特別研究報告書

不確実性を含む交通モデルに対する
ロバストWardrop均衡

指導教員　　林　俊介　助教

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成１７年４月入学
平成２２年３月卒業

高橋　仁

平成２２年１月２９日提出

不確実性を含む交通モデルに対する ロバスト Wardrop 均衡

高橋　仁

摘要

与えられた交通ネットワークに対して，出発地と目的地のペア，および各々のペアに対する交通需要が与えられたとき，各ルートにおける交通量の均衡状態として知られるのが Wardrop 均衡である．Wardrop 均衡とは，いずれのドライバーも，自分だけがルートを変更することにより，所要時間を減少させることができない状態であり，このような均衡状態は Wardrop の等時間配分原理によって特徴づけられる．Wardrop 均衡の概念は，すべてのドライバーが交通ネットワークのすべての情報（所要時間関数のパラメータなど）をもち，それ自体がすべてのドライバーの共通認識であるという前提の下で意味をなす．しかし，現実においては，その前提が必ずしも満たされるとは限らない．そこで，本報告書では，各ドライバーが不確実な情報の下で起こり得る最悪のケースを想定し，それに基づいて自分のルートを選択するものと考える．そして，そのときに得られる均衡状態をロバスト Wardrop 均衡と定義する．

本報告書では，まず Wardrop 均衡問題を定式化し，それを混合相補性問題に再定式化する．次に，各ドライバーの目的地までの所要時間関数に不確実性を組み込み，その不確実性の下でロバスト Wardrop 均衡問題を定式化する．さらに，不確実性を表す集合が無限大ノルムや 2 ノルムで表されるとき，それぞれを混合相補性問題，二次錐相補性問題といった既存の手法で解くことのできるクラスの問題に再定式化する．最後に，具体的に与えられた交通ネットワークに対して，ロバスト Wardrop 均衡問題を計算機で実際に解き，不確実性集合の違いに対するロバスト Wardrop 均衡解の変化を調べる．

目 次

1 序論

ネットワークゲームとは出発地から目的地までのルートを選択する複数のプレイヤーの相互作用をモデル化したものである．このモデルは，交通，通信，流通ネットワークなどをモデル化するためによく使われてきた．各プレイヤーのルート選択はシステムの管理者によってなされる場合もあるが，多くの場合，それは個々のプレイヤーによってなされる．例えば，交通モデルにおいて，各ドライバーがそれぞれ自分のコストが最小になるようなルートを選択すると考えるのが自然であるが，そのような場合において，いずれのドライバーも自分だけがルートを変更しても，コストの軽減ができないような均衡状態（Wardrop [15] の等時間配分原理が成り立つような状態）を Wardrop 均衡とよぶ．また，道路のネットワーク，出発地と目的地のペア（OD ペア），および各 OD ペアに対する交通需要が与えられたとき，Wardrop の等時間配分原理を満たすドライバーの均衡状態を求める問題を Wardrop 均衡問題という．現実の問題では，有料道路等の影響により，コストに交通費用も含まれることも考えられるが，本報告書では簡単のためコストを目的地までの所要時間と考えることにする．

Wardrop の等時間配分原理の概念は，各ユーザーが交通ネットワークにおいてコストが最小となるようなルートを選択するという原理に基づくものであり，その概念は非協力ゲームにおける Nash 均衡によく似ている．Nash 均衡は，各プレイヤーが独立に戦略を決定した結果，どのプレイヤーも戦略を変更する動機をもたないような均衡状態である．この概念は，Nash [10, 11] によって考案されたものであり，彼はプレイヤーの数が有限であるようなゲームにおいて，均衡解が存在するための条件を示した．一方，Wardrop 均衡問題に対しても，Beckmann and Winsten [2] が，適当な仮定の下で Wardrop 均衡が存在し，それが唯一であることを示した．さらに，プレイヤーの人数が無限であるような非協力ゲームの Nash 均衡が Wardrop 均衡と等価であることも Haurie and Marcotto [9] によって研究されている．

Nash 均衡は，各プレイヤーがゲームのルールについて完全な知識を持ち，それ自体がプレイヤーの共通認識であるという前提の下で意味をもつ．しかし，現実においてその前提が満たされるとは限らない．そのような各プレイヤーが不確実な情報しか持たないゲームに対して，近年，ロバスト Nash 均衡 [1, 8, 12] という概念が盛んに研究されている．ロバスト Nash 均衡とは，各プレイヤーが不確実な情報の下で想定される最悪のケースを考慮に入れて，すなわちロバスト最適化 [3] に基づいて戦略決定がなされた結果起こりうる均衡状態である．Ordóñez and Stier-Moses [14] はこの概念を Wardrop 均衡問題に応用したが，彼らのモデルは各道路に不確実性の上限を与える定数を付加しただけの非常に単純なものであった．

本報告書では，Ordóñez and Stier-Moses が定義した概念を，より一般化した形でロバスト Wardrop 均衡の概念を定義する．具体的には，次のように定義する．(i) 所要時間関数が不確実なパラメータを含むが，そのパラメータは少なくともある範囲（不確実性集合）に含まれているものとする．(ii) 各ドライバーは，(i) の仮定の下で起こりうる最悪の所要時間（最悪所要時間）が最も短くなるようなルートを選択するものとする．(iii) (ii) の結果起こりうる均衡状態をロバスト Wardrop 均衡と定義する．言い換えると，ロバスト Wardrop 均衡とは，各ドライバーが最悪所要時間をコストとみなしたときの Wardrop 均衡ということができる．本報告書では，不確実性集合が無限大ノルムやユークリッドノルムを用いて表される場合を考え，ロバスト Wardrop 均衡問題が混合相補性問題もしくは二次錐相補性問題として再定式化できることを示す．さらに，これらの問題を既存のアルゴリズムを用いて解き，ロバスト Wardrop 均衡の振る舞いを観察する．

本報告書の構成は以下の通りである．第 2 節では本報告書で考える交通ネットワークを定式化し，ロバスト Wardrop 均衡の概念を定義する．第 3 節では本報告書で用いるいくつかのクラスの均衡問題について紹介する．第 4 節では具体的ないくつかのケースに対して，ロバスト Wardrop 均衡問題を相補性問題として再定式化する．第 5 節ではそれらの簡単な問題例に対する数値実験を行いロバスト Wardrop 均衡の性質を調べる．第 6 節では結論を述べる．

本報告書を通じて，以下の表記法を用いる．$\mathbb{R}^n_+$ は各成分が非負である n 次元実ベクトルの集合を表す．すなわち，$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|x\| := \sqrt{x^T x}$ はユークリッドノルムを，$\|x\|_\infty := \max\{\,|x_1|, \cdots, |x_n|\,\}$ は無限大ノルムを表す．

2　定式化

2.1　交通モデルと Wardrop 均衡

本節では，交通モデルと Wardrop 均衡の定式化を行う．道路網を有向グラフ $G = (V, E)$ で表す．ただし，V は頂点（道路網においては交差点，出発点，目的地に相当）の集合，E は辺の集合（道路網においては交差点間の各道路に相当）である．さらに，出発点 (origin) と目的地 (destination) のペア（OD ペアとよぶ）の集合を W とし，各 OD ペア $w \in W$ に対する交通需要を $d_w > 0$ とする．また，OD ペア $w \in W$ に属するルート（パス）の集合を R_w とする．また，すべてのルートの集合を $R := \cup_{w\in W} R_w$ とする．

ここで，各ルート r に対する交通量を x_r とし，それらをすべての $r \in R$ に対して並べたベクトルを $x = (\ x_1, x_2, \ldots, x_{|R|}\ )^T \in \mathbb{R}_+^{|R|}$ とする．このとき, 各 OD ペアに属するルートの交通量の総和はその OD ペアに対する交通需要と等しい，すなわち，$\sum_{r\in R_w} x_r = d_w\ (\forall w \in W)$ であるため，ベクトル x は次の集合 $X \subseteq \mathbb{R}_+^{|R|}$ に属している必要がある．

$$X := \left\{ x \;\middle|\; x \geq 0,\ Nx - d = 0 \right\} \tag{2.1}$$

ここで，行列 $N \in \mathbb{R}^{|W|\times|R|}$ は，$r \in R_w$ ならば $N_{wr} = 1$ であり，$r \notin R_w$ ならば $N_{wr} = 0$ であるような 0-1 行列であり，$d = (d_1, d_2, \ldots, d_{|W|})^T \subseteq \mathbb{R}_+^{|W|}$ である．さらに，交通量ベクトルが x のときにルート r に対する所要時間を与える関数を $f_r : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}$ とすると，Wardrop の等時間配分原理を表す式は

$$\left[\ x_r^* > 0 \Longrightarrow f_r(x^*) \leq f_{r'}(x^*) \quad \forall r' \in R_w\ \right] \quad \forall r \in R_w\ ,\ \ \forall w \in W \tag{2.2}$$

で与えられ，これを満たす $x^* \in X$ を Wardrop 均衡という．この原理は，ある OD ペア $w \in W$ に対して，ルート $r \in R_w$ に交通流が存在するならば，そのルートは他のどのルート $r' \in R_w$ よりも所要時間が等しいか短いことを意味する．言い換えると，あるルート $r \in R_w$ の所要時間が他のルート $r' \in R_w$ よりも長ければ，そのルートには交通流は存在しないことを意味する．

最後に，各ルートに対する所要時間関数 f_r を具体的に記述する．各道路 $i \in E$ に対する交通量を y_i とし，その道路に対する所要時間を $c_i(y_i)$ とする．このとき，関数 c_i は y_i に対して単調増加であるものと考えられる．本報告書では，道路 i の所要時間関数を次のような線形関数として定義する．

$$c_i(y_i) = a_i(p_i y_i + q_i) \tag{2.3}$$

ここで，$a_i > 0$ は道路 i の長さ，$p_i > 0$ は道路 i における交通量の増加に対する所要時間の増加率を単位道路長当りで表したもの，$q_i > 0$ は道路 i に交通流が存在しないときの単位道路長当りの所要時間を表す定数である．さらに，$y := (y_1, y_2, \ldots, y_{|E|})^T$，$p := (p_1, p_2, \ldots, p_{|E|})^T$，$q := (q_1, q_2, \ldots, q_{|E|})^T$，$a := (a_1, a_2, \ldots, a_{|E|})^T$ とし，$A := \mathrm{diag}(a)$，$P := \mathrm{diag}(p)$ とすると，(2.3) 式より，

$$\begin{aligned} c(y) \ &:= \begin{pmatrix} c_1(y) \\ c_2(y) \\ \vdots \\ c_{|E|}(y) \end{pmatrix} \\ &= \ APy + Aq \end{aligned}$$

を得る．さて，ルート r に含まれる道路の集合を E_r とすると，所要時間関数 f_r は $f_r(x) = \sum_{i\in E_r} c_i(y_i)$ と書くことができる．したがって，関数 $F : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}^{|R|}$ を

$$F(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_{|R|}(x) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

で定義すると，$F(x) = M^T c(y)$ が成り立つことが分かる．ただし，$M \in \mathbb{R}^{|E|\times|R|}$ は $i \in E_r$ ならば $M_{ir} = 1$，$i \notin E_r$ ならば $M_{ir} = 0$ であるような 0-1 行列である．さらに，$y = Mx$ が成り立つので，結局，

$$\begin{aligned} F(x) &= M^T c(y) \\ &= M^T APy + M^T Aq \\ &= M^T APMx + M^T Aq \end{aligned}$$

すなわち，

$$f_r(x) = (M^T APM)_r^T x + (M^T Aq)_r \tag{2.5}$$

を得る．ただし，$(M^T APM)_r$ は対称行列 $M^T APM$ の第 r 列ベクトルを，$(M^T Aq)_r$ はベクトル $M^T Aq$ の第 r 成分を表す.

2.2　ロバスト Wardrop 均衡

前節では，交通モデルを定式化し，Wardrop の等時間配分原理について議論したが，このようなモデルでは各ドライバーが所要時間を正確に推定できることが前提となっていた．しかし，現実では，所要時間が正確に推定できるとは限らない．思いも寄らぬ事故があった場合，大幅に所要時間がかかることがある．このような不確実性が存在する交通モデルに対して，本節ではロバスト Wardrop 均衡という概念を定義する．

ルート r に対する所要時間関数 f_r がパラメータ $\hat{u}^r$ を用いて $f_r^{\hat{u}^r} : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}$ と表わされるとする.（具体的には，$\hat{u}^r$ は多項式の係数などを表す.）しかし，各ドライバーはそのパラメータ $\hat{u}^r$ を厳密には推定できず，空でない有界集合 U_r に含まれているとしか予想できないものとする．このとき，ドライバーが想定する最悪の所要時間を表す所要時間関数（以後，最悪所要時間関数とよぶ）$\tilde{f}_r : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}^{|R|}$ は次のように定義できる．

$$\tilde{f}_r(x) := \max \left\{ f_r^{\hat{u}^r}(x) \;\middle|\; \hat{u}^r \in U_r \right\} \tag{2.6}$$

各ドライバーは，この最悪所要時間が最小となるようなルートを選択するものとする．このとき，最終的に落ち着く均衡状態，すなわち，以下を満たす $x^* \in X$ をロバスト Wardrop 均衡と定義する．

$$\left[\; x_r^* > 0 \Longrightarrow \tilde{f}_r(x^*) \le \tilde{f}_{r'}(x^*) \quad \forall r' \in R_w \; \right] \qquad \forall r \in R_w, \;\; \forall w \in W \tag{2.7}$$

3　均衡問題

本節では本論文に出てくる 3 つのクラスの均衡問題について紹介する．

3.1　変分不等式問題

連続なベクトル値関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と空でない閉凸集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、以下の条件を満たすベクトル $x^* \in X$ を求める問題を，変分不等式問題（Variational Inequarity Problem: VIP）という．

$$\mathrm{VIP}(F, X) : \qquad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \quad \forall x \in X \tag{3.1}$$

変分不等式問題はとても広いクラスの問題であり，最適化問題や方程式系をサブクラスとして含む [5]．実際，$F(x)$ がある実数値関数 $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を用いて $F(x) = \nabla\theta(x)$ と表される場合，$\mathrm{VIP}(F, X)$ は最小化問題“ Minimize $\theta(x)$ subject to $x \in X$ ”と等価である．また，$X = \mathbb{R}^n$ の場合，$\mathrm{VIP}(F, X)$ は方程式“ $F(x) = 0$ ”と等価である．

さて，本節では，Wardrop 均衡問題が変分不等式問題として帰着できることを示す．実際，集合 $X \subset \mathbb{R}^{|R|}$ および関数 $F : \mathbb{R}^{|R|} \to \mathbb{R}^{|R|}$ をそれぞれ (2.1) および (2.4) で与えると，Wardrop 均衡問題 (2.2) と変分不等式問題 (3.1) が等価になる．

命題 3.1 集合 X と関数 F をそれぞれ (2.1) および (2.4) で定義する．このとき，$x^* \in X$ が Wardrop 均衡問題 (2.2) の解であることと，$x^* \in X$ が変分不等式 (3.1) の解であることは同値である．

証明 まず，変分不等式問題 (3.1)，Wardrop 均衡問題 (2.2) はそれぞれ次のように等価に書き換えられることに注意する．

$$\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X \tag{3.2}$$

$$\left[\; x_r^* > 0 \;\Rightarrow f_r(x^*) = F_w^* \;\right] \;\; \forall w \in W \tag{3.3}$$

ただし，F_w^* は OD ペア $w \in W$ に対する最小所要時間，すなわち，

$$F_w^* := \min_{r' \in R_w} f_{r'}(x^*)$$

である．したがって，任意の $x^* \in X$ に対して，(3.2) が成り立つこと (3.3) とが成り立つことが同値であることを示せばよい．

まず，(3.3) が成り立つときに (3.2) が成り立つことを示す．$x^* \in X$ を (3.3) を満たす任意の交通量ベクトルとし，$x \in X$ を任意の交通量ベクトルとする．さらに，$w \in W$ を任意の OD ペアとする．このとき，集合 X の定義より

$$\sum_{r\in R_w}(x_r - x_r^*) = \sum_{r\in R_w} x_r - \sum_{r\in R_w} x_r^* = d_w - d_w = 0$$

が成り立つ．従って，以下の関係を得る．

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r\in R_w}(x_r - x_r^*)F_w^* \\ &= \sum_{\{r\in R_w | x_r \geq x_r^*\}}(x_r - x_r^*)F_w^* + \sum_{\{r\in R_w | x_r < x_r^*\}}(x_r - x_r^*)F_w^* \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで，(3.4) の第 1 項に対して，$x_r - x_r^* \geq 0$ および $F_w^* \leq f_r(x^*)$ の関係を用いると，

$$\sum_{\{r\in R_w | x_r \geq x_r^*\}}(x_r - x_r^*)F_w^* \leq \sum_{\{r\in R_w | x_r \geq x_r^*\}}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) \tag{3.5}$$

を得る．さらに，(3.4) の第 2 項に対して，$0 \leq x_r < x_r^*$ および (3.3) 式を用いると，

$$\sum_{\{r\in R_w | x_r < x_r^*\}}(x_r - x_r^*)F_w^* = \sum_{\{r\in R_w | x_r < x_r^*\}}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) \tag{3.6}$$

を得る．従って，(3.5) と (3.6) を (3.4) 式に代入すると，以下の関係を得る．

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r\in R_w}(x_r - x_r^*)F_w^* \\ &\leq \sum_{\{r\in R_w | x_r \geq x_r^*\}}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) + \sum_{\{r\in R_w | x_r < x_r^*\}}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) \\ &= \sum_{r\in R_w}(x_r - x_r^*)f_r(x^*) \end{aligned}$$

さらに，上の不等式をすべての $w \in W$ に対して足し合わせると，(3.2) を得る．

次に (3.2) が成り立つときに (3.3) が成り立つことを示す．$x^* \in X$ を (3.2) を満たす任意の交通量ベクトルとし，$w \in W$ を任意の OD ペアとする．また，$r \in R_w$ を $x_r^* > 0$ となる任意のルートとする [1]．このとき，$f_r(x^*) = F_w^*$ が成り立つことを示せばよい．さて，$\bar{r} \in R_w$ を $f_{\bar{r}}(x^*) = F_w^*$ となる任意のルートとしよう．ただし，$\bar{r} = r$ ならば明らかに $f_r(x^*) = F_w^*$ が成り立つので，$\bar{r} \neq r$ であるものとする．さらに，x を

[1] $d_w > 0$ かつ $x \in X$ ゆえ，このようなルートは必ず存在する．

$x_r = 0, x_{\bar{r}} = x_r^* + x_{\bar{r}}^*$ であり，それ以外の成分は x^* と同じであるようなベクトルとする．このとき，明らかに $x \in X$ であるので，x および x^* を (3.2) 式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} (x_r - x_r^*) f_r(x^*) \\
&= (x_r - x_r^*) f_r(x^*) + (x_{\bar{r}} - x_{\bar{r}}^*) f_{\bar{r}}(x^*) \\
&= -x_r^* f_r(x^*) + x_r^* f_{\bar{r}}(x^*) \\
&= x_r^*(-f_r(x^*) + F_w^*)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，上式の両辺を $x_r^* > 0$ で割ると，$f_r(x^*) \leq F_w^*$ を得る．一方で，$F_w^* = \min_{r' \in R_w} f_{r'}(x^*)$ であったので，$f_r(x^*) \geq F_w^*$ も成り立つ．したがって，$f_r(x^*) = F_w^*$ を得る． □

3.2 混合相補性問題

混合相補性問題 (Mixed Complementarity Problem: MCP) とは，空でない直方体 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i \ (i = 1, \dots, n)\}$ とベクトル値関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が与えられたときに，次の不等式を満たすベクトル $x \in S$ を求める問題である．

$$
\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in S \tag{3.7}
$$

ここで，$l_i \in [-\infty, +\infty)$，$u_i \in (-\infty, +\infty]$，および $l_i < u_i$ であり，$l_i = -\infty$ または $u_i = +\infty$ のときには $l_i \leq x_i$ と $l_i \geq u_i$ はそれぞれ $-\infty < x_i$ と $x_i < +\infty$ を意味するものとする．したがって，集合 S は一般に有界とは限らない．また，混合相補性問題 (3.7) は明らかに，変分不等式問題 (3.1) に含まれるクラスの問題である．

混合相補性問題 (3.7) は，各成分ごとの不等式

$$
F_i(x)(y_i - x_i) \geq 0 \qquad \forall y_i \in [l_i, u_i] \qquad i = 1, \cdots, n
$$

と等価であることが知られている [6]．ここで，直方体 S に対して，適当な変数変換を施すことにより，一般性を失うことなく添字集合 $N = \{1, \dots, n\}$ を次のように分割できる．

$$
N = N_1 \cup N_2 \cup N_3
$$

ただし，$N_1 = \{i \mid l_i = -\infty, u_i = +\infty\}, N_2 = \{i \mid l_i = 0, u_i = +\infty\}, N_3 = \{i \mid -\infty < l_i < u_i < +\infty\}$ である．これによって，混合相補性問題 (3.7) は次のように表すことができる．

$$
\begin{array}{ll}
F_i(x) = 0 & (i \in N_1) \\
0 \leq x_i \perp F_i(x) \geq 0 & (i \in N_2) \\
\left.\begin{array}{l}
l_i \leq x_i \leq u_i \\
x_i = l_i \Rightarrow \ F_i(x) \geq 0 \\
l_i < x_i < u_i \Rightarrow \ F_i(x) = 0 \\
x_i = u_i \Rightarrow \ F_i(x) \leq 0
\end{array}\right\} & (i \in N_3)
\end{array} \tag{3.8}
$$

さて，3.1 節では，交通量ベクトル $x \in \mathbb{R}^{|R|}$ と，その制約集合 X および各 OD ペア $w \in W$ に対する各ルート $r \in R_w$ の所要時間関数が与えられたとき，Wardrop 均衡問題 (2.2) と変分不等式問題 (3.1) とが等価であることを示した．さらに，変分不等式問題の Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件を用いると，Wardrop 均衡問題 (2.2) を混合相補性問題に帰着することができる．実際，集合 X は $X := \{x \mid x \geq 0, Nx - d = 0\}$ というように，関数に対する等式と不等式を用いて表されているので，変分不等式問題 (3.1) に対する KKT

条件は次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
F(x) - \mu + N^T\lambda = 0 \\
Nx - d = 0 \\
\mu \geq 0,\ x \geq 0,\ \mu^T x = 0
\end{aligned}
$$

ただし，$\mu \in \mathbb{R}^{|R|}, \lambda \in \mathbb{R}^{|W|}$ はラグランジュ乗数である．ここで，μ を消去すると

$$
0 \leq x \perp F(x) + N^T\lambda \geq 0\ ,\quad Nx - d = 0 \tag{3.9}
$$

を得る．したがって，Wardrop 均衡問題 (2.2) を混合相補性問題 (3.9) に再定式化することができた．

3.3 二次錐相補性問題

二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Copmlementarity Problem: SOCCP) とは以下の条件を満たすベクトル $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^v$ を求める問題である．

$$
\mathcal{K} \ni \xi \perp \eta \in \mathcal{K}\ ,\quad G(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{3.10}
$$

ただし，$G : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^v \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^v$ は与えられた関数であり，$\mathcal{K}$ は l_j 次元の二次錐 $\mathcal{K}^{l_j} := \{\ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l_j - 1} \mid \|\xi_2\| \leq \xi_1\ \}$ を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{l_1} \times \mathcal{K}^{l_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{l_m}$ で定義される閉凸錐である．SOCCP に対しては，平滑化法や再定式化法などのアルゴリズムが提案されている [7]．

本報告書では，特に次の二次錐相補性条件を満たすベクトル $\zeta \in \mathbb{R}^{l+\tau}$ を求める問題を考える．

$$
\mathcal{K} \ni S\zeta + k \perp T\zeta + r \in \mathcal{K}\ ,\quad C\zeta = d \tag{3.11}
$$

ここで，$S, T \in \mathbb{R}^{l \times (l+\tau)}, k, r \in \mathbb{R}^l, C \in \mathbb{R}^{\tau \times (l+\tau)}, d \in \mathbb{R}^\tau$ は与えられた定数行列および定数ベクトルである．補助変数 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^l$ を用いて次のように関数 $G : \mathbb{R}^{3l+\tau} \to \mathbb{R}^{2l+\tau}$ を定義すれば，SOCCP(3.11) は SOCCP(3.10) の形に帰着できる．

$$
G(\xi, \eta, \zeta) := \begin{pmatrix} \xi - S\zeta - k \\ \eta - T\zeta - r \\ C\zeta - d \end{pmatrix}
$$

また，$\mathcal{K}^1 = \mathbb{R}_+$ であるので，$\mathcal{K} = \mathcal{K}^1 \times \mathcal{K}^1 \times \cdots \times \mathcal{K}^1 = (\mathcal{K}^1)^l$ とすると，SOCCP(3.11) は以下のように書き直すことができる．

$$
0 \leq S\zeta + k \perp T\zeta + r \geq 0\ ,\quad C\zeta = d \tag{3.12}
$$

したがって，SOCCP(3.11) は線形な MCP を一般化したものであるということもできる．

最後に，二次錐相補性条件を特徴づける簡単な命題を一つ挙げる．なお，本命題は，次節でロバスト Wardrop 均衡問題を二次錐相補性問題に帰着する際に重要な役割を果たす．

命題 3.2 $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$ を $l \geq 2$ であるような任意のベクトルとする．このとき，$\xi_1 = \|\xi_2\|$ であることの必要十分条件は，あるベクトル $v \in \mathbb{R}^{l-1}$ が存在して二次錐相補性条件

$$
\mathcal{K}^l \ni \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^l \tag{3.13}
$$

が成り立つことである．

証明 まず必要性を示す．$(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$ を $\xi_1 = \|\xi_2\|$ を満たす任意のベクトルとする．ここで，$\xi_1 = \|\xi_2\| = 0$ ならば (3.13) を満たす $v \in \mathbb{R}^{l-1}$ は明らかに存在するので，$\xi_1 = \|\xi_2\| > 0$ であるものとする．こ

のとき，$v = -\xi_2/\|\xi_2\|$ とすると，明らかに $\binom{1}{v} \in \mathcal{K}^l$，$\binom{\xi_1}{\xi_2} \in \mathcal{K}^l$ が成り立つ．さらに，$v = -\xi_2/\|\xi_2\|$ より，$\binom{1}{v}^T \binom{\xi_1}{\xi_2} = \xi_1 + v^T\xi_2 = \xi_1 - \|\xi_2\| = 0$ が成り立つ．よって，(3.13) を得る．

次に十分性を示す．$v \in \mathbb{R}^{l-1}$，$(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$ を (3.13) 式を満たす任意のベクトルとする．このとき，次の三つの関係を得る．

$$0 \, = \, \xi_1 + v^T\xi_2 \tag{3.14}$$

$$1 \, \geq \, \|v\| \tag{3.15}$$

$$\xi_1 \, \geq \, \|\xi_2\| \tag{3.16}$$

(3.14) 式に (3.15) 式と (3.16) 式を代入すると，次の式を得る．

$$0 = \xi_1 + v^T\xi_2 \geq \|v\|\|\xi_2\| + v^T\xi_2 \geq 0$$

ただし，最後の不等号はコーシー・シュワルツの不等式より成り立つ．よって，上式の不等号はすべて等号として成立する．したがって，

$$\xi_1 = \|v\|\|\xi_2\|$$

を得る．この式に (3.15) を代入すると，

$$\xi_1 = \|v\|\|\xi_2\| \leq \|\xi_2\|$$

となる．一方，(3.16) より $\xi_1 \geq \|\xi_2\|$ であったので，結局 $\xi_1 = \|\xi_2\|$ を得る．よって，十分性も証明できた．

□

4 ロバスト Wardrop 均衡問題の相補性問題への定式化

本節では，具体的に不確実性集合を与えることにより，ロバスト Wardrop 均衡問題を混合相補性問題および二次錐相補性問題へ再定式化する．なお，4.1, 4.2 節では，各ルートの所要時間関数に対して不確実性集合を直接定義する．一方，4.3, 4.4 節では，各道路の所要時間関数に対して不確実性集合を定義する．

具体的な再定式化を行う前に，準備として，最悪所要時間を陽に表す際に必要となる命題を挙げる．

命題 4.1 $a = (a_1, a_2 \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ を任意のベクトルとし，$\rho > 0$ を任意の正の数とする．このとき，次の式が成り立つ．

$$\text{(a)} \quad \max_{\delta \in \mathbb{R}^n} \left\{ a^T\delta \;\middle|\; \|\delta\|_\infty \leq \rho \right\} = \rho(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$$

$$\text{(b)} \quad \max_{\delta \in \mathbb{R}^n} \left\{ a^T\delta \;\middle|\; \|\delta\| \leq \rho \right\} = \rho\|a\|$$

証明 $a = 0$ の場合は (a) も (b) も自明であるので，$a \neq 0$ であるものとする．

まず (a) を示す．δ を $\|\delta\|_\infty \leq \rho$ であるような任意のベクトルとすると，

$$a^T\delta = \sum_{i=1}^n a_i\delta_i \leq \sum_{i=1}^n |a_i||\delta_i| \leq \rho \sum_{i=1}^n |a_i| \tag{4.1}$$

が成り立つ．さらに，実際に $\bar{\delta} := \rho(\mathrm{sgn}(a_1), \mathrm{sgn}(a_2), \ldots, \mathrm{sgn}(a_n))^T$ とすると，$\|\bar{\delta}\|_\infty \leq \rho$ であり，(4.1) 式の不等号がすべて等号で成り立つ．ただし，$a_i \geq 0$ のとき $\mathrm{sgn}(a_i) = 1$ であり，$a_i < 0$ のとき $\mathrm{sgn}(a_i) = -1$ であるものとする．よって (a) が示せた．

次に (b) を示す．δ を $\|\delta\| \leq \rho$ であるような任意のベクトルとすると，コーシー・シュワルツの不等式より

$$a^T\delta \leq \|a\|\|\delta\| \leq \rho\|a\| \tag{4.2}$$

が成り立つ．さらに，実際に $\bar{\delta} = \rho a/\|a\|$ とすると，$\|\bar{\delta}\| \leq \rho$ であり，(4.2) の不等号がすべて等号で成り立つ．よって (b) が示せた．

□

4.1 各ルートの所要時間関数に不確実性集合を直接定義した場合（無限大ノルム）

本節では，各ルートの所要時間関数に対する不確実性集合が無限大ノルムを用いて表されるものと仮定し，その仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を混合相補性問題として再定式化する．

簡単のため，

$$\alpha := M^T APM,\ \beta := M^T Aq,\ \alpha_r := (M^T APM)_r,\ \beta_r := (M^T Aq)_r \tag{4.3}$$

とおく．このとき，所要時間関数に不確実性が含まれていなければ，(2.5) 式より $f_r(x) = \alpha_r^T x + \beta_r$ と書くことができる．しかし，現実の問題では各ルートの所要時間がこのように正確な関数として表記できるとは限らない．そこで，実際の所要時間は不確実性を含むパラメータ $\hat{u}^r := \binom{\hat{\alpha}_r}{\hat{\beta}_r}$ を用いて $f_r^{\hat{u}^r}(x) = \hat{\alpha}_r^T x + \hat{\beta}_r$ と表されるものとする．さらに，不確実性集合 U_r は次の仮定を満たすものとする．

仮定 1 各ルートに対する所要時間関数 $f_r^{\hat{u}^r}(x) = \hat{\alpha}_r^T x + \hat{\beta}_r$ に対して，パラメータ $\hat{u}^r := \binom{\hat{\alpha}_r}{\hat{\beta}_r}$ が以下で定義される不確実性集合 U_r に含まれているものとする．

$$U_r := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ \hat{\beta}_r \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} + D_r \delta_r \;\middle|\; \|\delta_r\|_\infty \le \rho_r \right\} \tag{4.4}$$

ただし，行列 $D_r \in \mathbb{R}^{(|R|+1)\times m_r}$ は全ての成分が 0 以上であるような与えられた行列であり，$\rho_r \ge 0$ は与えられた非負の定数である．また，α_r および β_r は (4.3) で定義されたベクトルおよびスカラーである．

仮定 1 が成り立つとき，最悪所要時間関数 $\tilde{f}_r$ は次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_r(x) &= \max \left\{ \hat{\alpha}_r^T x + \hat{\beta}_r \;\middle|\; \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ \hat{\beta}_r \end{pmatrix} \in U_r \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + (D_r\delta_r)^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \|\delta_r\|_\infty \le \rho_r \right\} \\
&= \alpha_r^T x + \beta_r + \max \left\{ \delta_r^T \left[D_r^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; \|\delta_r\|_\infty \le \rho_r \right\} \\
&= \alpha_r^T x + \beta_r + \rho_r \mathbf{1}_{m_r}^T D_r^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ただし，$\mathbf{1}_{m_r} := (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m_r}$ であり，最後の等式は命題 4.1(a) と，$D_r^T \binom{x}{1} \ge 0$ より従う．ここで，$\rho := (\rho_1, \rho_1, \ldots, \rho_{|R|})^T \in \mathbb{R}^{|R|}$ とし，$B_r := D_r \mathbf{1}_{m_r} \in \mathbb{R}^{|R|+1}$ および $B := (B_1, B_2, \ldots, B_{|R|}) \in \mathbb{R}^{(|R|+1)\times|R|}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x) := \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{|R|}(x) \end{pmatrix} &= \alpha^T x + \beta + \mathrm{diag}(\rho) B^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= M^T APMx + M^T Aq + \mathrm{diag}(\rho) B^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

を得る．したがって，3.1 節，3.2 節と同様の議論を用いると，ロバスト Wardrop 均衡問題は変分不等式問題 VIP$(\tilde{F}, X)$ と等価であり，以下の混合相補性問題として再定式化できる．

$$0 \le x \perp \tilde{F}(x) + N^T \lambda \ge 0\ , \quad Nx - d = 0$$

ただし，$\lambda \in \mathbb{R}^{|W|}$ はラグランジュ乗数である．ここで，上式に (4.5) を代入すると，次のような MCP を得る．

$$0 \le x \perp M^T APMx + M^T Aq + N^T \lambda + \mathrm{diag}(\rho) B^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \ge 0\ , \quad Nx - d = 0 \tag{4.6}$$

さらに，

$$
\begin{aligned}
\zeta &:= \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|R|+|W|} , \\
S &:= \begin{pmatrix} I_R & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|R|\times(|R|+|W|)} , \\
T &:= \begin{pmatrix} M^T APM + J & N^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|R|\times(|R|+|W|)} , \\
C &:= \begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|W|\times(|R|+|W|)} , \\
k &:= 0 , \\
r &:= M^T Aq + l \in \mathbb{R}^{|R|} , \\
\mathcal{K} &:= (\mathcal{K}^1)^{|R|}
\end{aligned}
$$

とすると，MCP(4.6) は MCP(3.12) の形で表すことができる．ただし，$I_{|R|} \in \mathbb{R}^{|R|\times|R|}$ は単位行列を表し，行列 $J \in \mathbb{R}^{|R|\times|R|}$ およびベクトル $l \in \mathbb{R}^{|R|}$ は以下で与えられるものとする．

$$
J := ((\mathrm{diag}(\rho)B^T)_1, (\mathrm{diag}(\rho)B^T)_2, \ldots, (\mathrm{diag}(\rho)B^T)_{|R|}),\ l := (\mathrm{diag}(\rho)B^T)_{|R|+1}
$$

4.2　各ルートの所要時間関数に不確実性集合を直接定義した場合（2 ノルム）

本節では，不確実性集合が 2 ノルムを用いて表されるものと仮定し，その仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を二次錐相補性問題として再定式化する．具体的には，次のような仮定をおく．

仮定 2 各ルートに対する所要時間 $f_r^{\hat{u}^r}(x) = \hat{\alpha}_r^T x + \hat{\beta}_r$ に対して，パラメータ $\hat{u}^r := \binom{\hat{\alpha}_r}{\hat{\beta}_r}$ が以下で定義される不確実性集合 U_r に含まれているものとする．

$$
U_r := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ \hat{\beta}_r \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} + D_r \delta_r \;\middle|\; \|\delta_r\| \le \rho_r \right\} \tag{4.7}
$$

ただし，$D_r \in \mathbb{R}^{(|R|+1)\times m_r}$ は与えられた適当な行列であり，$\rho_r \ge 0$ は与えられた非負の定数である．また，α_r および β_r は (4.3) で定義されたベクトルおよびスカラーである．

仮定 2 が成り立つとき，最悪所要時間関数 $\tilde{f}_r$ は以下のように書きかえることができる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_r(x) &= \max \left\{ \hat{\alpha}_r^T x + \hat{\beta}_r \;\middle|\; \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ \hat{\beta}_r \end{pmatrix} \in U_r \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + (D_r\delta_r)^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \|\delta_r\| \le \rho_r \right\} \\
&= \alpha_r^T x + \beta_r + \max \left\{ \delta_r^T \left[D_r^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; \|\delta_r\| \le \rho_r \right\} \\
&= \alpha_r^T x + \beta_r + \rho_r \left\| D_r^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号は命題 4.2(b) より成り立つ．さらに，

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(x) := \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{|R|}(x) \end{pmatrix} &= \alpha^T x + \beta + \begin{pmatrix} \rho_1 \left\| D_1^T \binom{x}{1} \right\| \\ \rho_2 \left\| D_2^T \binom{x}{1} \right\| \\ \vdots \\ \rho_{|R|} \left\| D_{|R|}^T \binom{x}{1} \right\| \end{pmatrix} \\
&= M^T APMx + M^T Aq + \mathrm{diag}(\rho) \begin{pmatrix} \left\| D_1^T \binom{x}{1} \right\| \\ \left\| D_2^T \binom{x}{1} \right\| \\ \vdots \\ \left\| D_{|R|}^T \binom{x}{1} \right\| \end{pmatrix} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

を用いると，前節と同様，ロバスト Wardrop 均衡問題は次のように等価に書き換えることができる．

$$
0 \leq x \perp \tilde{F}(x) + N^T \lambda \geq 0 \ , \quad Nx - d = 0. \qquad (4.10)
$$

ただし，$\lambda \in \mathbb{R}^{|W|}$ はラグランジュ乗数である．

次に (4.10) 式を二次錐相補性問題に変換することを考える．(4.9) 式と，補助変数 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{|R|})^T \in \mathbb{R}^{|R|}$ を用いると，(4.10) 式は次のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
0 \leq x \perp M^T APMx + M^T Aq + N^T \lambda + \mathrm{diag}(\rho) s \geq 0, \\
Nx - d = 0, \quad \left\| D_r^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = s_r, \quad (r = 1, 2, \ldots, |R|)
\end{aligned} \qquad (4.11)
$$

ここで命題 3.2 を用いると，$\|D_r^T \binom{x}{1}\| = s_r$ が成り立つことと，ある $\nu_r \in \mathbb{R}^{m_r}$ が存在して

$$
\mathcal{K}^{m_r+1} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ \nu_r \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} s_r \\ D_r^T \binom{x}{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{m_r+1}, \quad (r = 1, 2, \ldots, |R|) \qquad (4.12)
$$

が成り立つことは同値であることが分かる．ここで $m := \sum_{r=1}^{|R|} m_r$ とし，$\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_{|R|})^T \in \mathbb{R}^m$ とすると，二次錐相補性条件 (4.12) は

$$
\mathcal{K}^{m_r+1} \ni G_r \nu + g_r \perp H_r \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + h_r \in \mathcal{K}^{m_r+1}, \quad (r = 1, 2, \ldots, |R|) \qquad (4.13)
$$

と表すことができる．ここで，

$$
G_r := \begin{pmatrix} 0_{1 \times \overline{m}_{r-1}} & 0_{1 \times m_r} & 0_{1 \times \underline{m}_{r+1}} \\ 0_{m_r \times \overline{m}_{r-1}} & I_{m_r} & 0_{m_r \times \underline{m}_{r+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_r+1) \times m}
$$

（ただし，$\overline{m}_{r-1} := \sum_{r'=1}^{r-1} m_{r'}$，$\underline{m}_{r+1} := \sum_{r'=r+1}^{|R|} m_{r'}$ である．）

$$
g_r := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_r+1}
$$

$$
H_r := \begin{pmatrix} e_r^T & 0 \\ 0 & Q_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_r+1) \times 2|R|}
$$

$$
h_r := \begin{pmatrix} 0 \\ f_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_r+1}
$$

であり，$e_r \in \mathbb{R}^{|R|}$ は，第 r 行成分が 1 でその他の成分がすべて 0 となるベクトル，$I_{m_r} \in \mathbb{R}^{m_r \times m_r}$ は単位行列とする．行列 $Q_r \in \mathbb{R}^{m_r \times |R|}$ およびベクトル $f_r \in \mathbb{R}^{m_r}$ は以下のように与えられるものとする．

$$
Q_r := ((D_r^T)_1, (D_r^T)_2, \ldots, (D_r^T)_{|R|}), \ f_r := (D_r^T)_{|R|+1}
$$

さらに，

$$G := \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{|R|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+|R|)\times m}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{|R|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+|R|}$$

$$H := \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{|R|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+|R|)\times 2|R|}, \quad h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{|R|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+|R|}$$

とすると，(4.13) は一つの二次錐相補性条件として表すことができる．

$$\prod_{r=1}^{|R|} \mathcal{K}^{m_r+1} \ni G\nu + g \perp H\begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + h \in \prod_{r=1}^{|R|} \mathcal{K}^{m_r+1} \tag{4.14}$$

以上の議論をまとめると，(4.11) は次のような二次錐相補性問題として書き換えることができる．

$$\mathbb{R}_+^{|R|} \times \prod_{r=1}^{|R|} \mathcal{K}^{m_r+1} \ni \begin{pmatrix} x \\ G\nu + g \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} M^T APMx + M^T Aq + N^T\lambda + \mathrm{diag}(\rho)s \\ H\binom{s}{x} + h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{|R|} \times \prod_{r=1}^{|R|} \mathcal{K}^{m_r+1} \tag{4.15}$$
$$Nx - d = 0$$

さらに，

$$\zeta := \begin{pmatrix} s \\ x \\ \lambda \\ \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2|R|+|W|+m},$$

$$S := \begin{pmatrix} 0 & I_{|R|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2|R|+m)\times(2|R|+|W|+m)},$$

$$T := \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\rho) & M^T APM & N^T & 0 \\ & H & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2|R|+m)\times(2|R|+|W|+m)},$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|W|\times(2|R|+|W|+m)},$$

$$k := \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2|R|+m},$$

$$r := \begin{pmatrix} M^T Aq \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2|R|+m},$$

$$\mathcal{K} := (\mathcal{K}^1)^{|R|} \times \prod_{r=1}^{|R|} \mathcal{K}^{m_r+1}$$

とおくと，(4.15) は SOCCP(3.11) の形で表すことができる．

4.3 各道路の所要時間関数の係数に不確実性がある場合

本節では，各道路の所要時間関数に対して不確実性集合を組み込むことを考える．特に，不確実性集合が 2 ノルムで表されるものと仮定し，その仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を二次錐相補性問題として

再定式化する．各道路の所要時間関数には，a, p, q の三つのパラメータがあるが，本節では係数にあたる p のみに不確実性があるものと仮定する．

仮定 3 各道路 $i \in E$ における所要時間関数に対して，パラメータ $\hat{u}^r = \hat{p}^r := (\,\hat{p}_i\,)_{i \in E_r} \in \mathbb{R}^{|E_r|}$ が以下で定義される不確実性集合 U_r に含まれているものとする．

$$U_r := \{\,\hat{p}^r\,\} = \left\{\; p^r + \bar{D}^r \delta p^r \;\middle|\; \|\delta p^r\| \le \rho_r \;\right\} \tag{4.16}$$

ただし，$p^r := (\,p_i\,)_{i \in E_r} \in \mathbb{R}^{|E_r|}$ とする．また，$\bar{D}^r \in \mathbb{R}^{|E_r| \times l_r}$ は適当な行列であり，$\rho_r \ge 0$ は与えられた非負の定数である．

仮定 3 が成り立つとき，$A,\, \hat{P}$ は対角行列ゆえ，ルート r の所要時間関数 $f_r^{\hat{u}^r}$ は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
f_r^{\hat{u}^r}(x) &= (M^T A \hat{P} M)_r^T x + (M^T A q)_r \\
&= M_r^T A \hat{P} M x + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A \hat{P} M_r + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A \mathrm{diag}(M_r) \hat{p} + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A (L^r)^T \hat{p}^r + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A (L^r)^T (p^r + \bar{D}^r \delta p^r) + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A (L^r)^T p^r + (Mx)^T A (L^r)^T \bar{D}^r \delta p^r + M_r^T A q \\
&= (Mx)^T A \mathrm{diag}(M_r) p + [(\bar{D}^r)^T L^r A (Mx)]^T \delta p^r + M_r^T A q \\
&= M_r^T A P M x + [(\bar{D}^r)^T L^r A M x]^T \delta p^r + M_r^T A q
\end{aligned}$$

また，$L^r \in \mathbb{R}^{|E_r| \times |E|}$ は，$\mathrm{diag}(M_r)$ の $i \in E_r$ であるような第 i 行ベクトルのみを用いて構成された行列である[2]．

このとき，最悪所要時間関数 $\tilde{f}_r$ は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_r(x) &= \max\left\{ f_r^{\hat{u}^r}(x) \;\middle|\; \hat{u}^r \in U_r \right\} \\
&= \max\left\{ M_r^T A P M x + [(\bar{D}^r)^T L^r A M x]^T \delta p^r + M_r^T A q \;\middle|\; \|\delta p^r\| \le \rho_r \;\right\} \\
&= M_r^T A P M x + M_r^T A q + \max\left\{ [(\bar{D}^r)^T L^r A M x]^T \delta p^r \;\middle|\; \|\delta p^r\| \le \rho_r \;\right\} \\
&= M_r^T A P M x + M_r^T A q + \rho_r \|(\bar{D}^r)^T L^r A M x\| \\
&= M_r^T A P M x + M_r^T A q + \rho_r \left\| \begin{pmatrix} M^T A (L^r)^T \bar{D}^r \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

よって，これは (4.8) 式において

$$D_r := \begin{pmatrix} M^T A (L^r)^T \bar{D}^r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|R|+1) \times l_r} \tag{4.17}$$

としたケースに他ならないので，(4.17) 式を (4.7) 式の D_r に代入することにより，SOCCP(4.15) と等価に書き換えることができる．

[2] $i \notin E_r$ ならば第 i 行ベクトルは 0 ベクトルになることに注意する．

4.4　各道路の所要時間関数の係数と定数項に不確実性がある場合

本節では，4.3 節と同様に各道路の所要時間関数に不確実性集合 U_r を組み込み，その不確実性集合が 2 ノルムで表されるものと仮定する．また，その仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を二次錐相補性問題として再定式化する．なお，本節では所要時間関数 c_i の係数 p_i と定数項 q_i の両方に不確実性があると仮定する．すなわち，不確実性集合 U_r は次の仮定を満たすものとする．

仮定 4 各道路 $i \in E$ に対する所要時間関数に対して，パラメータ $\hat{u}^r := \binom{\hat{p}^r}{\hat{q}^r}$ が以下で定義される不確実性集合 U_r に含まれているものとする．

$$U_r := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{p}^r \\ \hat{q}^r \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} p^r \\ q^r \end{pmatrix} + \bar{D}^r \delta^r \;\middle|\; \|\delta^r\| \leq \rho_r \right\} \tag{4.18}$$

$\hat{p}^r, p^r$ と同様，$\hat{q}^r := (\,\hat{q}_i\,)_{i\in E_r}, q^r := (\,q_i\,)_{i \in E_r}$ とする．また，$\bar{D}^r \in \mathbb{R}^{2|E_r|\times l_r}$ は与えられた適当な行列であり，$\rho_r \geq 0$ は与えられた非負の定数である．

仮定 4 が成り立つとき，所要時間関数 $f_r^{\hat{u}^r}$ は次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
f_r^{\hat{u}^r}(x) &= (M^T A \hat{P} M)_r^T x + (M^T A \hat{q})_r \\
&= M_r^T A \hat{P} M x + M_r^T A \hat{q} \\
&= \begin{pmatrix} (M_r^T A \hat{P} M)^T \\ M_r^T A \hat{q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M^T A \mathrm{diag}(\hat{p}) M_r \\ M_r^T \mathrm{diag}(a) \hat{q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M^T A \mathrm{diag}(M_r) \hat{p} \\ a^T \mathrm{diag}(M_r) \hat{q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} M^T A & 0 \\ 0 & a^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(M_r) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(M_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \right\}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} M^T A & 0 \\ 0 & a^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L^r)^T & 0 \\ 0 & (L^r)^T \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} p^r \\ q^r \end{pmatrix} + \bar{D}^r \delta^r \right) \right\}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} M^T A & 0 \\ 0 & a^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L^r)^T & 0 \\ 0 & (L^r)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^r \\ q^r \end{pmatrix} \right\}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} M^T A (L^r)^T & 0 \\ 0 & a^T (L^r)^T \end{pmatrix} \bar{D}^r \delta^r \right\}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} M^T A \mathrm{diag}(M_r) & 0 \\ 0 & a^T \mathrm{diag}(M_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + (\delta^r)^T (\bar{D}^r)^T \begin{pmatrix} M^T A (L^r)^T & 0 \\ 0 & a^T (L^r)^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= M_r^T A P M x + M_r^T A q + (\delta^r)^T (\bar{D}^r)^T \begin{pmatrix} L^r A M & 0 \\ 0 & L^r a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また，$L^r \in \mathbb{R}^{|E_r|\times|E|}$ の定義は 4.3 節と同様である．

このとき，最悪所要時間関数 $\tilde{f}_r(x)$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_r(x) &:= \max\left\{ f_r^{\hat{u}^r}(x) \;\middle|\; \hat{u}^r \in U_r \right\} \\
&= \max\left\{ M_r^T APMx + M_r^T Aq + (\delta^r)^T (\bar{D}^r)^T \begin{pmatrix} L^r AM & 0 \\ 0 & L^r a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \|\delta^r\| \le \rho_r \right\} \\
&= M_r^T APMx + M_r^T Aq + \max\left\{ (\delta^r)^T \left[(\bar{D}^r)^T \begin{pmatrix} L^r AM & 0 \\ 0 & L^r a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; \|\delta^r\| \le \rho_r \right\} \\
&= M_r^T APMx + M_r^T Aq + \rho_r \left\| (\bar{D}^r)^T \begin{pmatrix} L^r AM & 0 \\ 0 & L^r a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}
$$

と書き換えることができるが，これは (4.8) において

$$
D_r := \begin{pmatrix} M^T A (L^r)^T & 0 \\ 0 & a^T (L^r)^T \end{pmatrix} \bar{D}^r \quad \in \mathbb{R}^{(|R|+1) \times l_r} \tag{4.19}
$$

としたケースに他ならない．よって，4.3 節と同様に (4.19) 式を (4.7) 式の D_r に代入することにより，SOCCP(4.15) と等価に書き換えることができる．

5 数値実験

本節では，具体的なネットワークモデルに対して，前節で議論した再定式化手法を用いてロバスト Wardrop 均衡解を計算する．このとき，4 節で再定式化された混合相補性問題および二次錐相補性問題は，[4] で提案されている平滑化法を元にしたアルゴリズムで解く．なお，本実験は，Intel(R) Core(TM)2 Duo 3.00GHz の CPU と，3GB のメモリを有する計算機を用いて行い，アルゴリズムは MATLAB 7 を用いて実装した．

具体的なネットワークモデルとして，図 1 で表されるような有向グラフで表されるものを考える．各頂点は交差点，出発地，目的地などを表し，各辺はそれらを繋ぐ道路を表すものとする．また，各道路の所要時間関数 c_i は (2.3) で定義したものを用いる．ここで，道路長ベクトルは $a = (4,5,6,8,4,4,4,5,3,3,4,4,2,6,4)^T \in \mathbb{R}^{15}$ とし，ベクトル $p, q \in \mathbb{R}^{15}$ はそれぞれ $p = (1,4,6,5,7,4,6,5,3,5,6,8,4,3,4)^T$，$q = (2,4,6,4,8,4,6,2,4,6,4,8,4,8,8)^T$ で与えられているとする．また，OD ペアの集合を

$$
W = \{(1 \to 4)\ ,\ (8 \to 4)\ ,\ (5 \to 7)\ ,\ (2 \to 9)\}
$$

とし ($|W| = 4$)，OD ペア 1 を $(1 \to 4)$，OD ペア 2 を $(8 \to 4)$，OD ペア 3 を $(5 \to 7)$，OD ペア 4 を $(2 \to 9)$ とする．また，各 OD ペアに対する交通需要を $d = (60,10,20,30)^T$ とし，それぞれの OD ペアに含まれるルートのルート番号および実際の順路を表 1 のように設定する ($|R| = 12$).

5.1 仮定 1 もしくは仮定 2 が成り立つ場合

本節では 4.1, 4.2 節で議論した，各ルートの所要時間関数に不確実性が直接組み込まれた場合のロバスト Wardrop 均衡問題に対して，数値実験を行う．また，不確実性集合の半径や用いるノルム（無限大ノルムと 2 ノルム）を変化させ，ロバスト Wardrop 均衡がどのように動いていくかを観察する．今回の実験では，(4.4) 式および (4.7) 式で用いる行列 $D_r \in \mathbb{R}^{(|R|+1) \times m_r}$ を単位行列（すなわち $m_r = |R|+1$）とし，不確実性を表すベクトル $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{|R|})^T \in \mathbb{R}^{|R|}$ の各要素はそれぞれのルートの長さ $(M^T a)_1, (M^T a)_2, \ldots, (M^T a)_{|R|}$ に比例するものとする．すなわち，適当な定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$
\rho = \gamma M^T a = \gamma (8,15,13,5,11,7,4,18,18,16,15,16)^T
$$

OD ペア	ルート名	順路
OD ペア 1	ルート 1	$(1 \to 3 \to 4)$
$(1 \to 4)$	ルート 2	$(1 \to 2 \to 3 \to 4)$
	ルート 3	$(1 \to 2 \to 4)$
OD ペア 2	ルート 4	$(8 \to 7 \to 4)$
$(8 \to 4)$	ルート 5	$(8 \to 7 \to 5 \to 4)$
OD ペア 3	ルート 6	$(5 \to 4 \to 7)$
$(5 \to 7)$	ルート 7	$(5 \to 7)$
OD ペア 4	ルート 8	$(2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 9)$
$(2 \to 9)$	ルート 9	$(2 \to 3 \to 4 \to 7 \to 9)$
	ルート 10	$(2 \to 4 \to 6 \to 9)$
	ルート 11	$(2 \to 4 \to 7 \to 9)$
	ルート 12	$(2 \to 3 \to 6 \to 9)$

表 1: OD ペア，ルート，道順の関係

と表せるものとする．ここで，γ の値を動かしたときのロバスト Wardrop 均衡の変化をみる．$\gamma = 0$ は不確実性がない場合，すなわち，ただの Wardrop 均衡を意味する．表 2 は 4.1 節の仮定 1 が成り立つ場合（不確実性集合を無限大ノルムで表した場合）の実験結果，表 3 は 4.2 節の仮定 2 が成り立つ場合（不確実性集合を 2 ノルムで表した場合）の実験結果を示している．

表 2 と表 3 の示す結果より，不確実性集合が大きいときは，少しでもその値の小さいルートを選ぶようにドライバーがルートを選択する様子が伺える．例えば，$\gamma = 20$ のように極端に不確実性集合を大きくした場合，与えられた交通ネットワークの情報に依らず，ほぼすべてのドライバーが最も不確実性の小さいルートを選択していることが見てとれる．また，不確実性集合を小さくしていくと，不確実性がないときのいわゆる Wardrop 均衡へ近づいていくことを確かめることができる．また，不確実性集合を無限大ノルムで表した場合の方が，2 ノルムで表した場合よりも γ の大きさの影響を受けやすいことが二つの表から観察できる．これは γ の値が同じならば無限大ノルムを用いた方が，2 ノルムを用いるよりも不確実性集合が大きくなることが原因だと考えられる[3]．

5.2 仮定 4 が成り立つ場合

本節では，4.4 節の仮定 4 （各道路の所要時間関数の係数と定数項に対して 2 ノルムで表される不確実性集合が与えられる）が成り立つものとし，その仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を二次錐相補性問題へと帰着させて解くことを考える．さらに，不確実性集合の大きさを変化させることにより，ロバスト Wardrop 均衡がどのような振る舞いをするかについて観察する．

本実験では，テスト問題を次のように生成する．(4.18) 式における不確実性の大きさを表すパラメータ ρ_r を，すべてのルート $r \in R$ に対して $\rho_r := \gamma$ とし，γ の値を 0 から 20 まで変化させる．さらに，道路 $i = 4, 8, 15$ における $\hat{p}_i, \hat{q}_i$ の不確実性の大きさが他の道路のそれの 2 倍になるように行列 $\bar{D}^r$ を調整する．具体的には，$\bar{D}^3 := \mathrm{diag}(1,2,1,2) \in \mathbb{R}^{4\times4}, \bar{D}^5 := \mathrm{diag}(1,2,1,1,2,1) \in \mathbb{R}^{6\times6}, \bar{D}^7 := \mathrm{diag}(2,2) \in \mathbb{R}^{2\times2}, \bar{D}^{10} := \mathrm{diag}(2,1,1,2,1,1) \in \mathbb{R}^{6\times6}, \bar{D}^{11} := \mathrm{diag}(2,1,1,2,1,1) \in \mathbb{R}^{6\times6}$ とし，$r = 1,2,4,6,8,9,12$ に対しては $\bar{D}^r$ を単位行列とする．実際，道路 $i = 4, 8, 15$ を用いるルートは $r = 3,5,7,10,11$ のみであり，$\bar{D}^r$ の対角成分が 2 となっていることと，それが反映される道路が $i = 4, 8, 15$ であることが対応している．

得られた結果を表 4 に示す．表が示すように，道路 $i = 4, 8, 15$ を含むルート $(r = 3,5,7,10,11)$ の交通量が，γ の値を大きくするに従って少なくなっていくことがわかる．実生活でも，あるルートに不確定要素

[3]実際，$\{\delta \mid \|\delta\|_\infty \leq \rho\} \supset \{\delta \mid \|\delta\| \leq \rho\}$ であることが容易に確かめられる．

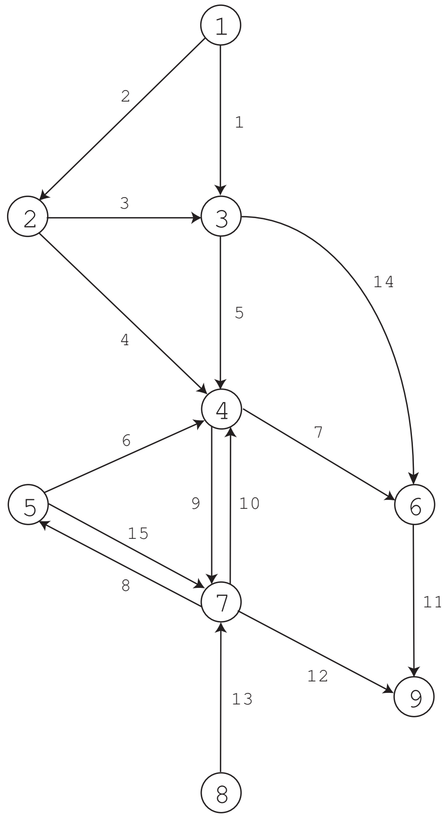

図 1: 本実験で用いるネットワーク

の大きい道路（たとえば渋滞や凍結等の起こりやすい道路）が含まれていれば，その影響が大きければ大きいほど，最悪のケースを考えてより安全な他のルートを採用するのが自然な考え方である．実際，本実験で得られた結果はそのような直感に合致したものであると言える．また，5.1 節の実験結果と同様，γ の値を 0 に近づけていくと，不確実性がないときの Wardrop 均衡へ近づいていくことも見てとれる．

6　結論

本報告書では，所要時間関数に不確実性が含まれるような交通モデルを考え，そのようなモデルに対して，ロバスト Wardrop 均衡という概念を定義した．さらに，各ルートに対する所要時間関数に，直接無限大ノルムや 2 ノルムで表される不確実性を考え，そのような不確実性集合をもつロバスト Wardrop 均衡問題を混合相補性問題や二次錐相補性問題といった既存のアルゴリズムで解くことのできるクラスの問題に再定式化した．また，各道路に不確実性を考えた場合も，二次錐相補性問題に再定式化することができることを示した．さらに，具体的な交通モデルに対してロバスト Wardrop 均衡問題を解き，不確実性の定め方の違いによる均衡解の変化の様子を調べた．

今後の課題として，次のようなことが挙げられる．本報告書では，各道路に対する所要時間関数が線形であるという仮定の下でロバスト Wardrop 均衡問題を相補性問題へ再定式化した．しかし，現実では交通量の増加に対する所要時間の増え方は非線形であることが一般的である．したがって，そのような所要時間関数をもつ交通モデルに対して，ロバスト Wardrop 均衡問題を非線形相補性問題や二次錐相補性問題といった既存のアルゴリズムで解くことのできるクラスの問題へと再定式化することが，大変重要になってくると思われる．

謝辞

まず，本報告書の作成にあたり，熱心な御指導と細部に至るまで様々な御指摘を賜った林俊介助教に深く感謝の意を表します．また，日頃からお世話になっている福嶋雅夫教授，山下信雄准教授，ならびに数々の助言を下さった福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, Mathematical Programming, 107 (2006), pp. 231–273.

[2] M. J. Beckmann, C. B. McGuire and C. B. Winsten, Studies in the Economics of Transportation, 1956, Yale University Press, New Haven, CT.

[3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust convex optimization, Mathematics of Operations Research, 23 (1998), pp. 769–805.

[4] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust solutions of uncertain linear programs, Operations Research Letters, 25 (1999), pp. 1–13.

[5] F. Facchinei and J.-S. Pang, Finite-Dimensional Variational Inequarities and Complementarity Problems, Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[7] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, SIAM Journal on Optimization, 175 (2005), pp. 335–353.

[8] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6 (2005), pp. 283–296.

[9] A. Haurie, and P. Marcotte, On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria, Networks, 15 (1985), pp. 295-308.

[10] J. Nash, Equilibrium points in N-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 36 (1950), pp. 48–49.

[11] J. Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics, 54 (1951), pp. 286–295.

[12] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushima, Robust Nash equilibria in N-person non-cooperative games: Uniqueness and reformulation, Pacific Journal of Optimization, 5 (2009), pp. 237–259.

[13] 岡田章, ゲーム理論, 有斐閣, 1996.

[14] F. Ordóñez and N. E. Stier-Moses, Robust Wardrop equilibrium, Columbia University Working Paper DRO-2006-04, 2006.

[15] J. G. Wardrop, Some theoretical aspect of road traffic research, Proceeding of the Institution of Civil Engineers, Part2, Vol.1, 325–378, 1952.

OD ペア	ルート	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.01$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 1$	$\gamma = 3$	$\gamma = 5$	$\gamma = 20$
OD ペア 1	ルート 1	43.87	43.95	44.67	51.87	60.00	60.00	60.00
	ルート 2	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 3	16.13	16.05	15.33	8.13	0	0	0
OD ペア 2	ルート 4	8.95	9.07	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
	ルート 5	1.05	0.93	0	0	0	0	0
OD ペア 3	ルート 6	5.22	5.17	4.68	0	0	0	0
	ルート 7	14.78	14.83	15.32	20.00	20.00	20.00	20.00
OD ペア 4	ルート 8	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 9	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 10	0.23	0.24	0.28	0.74	0.57	0	0
	ルート 11	10.38	10.40	10.66	13.15	16.81	18.67	30.00
	ルート 12	19.39	19.36	19.06	16.11	12.62	11.32	0

表 2: 仮定 1 が成り立つときのロバスト Wardrop 均衡

OD ペア	ルート	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.01$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 1$	$\gamma = 3$	$\gamma = 5$	$\gamma = 20$
OD ペア 1	ルート 1	43.87	43.91	44.24	47.71	56.58	60.00	60.00
	ルート 2	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 3	16.13	16.09	15.76	12.28	3.42	0	0
OD ペア 2	ルート 4	8.95	9.01	9.48	10.00	10.00	10.00	10.00
	ルート 5	1.05	0.99	0.52	0	0	0	0
OD ペア 3	ルート 6	5.22	5.19	4.99	1.06	0	0	0
	ルート 7	14.78	14.81	15.01	18.94	20.00	20.00	20.00
OD ペア 4	ルート 8	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 9	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 10	0.23	0.23	0.26	0.34	1.29	0.82	0
	ルート 11	10.38	10.39	10.50	11.88	14.46	16.50	23.49
	ルート 12	19.39	19.38	19.24	17.78	14.25	12.68	6.51

表 3: 仮定 2 が成り立つときのロバスト Wardrop 均衡

OD ペア	ルート	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.01$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 1$	$\gamma = 3$	$\gamma = 5$	$\gamma = 20$
OD ペア 1	ルート 1	43.87	43.89	43.99	44.93	45.99	46.45	46.92
	ルート 2	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 3	16.13	16.11	16.01	15.07	14.01	13.55	13.08
OD ペア 2	ルート 4	8.95	8.96	9.01	9.46	10.00	10.00	10.00
	ルート 5	1.05	1.04	0.99	0.54	0	0	0
OD ペア 3	ルート 6	5.22	5.24	5.41	6.81	8.50	9.29	10.97
	ルート 7	14.78	14.76	14.59	13.19	11.50	10.71	9.03
OD ペア 4	ルート 8	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 9	0	0	0	0	0	0	0
	ルート 10	0.23	0.22	0.12	0	0	0	0
	ルート 11	10.38	10.37	10.31	9.41	8.01	7.12	4.63
	ルート 12	19.39	19.41	19.57	20.59	21.99	22.88	25.37

表 4: 仮定 4 が成り立つときのロバスト Wardrop 均衡