特別研究報告書

固定費付き取引コスト関数をもつ
最適資産配分問題の解法

指導教員　　福嶋雅夫　教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成１９年４月入学
平成２３年３月卒業

河野　将希

平成２３年１月３１日提出

固定費付き取引コスト関数をもつ
最適資産配分問題の解法

河野　将希

摘要

平均・分散モデルに基づいた資産配分問題はさまざまな定式化が研究されている．現実には資産の取引を行う際に手数料などのコストがかかることが往々にしてあるため, 取引コストを考慮した問題も数多く提案されている．その一つとして, 固定費付き取引コストを予算制約に含めた問題がある．固定費付き取引コスト関数は原点で不連続であり, それ以外の区間では線形な関数で与えられる．この問題の実行可能領域は凸集合にならないため, 一般にこのような問題を厳密に解くのは困難である．ゆえに, 短時間で良い近似解を得ることが目的となる．

本報告書ではまず固定費付き取引コストを予算制約に含めた資産配分問題を定式化し, 問題の特徴を有効に利用した新しい解法として凸制限反復法とシグモイド近似法の二つを提案する．また, 提案手法において用いられる凸緩和問題を構築する方法について詳しく述べる．さらに, 株式資産の実際のデータを用いて数値実験を行い, 提案した手法と従来手法によって得られる解や計算時間を比較することにより, 提案手法の有効性を検証する．

目次

1　序論

本報告書では Markowitz によって提案された平均・分散モデル [3] に基づいた単期の最適資産配分問題を扱う．Markowitz は, 投資による収益を投資時点で確実に知ることが不可能な状況に対して投資家がどのように振舞うかを数理モデルとして定式化した．当時の投資の方法は利益や損失だけにしか注目せず, リスクという概念に関心がなかった．しかし彼は, リターンに加えてリスクを考慮した方法を提唱したのである．この理論はリターンの指標として資産配分の期待収益率, リスクの指標として収益率の分散を用いることから平均・分散モデルと呼ばれる．平均・分散モデルは, それまで投資のリスクという一見して捉えどころのない概念を分散という明確な概念によって定量的に把握できるという点で画期的なものであり, その後に続く投資理論の出発点を与えることとなった．

本報告書では固定費付き取引コストを取引の収支に含め, 資産配分の分散や予算などの制約の下でのリターンの期待値の最大化を図る資産配分問題を考える．固定費付き取引コスト関数は原点で不連続となり, それ以外の区間では線形な関数で表わされる．このような問題は凸計画問題ではないので, 大域的最適解を求めるのは困難である．そこである程度短時間で良い近似解を得ることが求められる．この目的を達成するものとして, 本報告書では凸制限反復法とシグモイド近似法という二つの解法を提案する．さらに数学的な議論や実際のデータに基づいた数値実験により, 提案した手法の有効性や性質などを検証, 考察する．

本報告書の構成を以下に記す．まず 2 節では本報告書で扱う資産配分問題を定義し, とくにその問題の制約条件を説明する．3 節では, 解法を説明する準備として固定費付き取引コスト関数によって非凸となるこの資産配分問題の実行可能領域を, 凸集合に緩和した問題 (凸緩和問題の最適値はもとの問題の最適値の上界値を与える) について詳細に言及する．そして本報告書で提案する解法を示し, 解法によって求まる解の実行可能性について議論する．4 節の数値実験で, 今回提案する二つの解法の最適値や計算時間などを従来手法である凸緩和反復法 [2] と比較し, 出力結果から分かる性質について考察する．最後に 5 節で結論を述べる．

2　資産配分問題

n 個の資産からなる投資の資産配分を考える, 資産配分は資産の取引 (この取引にかかる時間は十分小さいので無視できるとする) によって調節され, 取引後ある一定期間 (以下これをピリオドと呼ぶ) この資産配分は保有される．つまり, ピリオドの初めで取引を行った後, ピリオドの途中で取引をしない．投資者の目的は資産配分の制約を満たしつつピリオド後の資産価格 (以下これをリターンと呼ぶ) の期待値を最大にすることである．一般に制約としてはリターンの分散などのリスクの許容範囲や, 各資産の保有量の上限, 下限などがある．

現在保有する n 個の資産の量を $w = (w_1, ..., w_n)^\top$ で表わす. 資産量の総和は, 全ての要素が 1 であるベクトル $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ を用いて $\mathbf{1}^\top w$ で表わされる. ここでいう資産の量とは割合を表すものではなく, 単位通貨における金額的絶対量のことである. 例えば $w \in \mathbb{R}^3$ で単位通貨として日本円を採用し, w_1 は現金 (日本円), w_2 は現金 (US ドル), w_3 はある会社の株式とすると, $w = (50, 100, 200)$ は日本円を 50 円, US ドルを 100 円分, 株式を 200 円分保有していることを意味する. 次に, 取引された資産量を $x = (x_1, ..., x_n)^\top$ で表わす. 資産 i を購入したのであれば $x_i > 0$, 売却したのであれば $x_i < 0$ である. 取引後の資産量は $w + x$ となり, これはピリオドの終わりまで保管される.

2.1 取引コスト関数と予算制約

取引量 x にまつわる全ての取引コストの総和を $\phi(x)$ とすると, 予算制約として以下の式を得る.

$$\mathbf{1}^\top x + \phi(x) \leq 0 \tag{2.1}$$

いま, 取引コスト関数 $\phi(x)$ は分離可能, つまり

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i)$$

とする. 一般に取引コスト関数は凸にはならず, 実際には凹関数である (取引量が多いほど単位取引量あたりのコストが小さくなる) ことが多い. 本報告書では取引コスト関数を定数 $\beta_i^+ \geq 0$, $\beta_i^- \geq 0$, $1 > \alpha_i^+ \geq 0$, $1 > \alpha_i^- \geq 0$ を用いて

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ \beta_i^+ + \alpha_i^+ x_i & x_i > 0 \\ \beta_i^- - \alpha_i^- x_i & x_i < 0 \end{cases}$$

で与えられると仮定する. とくに, 取引がなければコストはかからないことに注意する. この関数は下半連続であるので, 式 (2.1) を満たすベクトル x の集合は閉集合となる.

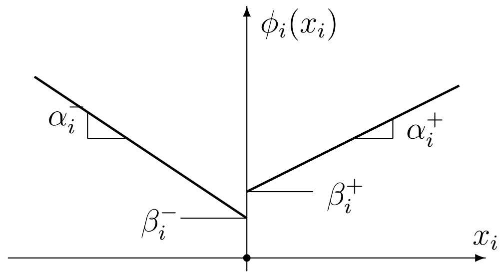

図 1: 固定費付取引コスト関数 $\phi_i(x_i)$

本報告書では, 簡単のため $\beta_i^+ = \beta_i^-$, $\alpha_i^+ = \alpha_i^-$ とする．つまり, 関数 $\phi_i(x_i)$ は定数 $\beta_i \geq 0$, $1 > \alpha_i \geq 0$ を用いて

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ \beta_i + \alpha_i |x_i| & x_i \neq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

と表されると仮定する．さらに添字集合 I, I_α^0, I_β^0 を

$$I := \{1, ..., n\} \qquad I_\alpha^0 := \{i | \alpha_i = 0\} \qquad I_\beta^0 := \{i | \beta_i = 0\}$$

で定義する．以後の議論を進める上で, この仮定によって一般性が失われることはない．

2.2 資産保有量の上限に関する制約

資産保有量の上限に関する制約は資産 i の保有可能量の最大値を p_i とすれば, 以下の線形不等式で表される．

$$w_i + x_i \leq p_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

2.3 空売り制約

空売りに対する制約もまた線形不等式であり, 資産 i に許された空売りの最大量を $s_i \geq 0$ とすると,

$$w_i + x_i \geq -s_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

で表される．もし空売りが許されていないならば, $s_i = 0$ である．

2.4 分散に関する制約

資産 i のリターンは確率変数であり, これを a_i で表す．$\mathbf{E}$ を期待値を表わす演算子とする．いま, $a = (a_1, ..., a_n)^\top$ の結合分布の一次, 二次のモーメント

$$\mathbf{E}a = \bar{a} \qquad \mathbf{E}(a - \bar{a})(a - \bar{a})^\top = \Sigma$$

は既知であり $\bar{a} > 0$ と仮定する．リスクのない資産が存在する可能性もあり, そのような資産 i については $\bar{a}_i$ は確実なリターンであり, Σ の i 行と i 列の要素は 0 となる．

ピリオド後の資産量は確率変数 $W = a^\top(w + x)$ であり, その期待値と分散は以下の式で与えられる．

$$\mathbf{E}W = \bar{a}^\top(w + x) \qquad \mathbf{E}(W - \mathbf{E}W)^2 = (w + x)^\top \Sigma (w + x)$$

ピリオド後の資産量 W の標準偏差は以下の凸二次不等式によって $\sigma_{\max}(>0)$ 以下に制限される.

$$(w+x)^\top \Sigma (w+x) \le \sigma_{\max}^2 \tag{2.3}$$

行列 Σ は半正定値であるから, これは凸な制約である.

2.5 資産配分問題

予算制約 (2.1) を除くすべての制約条件を満たす資産配分の集合を

$$\mathcal{S} = \{y \mid -s \le y \le p, y^\top \Sigma y \le \sigma_{\max}^2\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

と表す. $\mathcal{S}$ は凸集合であることに注意する. そのとき, 資産配分問題は次のように定式化される.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top (w+x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top x + \phi(x) \le 0 \\ & w + x \in \mathcal{S} \end{array} \tag{2.4}$$

ここで,

$\bar{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$	ピリオド後の各資産のリターンの期待値のベクトル
$w \in \mathbb{R}^n$	現在保有する各資産量のベクトル
$x \in \mathbb{R}^n$	取引された各資産量のベクトル
$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	取引コスト関数

であり, 資産 n は問題の資産の単位量としている通貨の "現金資産" とする. ゆえに資産 n の分散は 0, $\bar{a}_n = 1$ である. さらに, 資産 n は取引コストがかからないと仮定する. つまり, $\alpha_n = \beta_n = 0$ である.

問題 (2.4) の解は疎 (つまり解のベクトルにおける非零要素が少ない) になる傾向があることが知られている. 実際, 多くの種類の資産を取引すればそれだけ多くの固定費がかかり非効率的であるので, 少数の資産の取引を行うのがよいというのは合理的と考えられる.

3 解法

この節では資産配分問題 (2.4) の解法を二つ提案する. まず準備として, 3.1 節で問題 (2.4) の実行可能領域を凸集合に緩和した問題 (以下凸緩和問題と呼ぶ) について詳細に説明する. この凸緩和問題は提案する解法において用いられる. 3.2 節で提案手法の一つである凸制限反復法について述べ, 3.3 節でもう一つの解法であるシグモイド近似法について記す.

3.1 凸緩和問題

この節では, 資産配分問題 (2.4) の実行可能領域を凸集合で緩和した問題を定式化することを考える. そのためには式 (2.2) の関数 $\phi_i(x_i)$ を $w + x \in \mathcal{S}$ において凸関数に近似する必要がある. まず, 3.1.1 節で問題 (2.4) における各 x_i の上界値, 下界値を求める方法を述べる. そしてその上界値, 下界値を用いて, 3.1.2 節で $\phi_i(x_i)$ を凸緩和した関数 $\phi_i^{\text{c.e.}}(x_i)$ を定義し, この $\phi_i^{\text{c.e.}}(x_i)$ を用いて問題 (2.4) の凸緩和問題を定式化する.

3.1.1 x_i の存在範囲

問題 (2.4) における各 x_i の上界値, 下界値は問題 (2.4) の制約 $w + x \in \mathcal{S}$ から求められる. 添字集合 I_σ^0 を

$$I_\sigma^0 := \{i | (\Sigma)_{ii} = 0\}$$

で定義する. ただし $(\cdot)_{ii}$ は行列の (i, i) 成分を表わす. ここでは, 一般性を失うことなく $I_\sigma^0 = \{l+1, ..., n\}, I \setminus I_\sigma^0 = \{1, ..., l\} (l \in I)$ とする. $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ を

$$(\tilde{\Sigma})_{ij} = (\Sigma)_{ij} \qquad (1 \leq i, j \leq l)$$

で定義する. これから,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. いま, 逆行列 $\tilde{\Sigma}^{-1}$ が存在すると仮定し, Σ のペンローズの擬似逆行列 $\Sigma^\dagger$ を

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で定義する. 各 i に対して, 分散に関する制約式 (2.3) を用いて定義される問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_i \\ \text{subject to} & g(x) = (w+x)^\top \Sigma (w+x) - \sigma_{\max}^2 \leq 0 \end{array} \tag{3.1}$$

を考える. これは

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -x_i \\ \text{subject to} & g(x) = (w+x)^\top \Sigma (w+x) - \sigma_{\max}^2 \leq 0 \end{array} \tag{3.2}$$

と書きなおすことができる. 問題 (3.2) は凸計画問題であり, $\sigma_{\max}^2 > 0$ を仮定しているので $x = -w$ とすれば $g(-w) = -\sigma_{\max}^2 < 0$. よって Slater 制約想定を満たす. ゆえに, 問題 (3.1) を解き最適解 x^* を求めることと KKT 条件を満たす点 x^* を求めることは同値である [1, pp.241-249]. 問題 (3.1) において $i \in I_\sigma^0$ であるとき, この問題は有界でない. よってこのとき最適解 x^* の第 i 成分 x_i^* は $+\infty$ となる. $i \notin I_\sigma^0$ の

場合は, e_i を第 i 成分が 1 の単位ベクトル, $\lambda \in \mathbb{R}$ をラグランジュ乗数として KKT 条件を記すと,

$$\begin{cases} -e_i + 2\lambda\Sigma(w + x^*) = 0 & (3.3a) \\ \lambda g(x^*) = 0 & (3.3b) \\ \lambda \geq 0,\ g(x^*) \leq 0 & (3.3c) \end{cases}$$

となる. 式 (3.3a) から $\lambda \neq 0$ であるので, これと式 (3.3b) から

$$g(x^*) = (w + x^*)^\top \Sigma(w + x^*) - \sigma_{\max}^2 = 0$$

となる. この式に

$$\Sigma(w + x^*) = \frac{1}{2\lambda} e_i \tag{3.4}$$

を代入すると

$$g(x^*) = (w + x^*)^\top \left(\frac{1}{2\lambda} e_i\right) - \sigma_{\max}^2 = \frac{1}{2\lambda}(w_i + x_i^*) - \sigma_{\max}^2 = 0$$

となるので,

$$\lambda = \frac{w_i + x_i^*}{2\sigma_{\max}^2} \tag{3.5}$$

となる. $\lambda > 0$ であるので, $w_i + x_i^* > 0$ である. 式 (3.5) を式 (3.4) に代入すると,

$$\Sigma(w + x^*) = \frac{\sigma_{\max}^2}{w_i + x_i^*} e_i$$

となり, この両辺に左から $\Sigma^\dagger$ を乗じると,

$$\begin{bmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (w + x^*) = \frac{\sigma_{\max}^2}{w_i + x_i^*} \Sigma^\dagger e_i = \frac{\sigma_{\max}^2}{w_i + x_i^*} (\Sigma^\dagger)_{\bullet i}$$

となる. ただし, E_l は $l \times l$ 単位行列, $(\cdot)_{\bullet i}$ は行列の第 i 列ベクトルを表す. とくに

$$w_i + x_i^* = \frac{\sigma_{\max}^2}{w_i + x_i^*} (\Sigma^\dagger)_{ii} = \frac{\sigma_{\max}^2}{w_i + x_i^*} (\tilde{\Sigma}^{-1})_{ii}$$

であるので,

$$(w_i + x_i^*)^2 = \sigma_{\max}^2 (\tilde{\Sigma}^{-1})_{ii}$$

であり, さらに $w_i + x_i^* > 0$ より

$$w_i + x_i^* = \sigma_{\max} \sqrt{(\tilde{\Sigma}^{-1})_{ii}}$$

$$x_i^* = \sigma_{\max} \sqrt{(\Sigma^\dagger)_{ii}} - w_i$$

となる.

以上から, すべての $i \in I$ に対して x_i^* が定まった. したがって, 集合 $\mathcal{S}-w$ に含まれるベクトル x の第 i 成分 x_i の上界値 u_i を

$$u_i := \min\{x_i^*, p_i\}$$

で与える.

同様にして, 問題 (3.1) において目的関数を最小化する問題の最適解が

$$x_i^* = \begin{cases} -\infty & (i \in I_\sigma^0) \\ -\sigma_{\max}\sqrt{(\Sigma^\dagger)_{ii}} - w_i & (i \in I \setminus I_\sigma^0) \end{cases}$$

となることから, 集合 $\mathcal{S}-w$ に含まれるベクトル x の第 i 成分 x_i の下界値 $-l_i$ を

$$-l_i := \max\{x_i^*, -s_i\}$$

で与える. $u_i, -l_i$ はそれぞれ集合 $\mathcal{S}-w$ に含まれるベクトル x の第 i 成分 x_i のあくまでも上界値, 下界値であり, 必ずしも上限, 下限になるとは限らないことに注意する.

各 i についてこの操作を行い, 集合

$$\boldsymbol{T} := \{x \in \mathbb{R}^n | -l_i \le x_i \le u_i (i \in I)\}$$

を定義すると,

$$\mathcal{S} - w \subseteq \boldsymbol{T} \tag{3.6}$$

となる.

3.1.2 問題の凸緩和

定義 3.1. 区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ に対して, $\tilde{I} := I \times (-\infty, \infty)$ とする. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathrm{co}\,(\mathrm{epi}\, f \cap \tilde{I}) = \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{c.e.}} \cap \tilde{I}$$

を満たす関数 $f^{\mathrm{c.e.}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, 区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ における f の凸包関数と呼ぶ. ただし, 任意の集合 S について $\mathrm{co}\, S$ は S の凸包, $\mathrm{epi}\, f$ は関数 f のエピグラフを表わす.

簡単のため, 3.1.1 節で求めた l_i, u_i は $-l_i < 0 < u_i$ と仮定する.

$$\beta_i^u := \begin{cases} \beta_i/u_i & (u_i < +\infty) \\ 0 & (u_i = +\infty) \end{cases} \qquad \beta_i^l := \begin{cases} \beta_i/l_i & (-\infty < l_i) \\ 0 & (l_i = -\infty) \end{cases}$$

と定義すると, 式 (2.2) で定義される関数 $\phi_i(x_i)$ の区間 $[-l_i, u_i]$ における凸包関数は

$$\phi_i^{\mathrm{c.e.}}(x_i) = \begin{cases} (\beta_i^u + \alpha_i)x_i & x_i \ge 0 \\ -(\beta_i^l + \alpha_i)x_i & x_i < 0 \end{cases}$$

と表わされる.

資産配分問題 (2.4) において ϕ_i を $\phi_i^{\mathrm{c.e}}$ で置き換えた問題は次のように表わされる.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top(w+x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\mathrm{c.e.}}(x_i) \leq 0 \\ & w + x \in \mathcal{S} \end{array} \tag{3.7}$$

また, 問題 (2.4), 問題 (3.7) の実行可能領域はそれぞれ

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}} & = & \{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \leq 0\} \cap (\mathcal{S} - w) \\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{cr}} & = & \{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\mathrm{c.e.}}(x_i) \leq 0\} \cap (\mathcal{S} - w) \end{array}$$

と表され,

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \leq 0\} \cap \boldsymbol{T} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\mathrm{c.e.}}(x_i) \leq 0\} \cap \boldsymbol{T}$$

と式 (3.6) から

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{o}} \subseteq \boldsymbol{S}_{\mathrm{cr}}$$

となる. つまり, 問題 (3.7) の実行可能領域は問題 (2.4) の実行可能領域を含んでいる. さらに $\boldsymbol{S}_{\mathrm{cr}}$ は凸集合であるので, 問題 (3.7) は元の問題 (2.4) の実行可能領域を凸緩和したものとみなすことができる. よって以後, 問題 (3.7) を問題 (2.4) の凸緩和問題と呼ぶこととする. 凸緩和問題 (3.7) の最適値 W_{cr} は元の問題 (2.4) の最適値 W_{o} の上界値を与える. また, 凸緩和問題 (3.7) は凸計画問題であるので, (存在するならば) 最適解が一意に定まる [4]. よって容易に解くことが可能である.

3.2 凸制限反復法

各 i に対して, 関数 $\phi_i^{\mathrm{b}}(x_i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\phi_i^{\mathrm{b}}(x_i) := \beta_i + \alpha_i |x_i| \qquad (i \in I)$$

を定義する. これは, 取引の有無に関わらず固定費が β_i がかかるとみなしたときの取引コスト関数である. $x_i \neq 0$ については $\phi_i^{\mathrm{b}}(x_i) = \phi_i(x_i)$ である. 取引を行わない資産をあらかじめ決め, そのような資産の集合を I_0(以後, 非取引資産集合と呼ぶ) とする. さらに, $i \in I_0$ なる資産 i を取引対象から除外し, 残りの資産の集合 $I \setminus I_0$ のみを取引対象とした問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top(w+x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top x + \sum_{i \notin I_0} \phi_i^{\mathrm{b}}(x_i) \leq 0 \\ & w + x \in \mathcal{S} \\ & x_i = 0 \qquad (i \in I_0) \end{array} \tag{3.8}$$

を考える．この問題は凸計画問題であり, 問題 (3.8) の実行可能領域を $\boldsymbol{S}_{\mathrm{cb}}$ とすると

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{cb}} \subseteq \boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}$$

となる．ゆえに, 目的関数は同じであるので問題 (3.8) の最適値を W_{cb} とすると

$$W_{\mathrm{cb}} \leq W_{\mathrm{o}} \tag{3.9}$$

が成立する．よって以後, 問題 (3.8) を凸制限問題と呼ぶ．

資産配分問題 (2.4) の大域的最適解を x^* とする．いま, あらかじめ $x_i^* = 0$ である要素 i の集合 I_0^* がわかっていると仮定し, これを I_0 としたときの凸制限問題 (3.8) を考える．x^* は

$$\begin{array}{l} \mathbf{1}^\top x + \sum_{i \notin I_0} \phi_i^{\mathrm{b}}(x_i^*) = \mathbf{1}^\top x + \sum_{i \notin I_0} \phi_i(x_i^*) \leq 0 \\ w + x^* \in \mathcal{S} \\ x_i^* = 0 \qquad (i \in I_0) \end{array}$$

を満たすので, 凸制限問題 (3.8) の実行可能解となる．よって

$$W_{\mathrm{cb}} \geq \bar{a}^\top (w + x^*) = W_{\mathrm{o}}$$

が成立する．これと式 (3.9) から $W_{\mathrm{cb}} = W_{\mathrm{o}}$ となる．つまり, 最適な非取引資産の集合 I_0^* があらかじめわかっているならば, そのような $I_0 := I_0^*$ について凸制限問題 (3.8) を解くことによって問題 (2.4) の大域的最適解が求められる．もちろん実際には最適な非取引資産の集合 I_0^* をあらかじめ知ることはできないので, なんらかの方法で推定することを考える．

凸緩和問題 (3.7) の取引コスト制約は元の問題 (2.4) の取引コスト制約を緩和したものである．凸緩和問題 (3.7) の最適解 $\hat{x}$ において, 取引コスト制約を緩和しているにも関わらずある成分が $|\hat{x}_i| \leq \delta$ (δ はある十分小さい正の数) を満たすとする．このとき, 資産 i は緩和していない元の問題 (2.4) において取引されることはないと推測できる．ひとまずこのような資産 i の集合を, 暫定的に, 最適な非取引資産の集合 I_0 とする．ただし, 資産 n は $\alpha_n = \beta_n = 0$ を仮定しているので微小量の取引でも許される．ゆえに I_0 から除外する．

資産配分問題 (2.4) は解が疎性をもつ性質があるので, 徐々に I_0 の要素数を増やすことによって解の疎性を高めていけば問題 (2.4) の最適解に近づくと期待できる．この予想のもとに, ある I_0 について凸制限問題 (3.8) を解き, 取引資産の中で取引量の絶対値が小さいものをあらたに I_0 に加える．この操作を繰り返すことによって良い解を得るのがこの凸制限反復法の狙いである．

しかし, $\phi_i^{\mathrm{b}}(x_i)$ は原点で微分不可能であるので, この問題はそのまま扱うのは困難である．そこで

$$\phi_i^{\mathrm{b}+}(x_i) := \beta_i + \alpha_i x_i \qquad \phi_i^{\mathrm{b}-}(x_i) := \beta_i - \alpha_i x_i$$

と定義すると, $\phi_i^{\mathrm{b}}(x_i)=\max\{\phi_i^{\mathrm{b}+}(x_i),\phi_i^{\mathrm{b}-}(x_i)\}$ となる．よって, 凸制限問題 (3.8) は補助変数 $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top(w+x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top(x+t)\le 0 \\ & \phi_i^{\mathrm{b}+}(x_i)\le t_i, \phi_i^{\mathrm{b}-}(x_i)\le t_i \qquad (i\notin I_0) \\ & w+x\in\mathcal{S} \\ & x_i=0, t_i=0 \qquad (i\in I_0) \end{array} \tag{3.10}$$

と表すことができる．この問題の制約関数はすべて微分可能である．以上の議論をまとめると, 次の凸制限反復法のアルゴリズムを得る．

凸制限反復法のアルゴリズム

Step 1. δ はある十分小さい正の数として,
$k:=0,\ \hat{\delta}:=\delta,\ \delta_0:=\delta,\ W^*=-\infty,\ \hat{I}:=\{1,...,n-1\}$
とおく．凸緩和問題 (3.7) を解き, その解を $\hat{x}^0$ とする．

Step 2. $I_0:=\{i|\ |\hat{x}_i^k|\le\hat{\delta}, i\in\{1,...,n-1\}\}$
とする．この I_0 について凸制限問題 (3.10) を解き, この最適解を $\hat{x}^{k+1}$, 最適値を W^{k+1} とする．

Step 3. $\delta_0=0$ かつ $W^*>W^{k+1}$ ならば $x^*:=\hat{x}^k$ を出力して終了．
$\delta_0=\delta$ かつ $W^*>W^{k+1}$ ならば $\delta_0:=0$, $\hat{x}^{k+1}:=\hat{x}^k$ とし,
さもなくば $\delta_0:=\delta,\ \hat{I}:=\hat{I}\setminus I_0,\ W^*:=W^{k+1}$ とする．

Step 4. $\hat{\delta}:=\min_{i\in\hat{I}}|\hat{x}_i^{k+1}|+\delta_0,\ k:=k+1$ とし, Step 2 へ戻る．

$\hat{\delta}$ は, I_0 に追加する要素を決定する閾値とみなすことができる．また, δ_0 はある種の信頼領域の大きさを表す．ある反復 k^* で Step 3 において $\delta_0=\delta$ かつ $W^*>W^{k^*+1}$ となるとき, W^{k^*+1} は暫定最適値 W^* より小さいので, Step 2 において I_0 に追加すべきでない要素を加えた, つまり閾値が大きすぎたと判断する．ゆえに前回の反復における解 x^{k^*} を再び今回の反復における解 x^{k^*+1} とし, 信頼領域の大きさ $\delta_0:=0$ とすることによって, 次の反復 k^*+1 において前回よりも小さい閾値を用いて要素 i が I_0 に追加されるかどうか判断する．あるいは Step 3 で $\delta_0=0$ かつ $W^*>W^{k+1}$ であるとき, 小さい閾値を用いたにもかかわらずいまの反復での最適値が暫定最適値 W^* を下回ったのは, I_0 に要素を追加する必要がなかったと判断し, 前回の解 x^{k^*+1} を出力する．また, そのいずれでもない場合, つまり $W^*\le W^{k+1}$ であるとき, 暫定最適値が x^{k^*+1} により更新されたので, 取引対象集合を $\hat{I}:=\hat{I}\setminus I_0$ として確定させ, 信頼領域 $\delta_0:=\delta$ とする．

このアルゴリズムによって得られた解 x^* は元の問題 (2.4) において実行可能である．さらに, Step 2 で凸制限問題 (3.10) を解く際に, $x_i=t_i=0\ \ (i\in I_0)$ を単なる定数とみなすことによって, 問題の次元を下げることができる．反復が進むにつれて問題の次元が小さくなるので計算時間を節約することが可能となる．

3.3　シグモイド近似法

各 i に対して, 関数 $A_i(x_i)$ と $B_i(x_i)$ をそれぞれ

$$A_i(x_i) := \alpha_i\,|x_i| \qquad B_i(x_i) := \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ \beta_i & x_i \neq 0 \end{cases}$$

と定義すると, 取引コスト関数 $\phi_i(x_i)$ はこの二つの関数の和として $A_i(x_i) + B_i(x_i)$ と表わされる．$A_i(x_i)$ は凸関数であるので, 問題 (2.4) を解くのを困難にしている要因は不連続関数 $B_i(x_i)$ である．そこで $B_i(x_i)$ を取り扱いやすいように連続近似することを考える．$B_i(x_i)$ は取引コストの固定費を表すことから, 原点から原点に十分近い点に動いたときの関数 $B_i(x_i)$ の変化率は非常に大きくなる性質がある．ゆえに原点の近傍で凸となるような連続近似はふさわしくなく, グラフが原点の近傍で尖った形になるような近似が望ましい．このような考えから, シグモイド関数

$$\varsigma_g(x) = \frac{1 - e^{-gx}}{1 + e^{-gx}} \qquad ({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

を用いて $B_i(x_i)$ を $\beta_i \varsigma_g(|x_i|)$ で近似する．g はシグモイド関数の傾きを決定するパラメータであり, ゲインと呼ばれる．シグモイド関数 $\varsigma_g(x)$ はその微分を

$$\varsigma_g'(x) = \frac{g}{2}(1 + \varsigma_g(x))(1 - \varsigma_g(x))$$

のように簡潔に表せるので, 勾配を簡単に計算することができる．

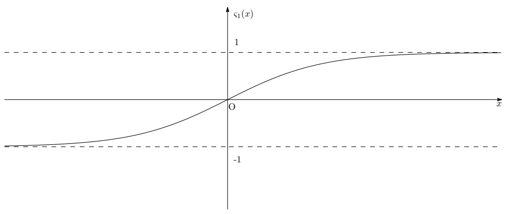

図 2: ゲイン $g = 1$ のときの $\varsigma_g(x)$

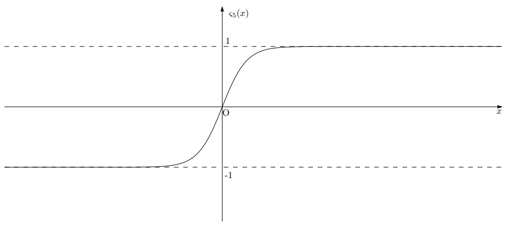

図 3: ゲイン $g = 5$ のときの $\varsigma_g(x)$

さらに, シグモイド関数を用いると, 取引コスト関数 $\phi_i(x_i)$ は連続関数

$$\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i) := \beta_i \varsigma_g(|x_i|) + \alpha_i |x_i|$$

で近似できる.

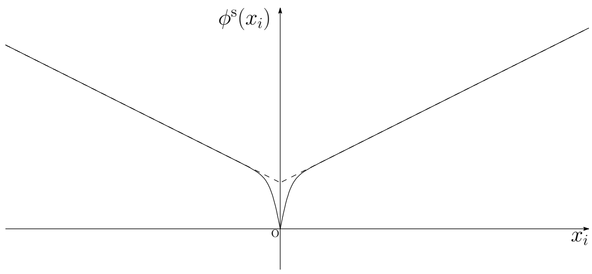

図 4: $\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i)$

資産配分問題 (2.4) における $\phi_i(x_i)$ を $\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i)$ で置き換えた問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top (w+x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top x + \sum_{i=1}^n \phi_i^{\mathrm{s}}(x_i) \leq 0 \\ & w + x \in \mathcal{S} \end{array} \tag{3.11}$$

を考える. この問題の局所的最適解は, 元の問題 (2.4) においてほぼ実行可能とみなすことができる. 以下の議論でそれを確認する.

- $i \in I_\alpha^0 \cap I_\beta^0$ に対して

$$\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i^*) = \phi_i(x_i^*) = 0$$

- $i \in I \setminus (I_\alpha^0 \cap I_\beta^0)$ に対して
  - $1/g \ll |x_i^*|$ のとき

$$\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i^*) = \beta_i \varsigma_g(|x_i^*|) + \alpha_i |x_i^*| \approx \beta_i + \alpha_i |x_i^*| = \phi_i(x_i^*)$$

  - $x_i^* = 0$ のとき

$$\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i^*) = \phi_i(x_i^*) = 0$$

とくに g が十分大きい時, 実際には $i \in I \setminus (I_\alpha^0 \cap I_\beta^0)$ に対して $|x_i^*|$ が $1/g$ のオーダーになることはほとんど起こらない. 厳密な実行可能性が必要となる場合は, この

問題を解いて求めた解において $x_i^* = 0$ となる変数 x_i を取り除き, 残った変数について

$$\phi_i(x_i) := \beta_i + \alpha_i |x_i|$$

として問題 (2.4) を解けばよい.

ただし, $\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i)$ は原点で微分不可能であるので, 問題 (3.11) はそのまま扱うのは困難である. そこで

$$\phi_i^{\mathrm{s}+}(x_i) := \beta_i \varsigma_g(x_i) + \alpha_i x_i \qquad \phi_i^{\mathrm{s}-}(x_i) := \beta_i \varsigma_g(-x_i) - \alpha_i x_i$$

と定義すると, $\phi_i^{\mathrm{s}}(x_i) = \max\{\phi_i^{\mathrm{s}+}(x_i), \phi_i^{\mathrm{s}-}(x_i)\}$ となる. よって, 問題 (3.11) は補助変数 $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{a}^\top (w + x) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top (x + t) \leq 0 \\ & \phi_i^{\mathrm{s}+}(x_i) \leq t_i, \phi_i^{\mathrm{s}-}(x_i) \leq t_i \qquad (i \in I) \\ & w + x \in \mathcal{S} \end{array} \tag{3.12}$$

と表すことができる. この問題の制約関数はすべて微分可能である. また, シグモイド近似問題 (3.12) は非凸計画問題であるので, 良い解を見つけるためには適切な初期点をとる必要がある. よって本報告書では, 凸緩和問題 (3.7) の最適解 x^0 を求め, $(x, t)^\top = (x_1^0, \ldots, x_n^0, \phi_1^{\mathrm{s}}(x_1^0), ..., \phi_n^{\mathrm{s}}(x_n^0))^\top$ をシグモイド近似問題の初期点として, 逐次 2 次計画法を用いて解を求めることとする.

4 数値実験

この節では, 前節で提案した方法に対して実際に計算機を用いて数値実験を行った結果を示す. 実験は CPU が 2.27GHz の Core i5, メモリが 4.0GB の計算機上で行い, アルゴリズムは MATLAB7.10.0 を用いて実装した. 問題に含まれるパラメータを

$$\begin{array}{ll} w_1, ..., w_{101} = 1/101 & \\ \alpha_1, ..., \alpha_{100} = 0.01, & \alpha_{101} = 0 \\ s_1, ..., s_{100} = 0.005, & s_{101} = 0.5 \\ p_1, ..., p_{101} = 0.5 & \end{array}$$

とし, 無作為に選んだ 100 銘柄の株式に単位通貨の現金資産 (分散 0 で $\bar{a}_{101} = 1$) を加えた $n = 101$ の資産配分問題 (2.4) を考える. 株式のリターンの期待値や分散は 2006 年 1 月 24 日から 2011 年 1 月 23 日までの 5 年分の月間データを基に推定した. また, 特に断らない限り $\beta_1 = \cdots = \beta_{100} = 0.001, \beta_{101} = 0$ とし, 分散制約式 (2.3) において $\sigma_{\max} := 0.1$ とする. さらに, 凸緩和反復法 [2] と凸制限反復法において x_i が 0 かどうかを判断する閾値を表すパラメータを $\delta := 10^{-3}$ とし, シグモイド近似法のシグモイド関数のゲインを $g := 10^3$ とする.

4.1　厳密な実行可能解での解法の比較

凸制限反復法, シグモイド近似法, 凸緩和反復法 [2] によって得た資産配分問題の最適値と計算時間を比較する．ただし, シグモイド近似法で実際に解くシグモイド近似問題 (3.12) の実行可能領域 $\boldsymbol{S}_{\rm s}$ と凸緩和反復法のアルゴリズム中に現れる問題の実行可能領域 $\boldsymbol{S}_{\rm cri}$ は, 必ずしも元の問題 (2.4) の実行可能領域 $\boldsymbol{S}_{\rm o}$ に含まれるとは限らない．ゆえに元の問題 (2.4) の厳密な実行可能解を出力するわけではないので, それぞれの解法によって得られた解 x によって与えられる最適値をそのまま比較することはできない．よって, x が元の問題 (2.4) の実行可能解でない ($x \notin \boldsymbol{S}_{\rm o}$) 場合には, x を実行可能解に修正する必要がある．

そこで, x が実行可能解でない場合, $|x_i| < \delta$ である要素 i の集合を I_0 として凸制限問題 (3.10) を解いて得られた解を x^* とする．この操作により, 実行不可能であった x が実行可能解 x^* に修正される．ただし, $x \in \boldsymbol{S}_{\rm o}$ のときは $x^* = x$ とする．そして最終的に, x^* によって与えられる目的関数値 $\bar{a}^\top(w + x^*)$ を各解法で得られた最適値 W とした．また, 最適値 W の比較においては, 最適性の指標として, この資産配分問題の最適値の上界を与える凸緩和問題 (3.7) の最適値 $W_{\rm cr}$ も比較対象とする．

図 5 は $\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_{100}$ として, β の変化 (β_{101} は常に 0) に対する最適値 W と計算時間の変化を表し, 図 6 は $\sigma_{\max}$ の変化に対する最適値 W と計算時間の変化を表す[*1]．以降の図では, 青の実線は凸制限反復法, 赤の点線はシグモイド近似法, 緑の破線は凸緩和反復法での値を表す．また, 黒の実線は凸緩和問題の最適値を表す．

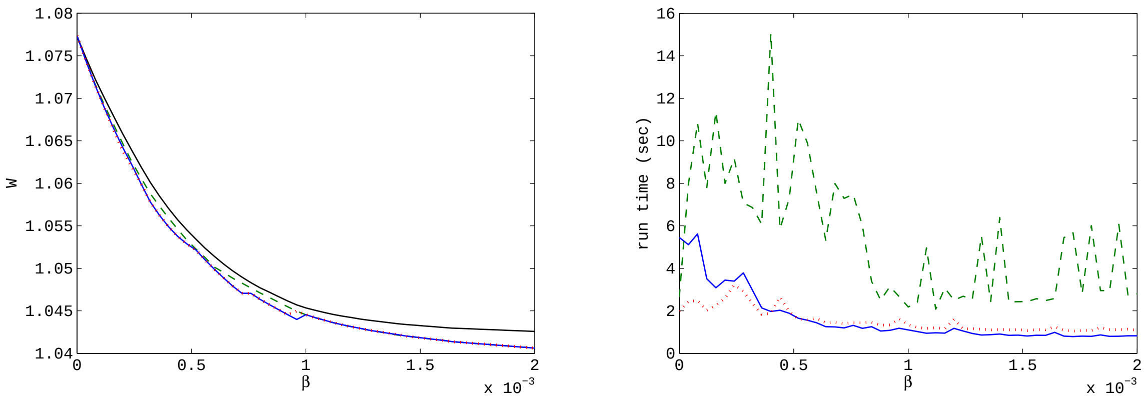

図 5: β の変化に対する最適値 W の変化 (左図) と計算時間の変化 (右図)

[*1] 図 6 の右図にて凸緩和反復法の計算時間が一部枠内に収まっていないが, その部分の計算時間は 80 秒程度であった．

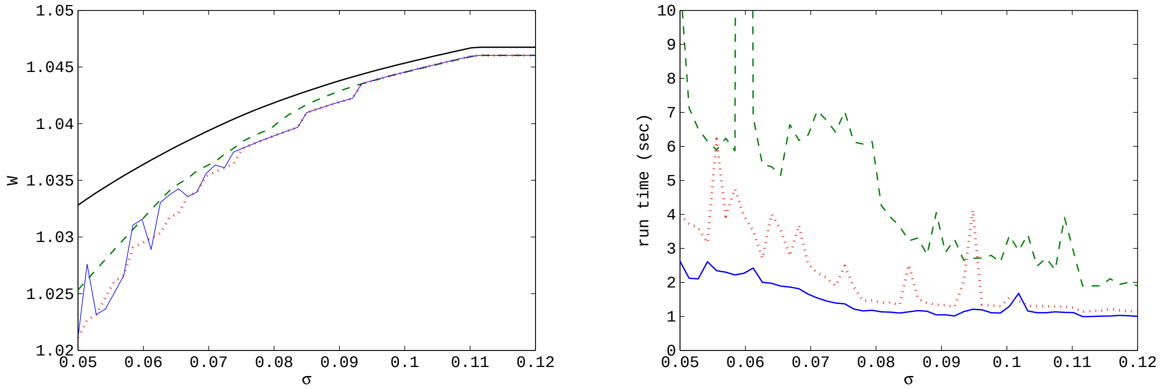

図 6: $\sigma_{\max}$ の変化に対する最適値 W の変化 (左図) と計算時間の変化 (右図)

各解法で得られる最適値 W は非常に近い値をとることがわかる. 最適値の比較を容易にするために, 最適値 W と上界値 $W_{\rm cr}$ の比率 $W/W_{\rm cr}$ の値によって, 各解法で得られる最適値の比較をする.

図 7 の左図は $\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_{100}$ として, β の変化 (β_{101} は常に 0) に対する $W/W_{\rm cr}$ の変化を表し, 右図は $\sigma_{\max}$ の変化に対する $W/W_{\rm cr}$ の変化を表す.

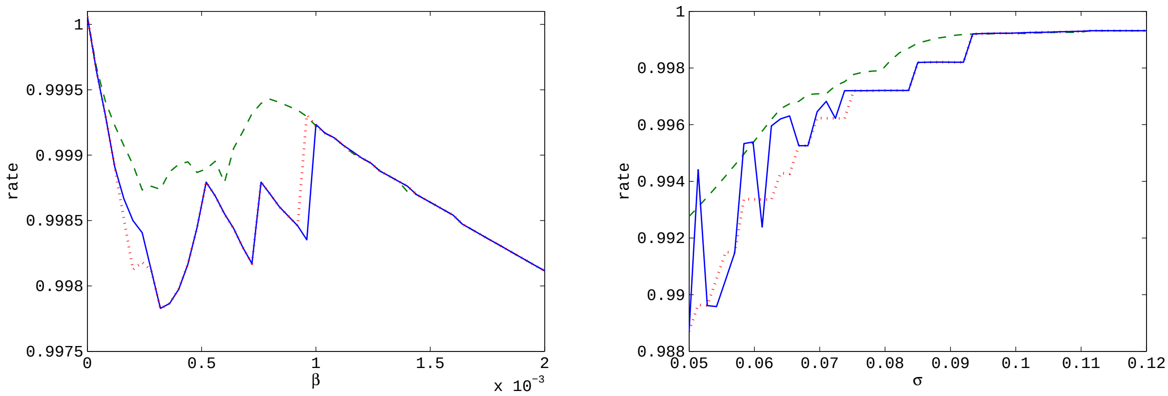

図 7: β の変化に対する $W/W_{\rm cr}$ の変化 (左図) と $\sigma_{\max}$ の変化に対する $W/W_{\rm cr}$ の変化 (右図)

4.2　制約ペナルティを考慮した解法の比較

4.1 節では, 各解法で得られた解における目的関数値が一致する状況がしばしば見受けられた．これは, シグモイド近似法, 凸緩和反復法で出力された解に対して, 凸制限問題を用いて実行可能解への修正操作を行ったことが原因であると考えられる．よってこの節では凸制限問題を用いて厳密な実行可能解への修正をするかわりに, 制約条件の違反の大きさをペナルティ項として最適値から減じたものを最終的な最適値とすることにより各解法を比較する．

具体的には, 以下のようなシナリオを想定し, ペナルティ項を定義する．シグモイド近似法, 凸緩和反復法ともに, 解く問題の制約条件 $w + x \in \mathcal{S}$ は一致している．よって, 出力された解が元の問題 (2.4) において違反している制約があるとすれば, それは予算制約 (2.1) である．出力された解 x^* において $c := \mathbf{1}^\top x + \phi(x^*)$ とすると, 元の問題 (2.4) の予算制約 (2.1) を破っているとき $c > 0$ となる．単位通貨を円とすると, これは c 円を第三者から借り入れていることを意味する．$-s_n \leq w_n + x_n^* - c$ ならば, $x_i' := x_i^*(i = 1, ..., n-1), x_n' := x_n^* - c$ と修正することにより元の問題 (2.4) の制約条件を満たす解 x' が得られる．$-s_n > w_n + x_n^* - c$ ならば, 限度額以上の現金を借り入れていることを意味する．よって $x_i' := x_i^*(i = 1, ..., n-1), x_n' := -(s_n + w_n)$ と修正して限度額まで借り入れ, それでまかないきれない分の $c' := c - (s_n + w_n + x_n^*)$ は金利 r で追加借り入れを行う．そしてピリオド後に, 金利 r による利息を含めた追加借り入れ金 $(1 + r)c'$ を返済する．ここで, 金利 r は $1 + r := \max_{w_i + x_i^* \neq 0} \bar{a}_i$ とする．

以上の議論から, 修正借り入れもペナルティに含めたペナルティ項 $c_{\mathrm{p}}(x^*)$ は

$$c_{\mathrm{p}}(x^*) := \begin{cases} 0 & (c \leq 0) \\ c & (0 < c \leq s_n + w_n + x_n^*) \\ (s_n + w_n + x_n^*) + (1 + r)(c - (s_n + w_n + x_n^*)) & (s_n + w_n + x_n^* < c) \end{cases}$$

となり, 最終的な最適値 W_{p} は

$$W_{\mathrm{p}} := \bar{a}^\top (w + x^*) - c_{\mathrm{p}}(x^*)$$

で与えられる．本節では, 凸緩和反復法, シグモイド近似法, 凸制限反復法それぞれについてペナルティ項を含めた最適値 W_{p} の値によって各解法を比較をする．本節の実験で用いる問題例は 4.1 節の実験で用いた問題例と同じであるので, 計算時間の比較は行わない．

図 8 の左図は $\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_{100}$ として, β の変化 (β_{101} は常に 0) に対する最適値 W_{p} の変化を表し, 右図は $\sigma_{\max}$ の変化に対する最適値 W_{p} の変化を表す．

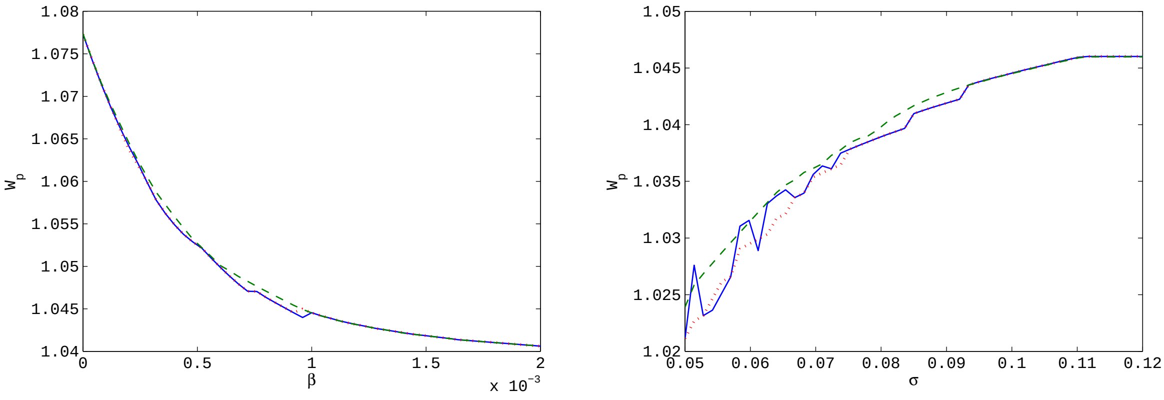

図 8: β の変化に対する最適値 W_{p} の変化 (左図) と $\sigma_{\max}$ の変化に対する最適値 W_{p} の変化 (右図)

また, 本節の実験においても, 最適値の比較を容易にするために最適値 W_{p} と上界値 W_{cr} の比率 $W_{\mathrm{p}}/W_{\mathrm{cr}}$ の値によって各解法で得られる最適値の比較をする.

図 9 の左図は $\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_{100}$ として, β の変化 (β_{101} は常に 0) に対する $W_{\mathrm{p}}/W_{\mathrm{cr}}$ の変化を表し, 右図は $\sigma_{\max}$ の変化に対する $W_{\mathrm{p}}/W_{\mathrm{cr}}$ の変化を表す.

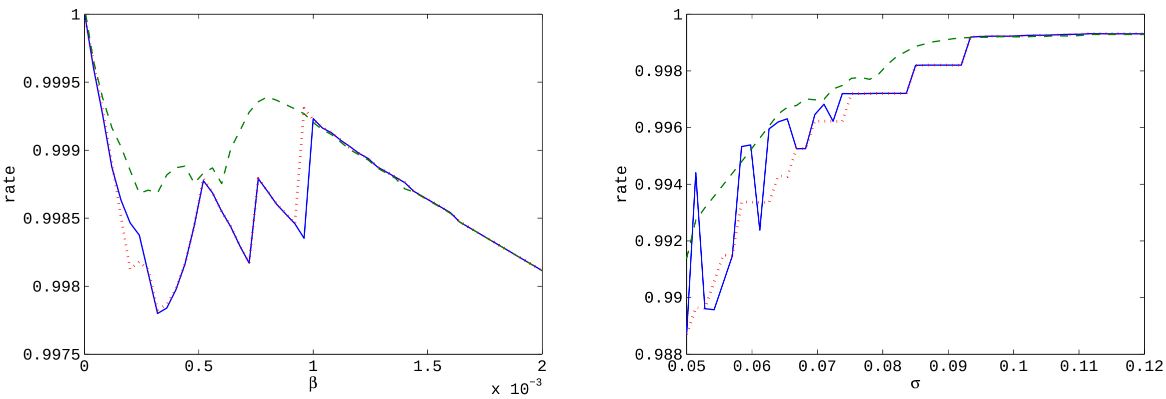

図 9: β の変化に対する $W_{\mathrm{p}}/W_{\mathrm{cr}}$ の変化 (左図) と $\sigma_{\max}$ の変化に対する $W_{\mathrm{p}}/W_{\mathrm{cr}}$ の変化 (右図)

4.3 考察

以上の実験結果からわかるように, 提案した凸制限反復法, シグモイド近似法ともにおおむね既存の手法である凸緩和反復法の最適値に近い値を与える. しかし, β の値が小さい正の値であるときには最適性の面では凸緩和反復法が優れていることが確認された.

計算時間で比較すると, 図 5, 図 6 からわかるように, 二つの提案手法は凸緩和反復法よりも短い計算時間で解に収束することがわかる. また, β が小さい正の値で

あるほど各解法の計算時間が増大する傾向にある. 特に, 凸制限反復法と凸緩和反復法ではその傾向が顕著に現れた. これは, β が小さい値であるほど取引する資産が多くなることが関係していると推測される. 凸制限反復法については, 取引する資産が多いため, 各反復で解く問題の次元が十分に小さくならず, 比較的大きな次元の問題を解いていることが原因であると推察できる. さらに, $\sigma_{\max}$ が小さい値であるときにも各解法の計算時間が増大する傾向が見られた.

今回の実験では凸制限反復法は大抵のケースにおいて反復回数が 10 回以内で終了したので, ある程度収束の速さをもつことが確認された. さらに, 4.2 節で計測した各解法で得られる最適解の予算制約超過 c は, 凸緩和反復法ではおおよそ 10^{-4} のオーダーであるのに対し, シグモイド近似法では 10^{-7} 程度におさえられていることが確認された. 凸制限反復法で得られる解は, アルゴリズムの性質から明らかに実行可能解であり, 実際予算制約を超過することはなかった.

5 結論

本報告書では固定費付き取引コスト関数をもつ資産配分問題に対する解法として, 凸制限反復法とシグモイド近似法を提案した. さらに, 数値実験によってそれらの解法を既存の解法と比較し, 有効性を検証した. その結果, 提案手法は既存の解法と比較して計算時間が短く, また, 計算時間に比して良い解が得られることが確認された.

今後の課題としては, 提案手法をより収束が速く, より良い解が得られるように改良することが求められる. 凸制限反復法については, 各反復での非取引集合 I_0 の決定方法は今回採用方法では必ずしも十分とは言えない. x の各成分の絶対値のみによって要素 i が非取引集合 I_0 に入るかどうかの判断が行われ, 分散やリターン, 取引コストなどの条件は一切考慮していないので, それらのパラメータも含めた決定方法が要求される. シグモイド近似法については, 今回は取引コスト関数の連続近似をするに留まった. 本報告書ではシグモイド関数のゲインはすべての要素 i について同じ値としたので, 何らかの判断基準を用いて各要素に対するゲインをそれぞれ異なる値にすることも検証する余地がある.

また, 本報告書で扱った資産配分問題では, 取引コストに関する制約条件以外の制約条件が比較的単純であったので, より実際の資産配分問題に即した制約条件を取り入れた問題を定式化し, その問題に対する有効な解法を提案すること, さらに, 既存の解法と提案手法を組み合わせたアルゴリズムを提案することなども課題として挙げられる.

謝辞

日頃から御教授くださり, 本研究に対しても適切なご指摘と熱心なご指導を賜った福嶋雅夫教授に深く感謝の意を表します. また，日頃からお世話になっている山下信雄准教授, 林俊介助教ならびに福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] Boyd, S. and Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[2] Lobo, M. S., Fazel, M. and Boyd, S.: Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs, *Annals of Operations Research*, Vol. 152 (2007), 341–365.

[3] Markowitz, H.: Portfolio selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7 (1952), 77–91.

[4] 福島雅夫：非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.