を図るべく, 各投資家を投資方針ごとに分類することを考える. このとき, 同じ投資方針を持つ投資家全員を特別な効用関数を持つ１人の仮想的な投資家とみなすことができ, より小規模な新たな資産均衡問題として定式化できることを示す. さらに, 数値実験によって各投資家の投資方針の違いや資金規模の影響を分析する.

目次

1　序論

日本ではバブル崩壊後から超低金利時代が続いている．そのため預貯金の魅力が薄れており, ながらく貯蓄大国と言われてきた日本においても近年は預貯金に代わる投資先として様々な資産が注目を浴びている．現在では, 債権や株式のみならず, 不動産, 商品など多様な資産が市場で取引されている．

このような資産への投資において, 収益率の高いと予想される資産に多額の投資をすれば高い利益が期待できる．しかし同時に, ひとつの資産に投資を集中させるとその分高いリスクを負うことになる．収益とリスクのトレードオフを考慮し, 投資から得られる投資家の満足度を表した関数を効用関数という．この投資から得られる満足度を最大化するような資産配分 (ポートフォリオ) を決定する問題をポートフォリオ最適化問題という [4]. 各投資家は個々のポートフォリオ最適化問題を意識的, あるいは無意識的に解くことで投資家にとって最適な資産配分を決定し, 分散投資していると考えることができる．

各資産の価格は, 投資家からの投資額によって変動し, その均衡状態から妥当な価格が決まる [8]. この価格を資産均衡という．成長が見込まれる資産であっても, 多くの投資家が投資すれば資産価格は上昇し, その成長に見合った収益は得られなくなる．また, 最近の金融バブルや原油などの商品価格の乱高下は, 集団の投資家の振る舞いによって巻き起こされたものである．そのため, 集団としての投資家の行動, そしてその結果の資産均衡を知ることができればさまざまな有用な知見が得られる．

これまでに, この均衡状態を表す様々なモデルが提案されており, その存在や一意性が議論されている [6]. しかしそのようなモデルの多くは抽象的な確率微分方程式や効用関数に基づいており, 一般的ではあるが具体性に欠けていた．そのため, 実際に均衡状態を求めたり, その均衡への個々の投資家の影響を分析することは困難であった．そこで, 均衡状態の計算が容易でより具体的なモデルを構築する必要がある．

本報告書では Markowitz によって提案された平均・分散モデル [5] に基づいた均衡モデルを提案する．Markowitz は, 投資による収益を投資時点で確実に知ることが不可能な状況に対して, 投資家がどのように振舞うかを数理モデルとして定式化した．彼は, 収益のみに着目していた従来の投資方法に対して, 収益に加えてリスクを考慮した方法を提唱し, 実務家の支持のみならず経済学の側からも認知を受けた．この理論は収益の指標としてポートフォリオの期待収益率, リスクの指標として収益率の分散を用いることから平均・分散モデルと呼ばれる．平均・分散モデルに基づいたポートフォリオ最適化問題は凸 2 次計画問題として定式化される．平均・分散モデルは, これまで漠然と考えられていた投資のリスクというものを収益率の分散で表現したという点で画期的なものであり, その後に続く投資理論の出発点を与えることとなった．

本報告書では, まず投資額によって収益率が変動する平均・分散モデルを提案し, その平均・分散モデルに基づいたポートフォリオ最適化問題を定式化する．つづいて, 投資家はこの問題によって投資配分を決定しているものと仮定し, 異なる投資方針 (リスク選好度, 投資資金) を持つ m 人の各投資家（以下, プレイヤー $1, \cdots, m$）の非協力ゲームを考える．そしてその均衡解を求める資産均衡問題を定式化する．さらに変分不等式問題として再定式化することで均衡解の存在と一意性について調べる．またその均衡解の計算可能性について述べる．

現実においてプレイヤーの数 m および投資対象となる資産の数 n は非常に大きな数と

なり, 実際に均衡状態の分析や計算には困難が伴う．そこで, 各プレイヤーを投資方針ごとに分類することを考える．このとき, 同じ投資方針を持つプレイヤー同士はまとめて特別な効用関数を持つ 1 人の仮想的なプレイヤーとみなすことができ, より小規模な新たな資産均衡問題として定式化できることを示す．また, その仮想的なプレイヤーによる均衡状態の計算可能性および元のプレイヤーと仮想的なプレイヤーの効用関数の違いについて考察する．さらに, 提案した資産均衡問題に対する数値実験を行い, 各プレイヤーの投資方針の違いや資金規模による均衡状態への影響を分析する．

本報告書の構成を以下に記す．まず第 2 節では本報告書で提案するポートフォリオ最適化問題および資産均衡問題を定式化する．第 3 節では定式化した資産均衡問題を変分不等式問題へと変換し, 均衡解の存在と一意性について述べる．第 4 節では各プレイヤーを投資方針ごとのクラスへ分類した場合の資産均衡問題を定式化し, 均衡解の存在と一意性について述べる．第 5 節では数値実験の結果を報告し, その考察を与える．さらに第 6 節でまとめと今後の課題について述べる．

2　平均・分散モデルを用いた資産均衡問題

本節では m 人のプレイヤーが平均・分散モデルに基づいた各々の効用関数を最大化することによってポートフォリオを定める非協力ゲームを定式化する．

各プレイヤーはそれぞれの投資資金を n 種の資産に分散投資するものとし, 空売りは考えないものとする．すなわち, 各資産への投資額は非負であるとする．

なお, 以下では次の記号を用いる．

x_i^j ： プレイヤー j の資産 i における投資額

X_i ： 各プレイヤーの資産 i における投資額の合計 $(=\sum_{j=1}^{m} x_i^j)$

p^j ： プレイヤー j の投資資金 (定数)

また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^j &:= (x_1^j, \cdots, x_n^j) \\ \boldsymbol{x} &:= (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m) \\ \boldsymbol{x}^{-j} &:= (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^{j-1}, \boldsymbol{x}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{x}^m) \end{aligned}$$

と表記する．$\boldsymbol{x}$ はすべてのプレイヤーのポートフォリオを表し, $\boldsymbol{x}^{-j}$ はプレイヤー j 以外のポートフォリオを表している．

2.1　投資額の資産価格への影響を考慮した平均・分散モデル

まず, プレイヤー j 個人の投資モデルを与える．そのためにプレイヤー j 以外のプレイヤーの投資配分が所与のものとして, プレイヤー j の効用関数の値を最大化するようなポートフォリオ最適化問題を定式化する．

2.1.1 収益率モデル

本報告書では収益率のモデルを資産の" 投資家から見た現在の資産価値 (以下, 投資家価値) ", " 現在の本来の資産価値 (以下, 本来価値) "および" 将来の資産価値 (以下, 将来価値) "を用いて表す. 以下では資産 i の期待成長率および本来価値をそれぞれ, R_i および $\tilde{S}_i$ で表し, 資産 i の投資家価値を S_i とする.

期待収益率は, 将来価値に対して投資家価値 が高ければ収益率は低くなり, 逆に, 将来価値に対して投資家価値が低ければ収益率は高くなる. ここで, 投資家価値のモデルを定める.

投資家価値は, 必ずしも本来価値 と一致しない. これは企業の株価が業績だけでなく, 投資家の人気などに伴い変動することを考えても明らかである. 投資家は投資による収益を期待して資産への投資を行う. そこで本報告書では, 各プレイヤーの投資比率が大きい資産ほど投資家の期待度が大きいものと考え, 投資家価値が高いものとする. すなわち, 資産の投資家価値は, 各プレイヤーのその資産への総投資額に比例するものとする. このとき, 資産 i の投資家価値は以下のように表される.

$$\begin{aligned}\text{資産 } i \text{ の投資家価値 } (= S_i) =& \text{全資産の合計資産価値・全投資家の資産 } i \text{ への投資比率}\\ =&(\sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i)\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\end{aligned}$$

また, 資産 i の将来価値は以下のように表される.

$$\begin{aligned}\text{資産 } i \text{ の将来価値 } =&(1 + \text{資産 } i \text{ の期待成長率})\text{・資産 } i \text{ の本来価値}\\ =&(1 + R_i)\tilde{S}_i\end{aligned}$$

以上のように定めた上で, 具体的な収益率のモデルについて考える. 資産 i における期待収益率を $\boldsymbol{x}$ の関数として以下のように定める. [1]

$$\begin{aligned}r_i(\boldsymbol{x}) =&\frac{\text{資産 } i \text{ の将来価値} - \text{資産 } i \text{ の投資家価値}}{\text{資産 } i \text{ の将来価値}}\\ =&\frac{(1 + R_i)\tilde{S}_i - S_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i}\\ =&1 - \frac{S_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i}\\ =&1 - \frac{\sum_i \tilde{S}_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i(\sum_i X_i)}X_i\\ =&1 - \frac{\sum_i \tilde{S}_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i(\sum_j p^j)}X_i\\ =&1 - l_i X_i\end{aligned} \tag{1}$$

[1], 一般的に投資による収益率といえば $r_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\text{資産 } i \text{ の将来価値} - \text{資産 } i \text{ の投資家価値}}{\text{資産 } i \text{ の投資家価値}}$ と定めるのが自然であるが, このように定めると次節において解の存在と一意性を示すことが出来ないため, 式 (1) のように定めている.

ただし, l_i は

$$l_i := \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i}{(1+R_i)\,\tilde{S}_i \left(\sum_{j=1}^{m} p^j\right)} \tag{2}$$

となる定数である.

2.1.2 効用関数

ポートフォリオ最適化問題を定式化するにあたり, 各プレイヤーの効用関数を定める必要がある. 効用関数とは人間の価値観 (心理的満足感の度合い) を定量的に表現するための数学モデルのことである. 投資における効用関数の指標として一般に投資リターンと投資リスクを用いる [4, 5, 6]. 本報告書では, 投資リターンおよび投資リスクを表す指標としてそれぞれポートフォリオの期待収益率および資産の成長率の分散を用いる. このとき投資リターン μ および投資リスク σ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mu(\boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{x}^{-j}) =& \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \frac{\boldsymbol{x}^j}{p^j} \\ \sigma(\boldsymbol{x}^j) =& \left(\frac{\boldsymbol{x}^j}{p^j}\right)^{\mathrm{T}} V \left(\frac{\boldsymbol{x}^j}{p^j}\right)\end{aligned}$$

と表される. ただし, V は資産の成長率に対する分散共分散行列である. ここで, リスクを冒してでもリターンを重視するリスク選好型の投資家やリターンを下げてでもリスクを嫌うリスク回避型の投資家など, 投資家のリスク観は多様であるため, 本報告書では各投資家ごとのリスク選好度 α を導入し, 投資リスクに対して重みをつける. すなわち, プレイヤー j の効用関数を $U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j})$ とし, プレイヤー j のリスク選好度を α_j とすると

$$\begin{aligned}U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j^*}) =& (\text{投資リターン}) - (\text{投資リスク}) \\ =& \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{x}^{-j^*})^{\mathrm{T}} \frac{\boldsymbol{x}^j}{p^j} - \frac{1}{\alpha_j}(\frac{1}{p^j}\boldsymbol{x}^j)^{\mathrm{T}} V (\frac{1}{p^j}\boldsymbol{x}^j) \\ =& -\frac{1}{\alpha_j {p^j}^2} {\boldsymbol{x}^j}^{\mathrm{T}} V \boldsymbol{x}^j - \frac{1}{p^j}\left(\sum_{j'=1}^{m} \boldsymbol{x}^{j'}\right)^{\mathrm{T}} L \boldsymbol{x}^j + \frac{x_1^j + \cdots + x_n^j}{p^j} \\ =& -\frac{1}{\alpha_j {p^j}^2} {\boldsymbol{x}^j}^{\mathrm{T}} V \boldsymbol{x}^j - \frac{1}{p^j}\left(\sum_{j'=1}^{m} \boldsymbol{x}^{j'}\right)^{\mathrm{T}} L \boldsymbol{x}^j + 1\end{aligned} \tag{3}$$

と表される. ただし

$$L := \begin{pmatrix} l_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & l_n \end{pmatrix}$$

である.

分散共分散行列 V は半正定値行列であることから, U_j は $\boldsymbol{x}^j$ に関して凹関数になる.

2.1.3　ポートフォリオ最適化問題

式 (3) のように定めた効用関数を用いてポートフォリオ最適化問題を定式化する.

プレイヤー j の効用関数値を最大化するポートフォリオ最適化問題は以下のように定式化される.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^j \geq \mathbf{0} \\
& \sum_{i=1}^{n} {x^j}_i = p^j
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで, 実行可能解の集合を Ω_j とおくと集合 Ω_j は凸集合であるので, ポートフォリオ最適化問題 (4) は凸計画問題となる.

2.2　m プレイヤーによる資産均衡問題

問題 (4) として定式化したポートフォリオ最適化問題を m 人のプレイヤーによる非協力ゲームに拡張し, その均衡解を求める資産均衡問題を定式化する. そこでまず, 均衡解の定義を行う.

非協力ゲームにおける均衡状態として, ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) がある [7]. ナッシュ均衡とは, ある戦略の組（本モデルにおいては各投資家の分散投資の組み合わせ $(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m)$）に対して, 各プレイヤーが（他のプレイヤーは戦略を変化させないとして）, どんな他の戦略を選んでもそれ以上自身の利得を高くできないような戦略の組のことをいう.

さて, 前節で定式化したプレイヤー j についてのポートフォリオ最適化問題 (4) に対して, 他のプレイヤーについても全く同様に定式化すると以下のような m 個の凸計画問題が定式化される.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & U_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1*}) \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^1 \in \Omega_1 \\
& \vdots \\
\text{maximize} \quad & U_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m*}) \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^m \in \Omega_m
\end{aligned}
$$

このとき, 次式を満たす $\boldsymbol{x}^* \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m$ をナッシュ均衡解とよぶ.

$$
\left.
\begin{aligned}
U_1(\boldsymbol{x}^{1*}; \boldsymbol{x}^{-1*}) &\geq U_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1*}) \\
&\vdots \\
U_m(\boldsymbol{x}^{m*}; \boldsymbol{x}^{-m*}) &\geq U_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m*})
\end{aligned}
\right.
\qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m
\tag{5}
$$

このナッシュ均衡解を求める問題 (5) を資産均衡問題とよぶ．均衡解が求まれば資産価格等も求められる．そこで, この資産均衡問題 (5) の均衡解の一意性やその計算可能性が重要になる．

3　均衡解の存在と一意性

本節では, 前節で定式化した資産均衡問題 (5) において, 均衡解の存在と一意性について調べると同時に均衡解の計算の可能性について議論する．そこでまず, 資産均衡問題 (5) を変分不等式問題へと再定式化する．

変分不等式問題 (variational inequality problem) とは, 空でない閉凸集合 $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ とベクトル値写像 $\boldsymbol{F}_{IV} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して, 以下のように表される問題をいう．

$$\begin{aligned} &\text{find} && \boldsymbol{x} \in \Omega \\ &\text{such that} && \langle \boldsymbol{F}_{IV}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in \Omega \end{aligned} \tag{6}$$

資産均衡問題 (5) を変分不等式問題に再定式化するために以下の補題を用いる．

補題 3.1. [3, 定理 3.4.] Ω を空でない凸集合とする．$f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ が点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ において微分可能な凸関数であるとき, 以下の凸計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{subject to} && \boldsymbol{x} \in \Omega \end{aligned}$$

において $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ が大域的最適解であるための必要十分条件は

$$\langle \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$

が成り立つことである．

補題 3.1 より, プレイヤー j についてのポートフォリオ最適化問題 (4) は, プレイヤー j 以外のプレイヤーのポートフォリオが $\boldsymbol{x}^{-j^*}$ であるとすると以下の変分不等式問題

$$\begin{aligned} &\text{find} && \boldsymbol{x}^{j^*} \in \Omega_j \\ &\text{such that} && \langle -\nabla_{\boldsymbol{x}^j} U_j(\boldsymbol{x}^{j^*}, \boldsymbol{x}^{-j^*}), \boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^{j^*} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}^j \in \Omega_j \end{aligned} \tag{7}$$

と等価である．ここで, 変分不等式問題 (7) の不等式の両辺を p^j 倍しても解は変わらないので,

$$\begin{aligned} F_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) :=& -p^j \nabla_{\boldsymbol{x}^j} U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) \\ =& \frac{2}{\alpha_j p^j} V \boldsymbol{x}^j + L \boldsymbol{x}^j + \sum_{j'=1}^{m} \left(L \boldsymbol{x}^{j'} \right) \end{aligned}$$

とすると, 変分不等式問題 (7) は以下の変分不等式問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{find} & \boldsymbol{x}^{j^*} \in \Omega_j \\
\text{such that} & \langle F_j(\boldsymbol{x}^{j^*}; \boldsymbol{x}^{-j^*}), \boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^{j^*} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}^j \in \Omega_j
\end{array}
\tag{8}
$$

と等価である. よって

$$
\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} F_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1}) \\ \vdots \\ F_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m}) \end{pmatrix}
\tag{9}
$$

とすると, 資産均衡問題 (5) は以下の変分不等式問題と等価になる.

$$
\begin{array}{rll}
\text{find} & \boldsymbol{x}^* \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m & \\
\text{such that} & \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \rangle \geq 0 & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m
\end{array}
\tag{10}
$$

この変分不等式問題の変数の数は mn である.

以下では, 写像の強単調性を用いて変分不等式問題に対する解の存在と一意性について調べる [2]. そこで, まず写像の強単調性の定義を述べ, 2 つの補題を与える.

$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像 A と空でない凸集合 $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ に対して, A が Ω において強単調 (strongly monotone) であるとは, ある定数 $\sigma > 0$ が存在して

$$
\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{y}) \rangle \geq \sigma \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2
$$

が成り立つことをいう.

補題 3.2. [3, 定理 5.4.] $\boldsymbol{F}_{IV}$ が連続写像であるような変分不等式問題 (6) において, $\boldsymbol{F}_{IV}$ が強単調であれば, 変分不等式問題 (6) は唯一の解を持つ.

補題 3.3. 式 (9) で定義した写像 $\boldsymbol{F}$ は強単調である.

証明. $\boldsymbol{F}$ の定義より,

$$
\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha_1 p^1} V & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2}{\alpha_m p^m} V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2L & L & \cdots & L \\ L & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L \\ L & \cdots & L & 2L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

を得る. これは $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{x}$ のアフィン写像になっていることを示している. アフィン写像において強単調性はヤコビ行列の正定値性と等価であるので, $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}$ が正定値行列であることを示せばよい.

任意の $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \cdots & \boldsymbol{z}_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_m \in \boldsymbol{R}^n)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \right) \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha_1 p^1} V & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \frac{2}{\alpha_m p^m} V \end{pmatrix} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2L & L & \cdots & L \\ L & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L \\ L & \cdots & L & 2L \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\
&> \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & \cdots & L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L & \cdots & L \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\
&= \left(\boldsymbol{z}_1 + \cdots + \boldsymbol{z}_m \right)^{\mathrm{T}} L \left(\boldsymbol{z}_1 + \cdots + \boldsymbol{z}_m \right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

2 番目の不等式は V が半正定値行列, かつ l_i $(i = 1, \cdots, n)$ が正定数であることより従う. よって $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}$ は正定値となり, $\boldsymbol{F}$ 強単調性が示される. □

以下の定理では, 提案した資産均衡問題 (10) の均衡解の存在と一意性について述べる.

定理 3.1. 資産均衡問題 (10) は一意の解を持つ.

証明. 補題 3.2 より, 変分不等式問題 (10) において $\boldsymbol{F}$ が強単調であれば, この変分不等式問題が唯一の解を持つことが保証される. 補題 3.3 より, $\boldsymbol{F}$ の強単調性がいえるので変分不等式問題 (10) は一意の解を持つ. □

補題 3.3 より, 変分不等式問題 (10) の写像 $\boldsymbol{F}$ は強単調であるから一般化ニュートン法や Fischer-Burmeister 関数を用いた再定式化アプローチなど様々な手法で解を求めることができる [2].

4　プレイヤーの分類による効率化

現実において投資家の数 m や投資対象となる資産の数 n は非常に大きくなるため, 均衡状態の分析や計算には困難が伴う. また, 均衡状態の分析においては個々のプレイヤーの振る舞いよりも, むしろそのプレイヤーの属する集団, 例えば富裕層であるとか高齢者であるといった分類による各集団の振る舞いを調べることが重要となる. そこで, 等しいリスク選好度および投資資金をもつプレイヤー同士をひとつのクラスとしてまとめ, m 人のプレイヤーを T 個のクラスに分類することを考える. 後述のように, このようにクラス分けを行うことによって各クラスをそれぞれ特別な効用関数をもつひとつの仮想的なプレイヤーとみなすことができる. さらに, この T 人の仮想的なプレイヤーによる資産均衡問題は, Tn 変数の変分不等式問題に再定式化できる.

4.1 クラス分けの定式化

いま, リスク選好度および投資資金が等しいプレイヤーの集合をクラスとよび, T 個のクラスがあるものとする. さらに, 各プレイヤーはクラス $C_1, \cdots, C_T$ のいずれかに属するものとする.

いま, あるクラス C_t に属するプレイヤー τ のリスク選好度を α_τ, 投資資金を p^τ とする. また, クラス C_t に属するプレイヤーの数を κ_t とする. 定理 3.1 より, 資産均衡問題 (10) の均衡解は唯一であるから同じクラスに属するプレイヤー同士の最適ポートフォリオは等しくなる. ここでプレイヤー τ の効用関数の勾配は

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}^\tau} U_\tau(\boldsymbol{x}^\tau; \boldsymbol{x}^{-\tau}) &= -\frac{2}{\alpha_\tau {p^\tau}^2} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau} L\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau}\sum_{j=1}^{m}\left(L\boldsymbol{x}^j\right) \\
&= -\frac{2}{\alpha_\tau {p^\tau}^2} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{\kappa_t+1}{p^\tau} L\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau}\sum_{j\notin C_t}\left(L\boldsymbol{x}^j\right)
\end{aligned}$$

と書ける. 最後の等号はクラス C_t に属する κ_t 人のプレイヤーはすべてプレイヤー τ と同じ最適ポートフォリオを持つことから従う. よってプレイヤー τ の効用関数は, クラス C_t 以外のクラスに属するプレイヤーのポートフォリオの集合を $\boldsymbol{x}^{-C_t}$ とすると

$$U_\tau(\boldsymbol{x}^\tau; \boldsymbol{x}^{-C_t}) = -\frac{1}{\alpha_\tau {p^\tau}^2} {\boldsymbol{x}^\tau}^{\mathrm{T}} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau}\left(\frac{\kappa_t+1}{2}\boldsymbol{x}^\tau + \sum_{j\notin C_t}\boldsymbol{x}^j\right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^\tau$$

とみなすことができる. そのため, 非協力ゲームにおけるプレイヤー τ のポートフォリオ最適化問題 (4) は

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -\dfrac{1}{\alpha_\tau {p^\tau}^2} {\boldsymbol{x}^\tau}^{\mathrm{T}} V\boldsymbol{x}^\tau - \dfrac{1}{p^\tau}\left(\dfrac{\kappa_t+1}{2}\boldsymbol{x}^\tau + \displaystyle\sum_{j\notin C_t}\boldsymbol{x}^j\right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^\tau \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x}^\tau \geq \boldsymbol{0} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^\tau = p^\tau
\end{array} \tag{11}$$

と表すことができる. この問題は C_t に属するすべてのプレイヤーおいて共通である. ここで $\bar{\boldsymbol{x}}^t := \kappa_t \boldsymbol{x}^\tau$, $\bar{\alpha}_t := \alpha_\tau$, $\bar{p}^t := \kappa_t p^\tau$ とおくと, 問題 (11) は以下の問題に変換できる.

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -\dfrac{1}{\bar{\alpha}_t {\bar{p}^t}^2} {\bar{\boldsymbol{x}}^t}^{\mathrm{T}} V\bar{\boldsymbol{x}}^t - \dfrac{1}{\bar{p}^t}\left(\dfrac{\kappa_t+1}{2\kappa_t}\bar{\boldsymbol{x}}^t + \displaystyle\sum_{j\notin C_t}\bar{\boldsymbol{x}}^j\right)^{\mathrm{T}} L\bar{\boldsymbol{x}}^t \\
\text{subject to} & \bar{\boldsymbol{x}}^t \geq \boldsymbol{0} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^t = \bar{p}^t
\end{array} \tag{12}$$

クラス C_t には, 投資資金 p^τ の κ_t 者のプレイヤーが属しているのでクラス C_t に属するプレイヤーの総投資資金は $\bar{p}^t$ であり, その総ポートフォリオは $\bar{\boldsymbol{x}}^t$ である. そのため凸計画

問題 (12) はクラス C_t に属するすべてのプレイヤーをひとまとめにしたポートフォリオ最適化問題とみなすことができる．そこで, 問題 (12) を解く仮想的なプレイヤーを考え, これをクラスプレイヤー t とよぶことにする．他のクラスについても同様に考えると, 結局各クラスはそれぞれ仮想的なプレイヤーであるクラスプレイヤーが以下の問題を解いているものとみなすことができる．

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -\frac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}} \bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} V \bar{\boldsymbol{x}}^t - \frac{1}{\bar{p}^t} \left(\frac{\kappa_t + 1}{2\kappa_t} \bar{\boldsymbol{x}}^t + \sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^j \right)^{\mathrm{T}} L \bar{\boldsymbol{x}}^t \\
\text{subject to} \quad & \bar{\boldsymbol{x}}^t \geq \boldsymbol{0} \\
& \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^t = \bar{p}^t
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで, 問題 (12) の目的関数にある $\sum_{j \notin C_t} \bar{\boldsymbol{x}}^j$ が問題 (13) では $\sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^j$ と表されていることに注意する．そのため問題 (13) は各クラスプレイヤーのポートフォリオ $\bar{\boldsymbol{x}}^j$ $(j = 1, \cdots, T)$ のみで表されている．

式 (3), (4) によって表される個々のプレイヤーのポートフォリオ最適化問題と比較すると, クラスプレイヤーのポートフォリオ最適化問題 (13) では, 自身の投資が収益率関数に与える影響が $\frac{\kappa_t+1}{2\kappa_t}$ 倍に減少していることがわかる．

以下では,

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}^t :=& (\bar{x}_1^t, \cdots, \bar{x}_n^t) \\
\bar{\boldsymbol{x}} :=& (\bar{\boldsymbol{x}}^1, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}^T) \\
\bar{\boldsymbol{x}}^{-t} :=& (\bar{\boldsymbol{x}}^1, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}^{t-1}, \bar{\boldsymbol{x}}^{t+1}, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}^T)
\end{aligned}
$$

と表記することにする．資産均衡問題 (5) はクラスプレイヤーによる資産均衡問題に変換することができる．前節と同様に考え

$$
\begin{aligned}
\bar{U}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) :=& -\frac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}} \bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} V \bar{\boldsymbol{x}}^t - \frac{1}{\bar{p}^t} \left(\frac{\kappa_t + 1}{2\kappa_t} \bar{\boldsymbol{x}}^t + \sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^j \right)^{\mathrm{T}} L \bar{\boldsymbol{x}}^t, \\
\bar{F}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) :=& -\bar{p}^t \nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}^t} \bar{U}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) \\
\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}) :=& \begin{pmatrix} \bar{F}_1(\bar{\boldsymbol{x}}^1; \bar{\boldsymbol{x}}^{-1}) \\ \vdots \\ \bar{F}_T(\bar{\boldsymbol{x}}^T; \bar{\boldsymbol{x}}^{-T}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とおき, 問題 (13) の実行可能解の集合を $\bar{\Omega}_t$ とすると, クラスプレイヤーによる資産均衡問題は以下の変分不等式問題として定式化される．

$$
\begin{aligned}
\text{find} \quad & \bar{\boldsymbol{x}}^* \in \bar{\Omega}_1 \times \cdots \times \bar{\Omega}_T \\
\text{such that} \quad & \left\langle \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}^*), \bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}^* \right\rangle \geq 0 \qquad \forall \bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{\Omega}_1 \times \cdots \times \bar{\Omega}_T
\end{aligned}
\tag{14}
$$

この変分不等式問題の変数の数は Tn である. つまり, 変数の数を mn から Tn へと減らすことができたことになる.

次に, プレイヤーをクラスに分類し, クラスプレイヤーによる資産均衡問題 (14) として定式化した場合の均衡解の存在と一意性について調べる. 前節同様に, $\bar{\boldsymbol{F}}$ の強単調性をいえばよく, $\bar{\boldsymbol{F}}$ は

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = &\begin{pmatrix} \frac{2}{\bar{\alpha}_1 \bar{p}^1} V & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2}{\bar{\alpha}_T \bar{p}^T} V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{x}}^T \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1} L & L & \cdots & L \\ L & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L \\ L & \cdots & L & \frac{\kappa_T+1}{\kappa_T} L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{x}}^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表されるため, $\bar{\boldsymbol{F}}$ の強単調性は補題 3.3 の証明と全く同様に示すことができる. よってクラスプレイヤーによる資産均衡問題 (14) は唯一の解を持つ. さらに, 変分不等式問題に対するさまざまな手法によって均衡解を求めることができる.

5 数値実験

本節では, 提案した資産均衡問題に対して, いくつかの状況を設定して数値実験を行う. 資産均衡問題を再定式化した変分不等式問題は, 以下のように等価な制約無し最小化問題に変換して解く. まず, 変分不等式問題 (10) は, その KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker Conditions) を考えることによって以下のような等価な混合相補性問題 (mixed complementarity problem, MCP) へと変換することができる [1].

$$
\begin{array}{lcl}
\text{find} & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) & \\
\text{such that} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) & = \mathbf{0} \\
& \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\lambda} & \geq \mathbf{0} \\
& \boldsymbol{x} & \geq \mathbf{0} \\
& \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\lambda}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} & \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

ただし

$$
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x^1}_i - p^1 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x^m}_i - p^m \end{pmatrix}
$$

であり, $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda^1, \cdots, \lambda^m\right)^{\mathrm{T}}$ は制約条件 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ に対するラグランジュ乗数である.

さらに Fischer-Burmeister 関数を用いることにより以下のような制約なし最小化問題へと変換できる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \|\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})\|^2 \\
\text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{mn+m}
\end{array}
\tag{15}
$$

ただし

$$
\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \begin{pmatrix}
\phi_{FB}\left(x^1{}_1, (\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_1\right) \\
\vdots \\
\phi_{FB}\left(x^1{}_n, (\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_n\right) \\
\phi_{FB}\left(x^2{}_1, (\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_{n+1}\right) \\
\vdots \\
\phi_{FB}\left(x^2{}_n, (\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_{2n}\right) \\
\phi_{FB}\left(x^3{}_1, (\boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_{2n+1}\right) \\
\vdots \\
\phi_{FB}\left(x^m{}_n, (\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda})_{mn}\right)
\end{pmatrix}
$$

であり, ϕ_{FB} は Fischer-Burmeister 関数, すなわち $\phi_{FB}(a,b) := a + b - \sqrt{a^2, b^2}$ とする. 制約なし最小化問題 15 は, 準ニュートン法などによって解くことができる [1]. また, $\boldsymbol{F}$ は強単調であるため, 問題 (5) の停留点は変分不等式問題 (10) の解になることが知られている [2]. 本数値実験は MATLAB7.6 を用いて実装し, 制約なし最小化問題 (15) は MATLAB の組み込みコマンド fminunc を用いて解いた.

5.1 数値実験に用いたシナリオ

本数値実験では, 同じ投資方針 (リスク選好度, 投資資金) をもつプレイヤー同士が各自の投資資金を持ち寄って協力し, 1 人のプレイヤーとして投資を行うことによる均衡状態への影響を調べる. なお, このような投資を以下では協力投資とよぶことにする. そこで以下のような状況について数値実験を行った.

シナリオ 1: クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする. 各クラスに属するプレイヤーの数はいずれも 1000 人とする. クラス a, b, c に属するプレイヤーのリスク選好度はそれぞれ 25(リスク選好型), 20(リスク中立型), 15(リスク回避型) とし, 各プレイヤーの投資資金は一律に 1 とする. すなわち

$$
m = 3000, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{25 \cdots 25}_{1000} \quad \underbrace{20 \cdots 20}_{1000} \quad \underbrace{15 \cdots 15}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1 \cdots 1}_{1000} \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{1000} \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}
$$

とする.

シナリオ 2: シナリオ 1 において, クラス a, c の設定は同一とする．またクラス b に属する 1000 人を 900 人と 100 人のクラス b', b" に分割し, クラス b" の 100 人は協力投資を行うものとする．つまり, クラス b', b" に属するプレイヤーの数はそれぞれ 900 人と 1 人, リスク選好度はいずれも 20(リスク中立型) とし, クラス b', b" に属するプレイヤーの投資資金はそれぞれ 1 と 100 とする．すなわち

$$\begin{aligned} m = & 2901, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{25\cdots25}_{1000} \ \ \underbrace{20\cdots20}_{900} \ \ 20 \ \ \underbrace{15\cdots15}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \\ & \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1\cdots1}_{1000} \ \ \underbrace{1\cdots1}_{900} \ \ 100 \ \ \underbrace{1\cdots1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

とする．

シナリオ 3: クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする．クラス a, b, c に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, 1000 人, リスク選好度はそれぞれ 10(リスク回避型), 10(リスク回避型), 20(リスク中立型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100, 1 とする．このとき, クラス b に属するプレイヤーはクラス a に属するプレイヤーと同じリスク選好度および投資資金をもった 100 人のプレイヤーが協力投資を行ったものに相当する．すなわち

$$m = 1101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{10\cdots10}_{100} \ \ 10 \ \ \underbrace{20\cdots20}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1\cdots1}_{100} \ \ 100 \ \ \underbrace{1\cdots1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}$$

とする．

シナリオ 4: クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする．クラス a, b, c に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, 1000 人, リスク選好度はそれぞれ 40(リスク選好型), 40(リスク選好型), 20(リスク中立型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100, 1 とする．このとき, クラス b に属するプレイヤーはクラス a に属するプレイヤーと同じリスク選好度および投資資金をもった 100 人のプレイヤーが協力投資を行ったものに相当する．すなわち

$$m = 1101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{40\cdots40}_{100} \ \ 40 \ \ \underbrace{20\cdots20}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1\cdots1}_{100} \ \ 100 \ \ \underbrace{1\cdots1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}$$

とする．

シナリオ 5: クラスの数を 2 とし, それぞれのクラスを a, b とする．クラス a, b に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, リスク選好度は一律に 40(リスク選好型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100 とする．このとき, クラス b に属するプレイヤーはクラス a に属するプレイヤーと同じリスク選好度および投資資金をもった 100 人のプレイヤーが協力投資を行ったものに相当する．すなわち

$$m = 101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{40\cdots40}_{100} \ \ 40 \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1\cdots1}_{100} \ \ 100 \right)^{\mathrm{T}}$$

とする．

各シナリオにおいて投資対象となる資産の設定は共通とし, 以下のように定める.

- 資産の数は 3 とする. 各資産の期待成長率の間には相関がなくそれぞれ 0.05, 0.15, 0.45 とし, 分散は 0.5, 3.5, 9.0 とする. 各資産の本来価値は一律に 10 とする. つまり本数値実験では, ローリスク・ローリターン (資産 1), ミドルリスク・ミドルリターン (資産 2), ハイリスク・ハイリターン (資産 3) の 3 つの資産を想定する. すなわち

$$n = 3, V = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 9.0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

  とする.

5.2 数値実験結果・考察

以上のようなシナリオ 1 ～ 5 に対して提案モデルの数値実験を行った結果, 各プレイヤーの各資産への投資配分, リターン, リスクおよび効用関数値について表 1, 2, 5～7 の結果を得た. これらの数値実験結果に対して, 均衡状態におけるポートフォリオ, 投資成果 (効用関数値), 市場支配力の 3 点について考察を与える.

5.2.1 均衡ポートフォリオについて

シナリオ 1, 2 に対する結果 (表 1, 2) を見ると, リスク選好度の高いプレイヤーはハイリスク・ハイリターンの資産への投資を好み, リスク選考度の低いプレイヤーはローリスク・ローリターンの資産への投資を好むことが確認できる. さらに協力投資による影響を調べると, リスク選好度は同じであるにも関わらず, 非協力のプレイヤー (シナリオ 1 におけるクラスおよびシナリオ 2 におけるクラス b') のポートフォリオは

資産 3 への投資額 > 資産 2 への投資額 > 資産 1 への投資額

であるのに対し, 協力投資のプレイヤー (シナリオ 2 におけるクラス b") のポートフォリオは

資産 1 への投資額 > 資産 2 への投資額 > 資産 3 への投資額

へと転じていることがわかる. すなわち, 協力投資を行うことによってハイリスク・ハイリターンな投資志向へと変わっていることがわかる. これは以下のように考えることで説明できる.

m 人の資産均衡問題において同一の投資資産 p^τ およびリスク選好度 α_τ を持つ k 人が協力して, 1 人の投資家 (プレイヤー t) として投資を行う場合を考える. これは, $m-k+1$ 人の資産均衡問題においてプレイヤー t が kp^τ の投資資産と α_τ のリスク選好度を持っているものと考えればよく, プレイヤー t のポートフォリオ最適化問題 (4) は以下の問題と

等価になる.

$$\begin{aligned}\text{maximize} \quad & -\frac{1}{\alpha_\tau (kp^\tau)^2}\boldsymbol{x}^{t\mathrm{T}} V \boldsymbol{x}^t - \frac{1}{kp^\tau}\left(\sum_{j=1}^{m-k+1}\boldsymbol{x}^j\right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^t + 1 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^t \geq \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{n} {x^t}_i = kp^\tau\end{aligned}$$

ここで, 目的関数の定数項は取り払って考えても問題なく, 目的関数は以下のように書き換えることが出来る.

$$-\frac{1}{\alpha_\tau (kp^j)^2}\boldsymbol{x}^{t\mathrm{T}} \left(V + \alpha_\tau (kp^\tau) L\right) \boldsymbol{x}^t - \frac{1}{kp^\tau}\left(\sum_{j\neq t}\boldsymbol{x}^j\right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^t$$

一方, k 人が協力投資しない場合は問題 (12) において $\kappa_t = k$ と考えればよく, 目的関数は

$$-\frac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}}\bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} \left(V + \frac{k+1}{2k}\bar{\alpha}_t \bar{p}^t L\right) \bar{\boldsymbol{x}}^t - \frac{1}{\bar{p}^t}\left(\sum_{j\neq t}\bar{\boldsymbol{x}}^j\right)^{\mathrm{T}} L\bar{\boldsymbol{x}}^t$$

と書き換えることができる. ここから, 協力投資を行う場合は行わない場合と比べて, V の影響力に対して L の影響力が大きくなることがわかる. また, l_i は式 (2) で定めたように資産 i の将来価値に反比例する定数であり, 資産の本来価値が一律の場合は資産の成長率に反比例する定数である.

よってシナリオ 1 におけるクラス b やシナリオ 2 におけるクラス b' では V の影響が大きく, よりリスク (分散) の少ない資産に多くの投資していたものがシナリオ 2 におけるクラス b" のように協力投資を行った結果, V に対して L の影響が大きくなったためにより高い成長率の資産への投資にシフトしたものと考えることができる.

なお, 本実験では各資産の成長率の間に相関はない, すなわち分散共分散行列 V の対角成分以外は 0 としたが, 相関がある場合にも同様の議論が当てはまる. その結果を示したものが表 3, 4 のシナリオ 1', 2' である. シナリオ 1' およびシナリオ 2' はそれぞれ各プレイヤーや資産の本来価値, 資産の成長率, 各資産の収益率の分散はシナリオ 1 およびシナリオ 2 と同一であるが, シナリオ 1, 2 と違い各資産の成長率の共分散を設定する. すなわち, 分散共分散行列 V のみを以下のように変更する.

$$V = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 3.5 & -0.15 \\ 0.2 & -0.15 & 9.0 \end{pmatrix}$$

表 3 のクラス b および表 4 のクラス b' に属するプレイヤーと表 4 のクラス b" に属するプレイヤーを比べることにより, 各資産の成長率の間に相関 (共分散) がある場合にも, 協力投資を行うことでより高い成長率の資産への投資にシフトしていることが確認できる.

表 1: 数値実験結果 (シナリオ 1)

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 2000$	$2001, \cdots, 3000$
リスク選好度	25	20	15
投資資金	1	1	1
資産 1 への投資額	0.2140	0.3375	0.4614
資産 2 への投資額	0.3845	0.3318	0.2790
資産 3 への投資額	0.4015	0.3306	0.2597
リターン	0.1862	0.1611	0.1359
リスク	1.9913	1.4263	0.9857
効用関数値	0.1065	0.0897	0.0702

表 2: 数値実験結果 (シナリオ 2)

クラス	a	b’	b”	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 1900$	1901	$1902, \cdots, 2901$
リスク選好度	25	20	20	15
投資資金	1	1	100	1
資産 1 への投資額	0.2144	0.3379	32.63	0.4616
資産 2 への投資額	0.3843	0.3317	33.54	0.2789
資産 3 への投資額	0.4013	0.3304	33.83	0.2595
リターン	0.1861	0.1610	0.1636	0.1358
リスク	1.9890	1.4248	1.4769	0.9849
効用関数値	0.1065	0.0897	0.0897	0.0702

5.2.2 投資成果について

シナリオ 1, 2 では, 協力投資を行った結果, 高成長率の資産への投資へとシフトすることを見た. 表 1, 2 からも確認できるようにこれは (たとえリスクが増えたとしても) リターンを増やす投資へとシフトしていることを意味する. 以下では, このことによる投資の満足度 (投資成果) への影響に対して考察を与える.

協力投資によるリターンの増加はリスク選好型投資家に対しては有利に働くといえる. また, ハイリスク・ハイリターン, ローリスク・ローリターン型の資産への投資においては, 協力投資によるリターンの増加はリスクの増加を意味するため, リスク回避型投資家に対して不利に働くといえる. このことは表 5, 6 の実験結果に見ることができる.

ここで, シナリオ 3, 4 においてクラス c, つまりリスク選好度が 20(リスク中立型) の 1000 人のプレイヤーを設けたのは特定のプレイヤーが過度の市場支配力を持つことを避けるためである. このとき, シナリオ 3 においてはクラス a に属する協力投資を行わないプレイヤーの方が, シナリオ 4 においてはクラス b に属する協力投資を行うプレイヤーの方が効用関数値が高くなっていることが確認できる.

表 3: 数値実験結果 (シナリオ 1')

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 2000$	$2001, \cdots, 3000$
リスク選好度	25	20	15
投資資金	1	1	1
資産 1 への投資額	0.3226	0.3333	0.3625
資産 2 への投資額	0.3111	0.3240	0.3578
資産 3 への投資額	0.3663	0.3427	0.2797
リターン	0.1687	0.1633	0.1488
リスク	1.5913	1.4705	1.2024
効用関数値	0.1051	0.0897	0.0686

表 4: 数値実験結果 (シナリオ 2')

クラス	a	b'	b"	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 1900$	1901	$1902, \cdots, 2901$
リスク選好度	25	20	20	15
投資資金	1	1	100	1
資産 1 への投資額	0.3353	0.3039	31.62	0.3425
資産 2 への投資額	0.3331	0.3022	32.94	0.3418
資産 3 への投資額	0.3316	0.2939	35.44	0.3157
リターン	0.1605	0.1593	0.1668	0.1566
リスク	1.4232	1.4000	1.5492	1.3522
効用関数値	0.1036	0.0893	0.0894	0.0665

5.2.3 市場支配力について

シナリオ 3, 4 では市場支配力を抑制するためにクラス c のプレイヤーを設けたが, ここでは市場支配力の影響について考察する. シナリオ 4 においてクラス c のプレイヤーをなくした場合がシナリオ 5 であり, その結果が表 7 である. シナリオ 5 ではシナリオ 4 に比べてクラス b の市場支配力が強くなっている. シナリオ 4 では協力投資のプレイヤー (クラス b) は良い投資成果 (効用関数値) をあげていたものが, クラス a, b に属するプレイヤーの設定は不変であるにも関わらずシナリオ 5 では投資成果が落ちていることがわかる. これはクラス b に属するプレイヤーのように協力投資によって過度の市場支配力を持つと, 収益率への影響が大きくなるために自身の投資による収益率が下がってしまい, 結果として投資成果が落ちてしまうことを意味している.

6 まとめと今後の課題

本報告書では, 異なる投資方針 (リスク選好度, 投資資金) を持った複数の投資家による均衡解の計算が可能な具体的な資産均衡問題を提案し, 数値実験によってプレイヤー同士

表 5: 数値実験結果 (シナリオ 3)

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 100$	101	$102, \cdots, 1101$
リスク選好度	10	10	20
投資資金	1	100	1
資産 1 への投資額	0.5122	44.82	0.3181
資産 2 への投資額	0.2850	31.85	0.3313
資産 3 への投資額	0.2028	23.33	0.3506
リターン	0.1145	0.1283	0.1660
リスク	0.7857	0.9454	1.5410
効用関数値	0.0359	0.0338	0.0890

表 6: 数値実験結果 (シナリオ 4)

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 100$	101	$102, \cdots, 1101$
リスク選好度	40	40	20
投資資金	1	100	1
資産 1 への投資額	0.2670	20.60	0.3466
資産 2 への投資額	0.2323	33.87	0.3412
資産 3 への投資額	0.5008	45.53	0.3121
リターン	0.1964	0.1943	0.1600
リスク	2.4814	2.2881	1.3445
効用関数値	0.1344	0.1362	0.0927

が協力して投資を行った場合のポートフォリオや効用関数値の変化について考察を与えた.

このようにプレイヤー同士が協力投資を行う場合と行わない場合の最適ポートフォリオの違いについて得られる知見の意味として“ 投資信託 ”の効能が考えられる. 投資信託とは, 多数の投資家により出資・拠出されてプールされた資金を, 資産運用の専門家 (アセットマネージャー) が運用し, 運用成果を投資家に分配する金融商品のことである. 投資信託を利用することは, 本数値実験において協力投資を行うことに相当する. 投資信託では多額の資金によって分散投資を行うため, 一見して個人で小額投資を行うよりも高い成果が期待できそうである. しかし, 本数値実験・考察で見たようにアクティブ運用の投資ファンドにおいてローリスク・ローリターン型投資ファンドではむしろ投資成果が悪くなる可能性もある. また, 運用総額が多く大きな市場支配力を持つ投資信託は避けたほうがよいかもしれない.

今後は, 現実のデータから提案モデルの妥当性を調べ, より現実に即した収益率モデルを考えることや, より多くの状況の下での数値実験を行いさらに有用な考察の試みること,

表 7: 数値実験結果 (シナリオ 5)

クラス	a	b
プレイヤー	$1, \cdots, 100$	101
リスク選好度	40	40
投資資金	1	100
資産 1 への投資額	0.3322	29.39
資産 2 への投資額	0.3270	32.15
資産 3 への投資額	0.3408	38.46
リターン	0.1705	0.1766
リスク	1.4749	1.7365
効用関数値	0.1337	0.1332

また, 本報告書では平均・分散モデルに基づいた資産均衡問題を定式化したが, その他のリスク指標として用いられる絶対偏差や VaR(Value at Risk) 等を用いたモデルについても考えてみること, といったことが課題として挙げられる.

謝辞

本報告書の作成にあたり, 細部にいたるまでご指導をいただいた山下信雄准教授に心より感謝の意を表します. また, 日頃よりお世話になっている福嶋雅夫教授, 林俊介助教ならびに福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems I,II*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[3] 茨木俊秀, 福島雅夫, 最適化の手法, 共立出版, 1993.

[4] 今野浩, 理財工学 I 平均・分散モデルとその拡張, 日科技連, 1995.

[5] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[6] R. Marton, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in Continuous Time Model*, Journal of Economic Theory 3 (1971), pp.373-413.

[7] 渡辺隆裕, ゲーム理論入門, 日本経済新聞社, 2008.

[8] J. Y. Wei and Y. Smeers, *Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices*, Operations Research 47 (1999), pp.102-112.