特別研究報告書

取引コストを考慮した
資産配分関数の構築

指導教員　　　山下信雄　准教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成２０年４月入学
平成２４年３月卒業

松井　亮大

平成２４年１月３１日提出

取引コストを考慮した資産配分関数の構築

松井 亮大

摘要

本報告書では，取引コストを考慮した資産配分問題を考える．近年，経済状況に応じて資産配分を適宜決定する数理的手法が研究されている．そのような研究における目的の１つに，経済指標を入力として資産配分を出力する資産配分関数を求めることがある．そのような問題は一般に，関数を決定変数とした，無限計画問題とよばれる数理計画問題に定式化される．

最近，吉田と山下は，機械学習のアイデアに基づいて資産配分関数の形に制限を加えることによって凸２次計画問題に変換し，さらにカーネルトリックとよばれる方法を適用することにより，実データに基づいて資産配分関数を求める手法を提案した．しかし，その手法においては取引コストが考慮されていなかった．そのため，実データに基づいたシミュレーションによる結果では，取引を頻繁に行ってしまい，このままでは実運用に利用することができなかった．

本報告書では，そのような欠点を解消するため，取引コストを考慮した資産配分関数を構築する手法を提案する．まず，取引コストを取引量の線形な関数であると仮定する．その結果，吉田と山下の手法と同様に資産配分関数の形に制限を加えることによって，取引コストを考慮した資産配分関数を求める問題は線形計画問題へと定式化できる．つづいて，過学習を防ぐためにペナルティ項を加えて凸２次計画問題とし，さらにその双対問題をカーネルトリックを用いて解くことによって，資産配分関数を構築する．さらに本報告書では，提案手法の妥当性を調べるために，取引コストが存在する市場を想定した数値実験を行った．そこでは，取引コストを考慮した提案手法による運用と，取引コストを考慮しないが実際には取引コストがかかる既存手法による運用とを比較した．その結果，提案手法では既存手法に比べて，頻繁な取引を避けることができ，それによって資産価値の下落を抑えることができることがわかった．

目 次

1　序論

近年，グローバル化や情報通信技術の発展にともなって，資産を効率的かつ数理的に運用する手法がさかんに用いられている．その中で基本となるのが，投資家にとって最適となる資産配分を数理的に求める問題，資産配分問題である．

資産配分問題に関しては，長きにわたって多くの研究がなされてきた．その中でもっとも基本となっているのが，Markowitz が定式化した平均・分散モデルである [2, 4]．そのモデルでは，リターンを収益率の期待値で表わし，リスクを収益率の分散で表現している．そして最適な解は,「リターンをある値に固定したときにリスクを最小にするような資産配分」としている．

その他にも様々なモデルが提案されているのだが，それらの多くには何らかの形で収益率の統計量（期待値や分散など）が含まれる．このような統計量を求める基本的な手法の 1 つとして，過去の資産の収益率のデータを用いて統計量を近似する方法がある．例えば，ある資産の収益率の期待値を，過去の 6 期間の収益率 $-0.1, -0.3, -0.2,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.2$ の平均で近似する場合を考える．このときは，収益率の期待値を 0 で近似した問題を解くことになる．ここで，この 6 期間のデータにおいて，前半の 3 期間は円高ドル安の時期，後半の 3 期間は円安ドル高の時期であったとする．この情報を利用すると，円高ドル安の時期には収益率が低く，円安ドル高の時期には収益率が高い，と推定できる．したがって，ドル円相場の状態に応じて資産配分を決定すれば，よりよい運用結果が得られるのではないか，と考えられる．そこで本報告書では，ドル円相場などの経済指標を入力として資産配分を出力する資産配分関数を構築する手法を考える．

最近，吉田と山下 [8] は，機械学習のアイデアに基づいて，過去のデータから資産配分関数を求める手法を提案した．その手法では，はじめに，通常の資産配分を求める問題において，決定変数を関数におきかえることによって資産配分関数を求める問題を定式化した．その問題は関数を決定変数とする無限計画問題となる．そこで [8] では，関数の形に制限を加えることによって凸 2 次計画問題に変換している．さらに，その双対問題を考え，カーネルトリックとよばれる方法を適用することにより，資産配分関数を求める手法を提案している．しかし，そのモデルにおいては取引コストが考慮されていなかった．取引コストとは，取引所などに払う手数料や，その取引にともなう価格変動による損失などである．取引コストが存在するとき，取引を頻繁に行うことによるコストは，資産価格の上昇よりも大きくなることがある．[8] で提案された手法を，実データに基づいてシミュレーションした結果では，取引を頻繁に行ってしまうことがわかっている．そのため，このままでは取引コストが無視できない実運用に利用することができない．

本報告書では，そのような欠点を解消するため，取引コストを考慮した資産配分関数を構築する手法を提案する．まずはじめに，取引コストを考慮した資産配分関数を求めるための資産配分問題を定式化する．その問題に含まれる取引コストの関数は，一般に非凸で非線形な関数であるため，最適化問題としては扱いにくい．そこで，取引コストを取引量の線形関数であると仮定する．次に，資産配分関数の形に制限を加えることによって，線形計画問題へと定式化する．つづいて，過学習を防ぐためにペナルティ項を加えて，凸 2 次計画問題とする．さらに，その双対問題を考え，カーネルトリックとよばれる方法を適用することにより，資産配分関数を構築する．また，数値実験として，取引コストが存在する市場を想定してシミュレーションを行う．そこで，取引コストを考慮した提案手法による運用と，取引コストを考慮しないが実際には取引コストがかかる既存手法による運用とを比較する．

本報告書の構成は以下のとおりである．2 節では，資産配分問題を定式化するための準備として，考える状況やリスク指標，取引コストについて説明する．3 節では，資産配分関数を求める問題を定式化し，その問題を解く方法を述べる．4 節では数値実験として，取引コストが存在する市場を想定してシミュレーションを行い，その結果について考察する．最後に 5 節で結論を述べる．

なお，本報告書において，確率変数 X に対して $E[X]$ は X の期待値を表し，実数 x に対して $(x)^+$ を $(x)^+ = \max(x, 0)$ と定義する．

2 準備

資産配分問題とは，金融市場に存在する様々な金融資産に対して，最適な総資産の配分を決定する問題である．資産配分問題を定式化する上で重要なのは，どういった状況を考えるのか，何をもって最適とするのか，である．基本的には，できるだけリターンを大きくして，できるだけリスクを小さくすることが目的となる．このリスクとリターンの具体的な設定によって，様々な資産配分問題が定式化できる．

そこで本節では，本報告書で提案する資産配分問題を与えるための前提となる状況，リスク，リターン，取引コストの説明をする．

2.1 考える状況

n 種類の資産 S_i $(i = 1, \ldots, n)$ が存在する市場において，ある一定期間，資産配分を固定して運用することを考える[1]．また各資産には，いくらでも多く，いくらでも細かく投資することができる．つまり，各資産 S_i への配分は連続量であるとする．また，負の量の資産を保有すること，つまり空売りはできないものとする．

次に，求めたい資産配分を $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ で表す．ただし各成分は，各資産に投資している量（金額）を表し，単位は揃えているものとする．取引コストを考えるため，取引する前の資産配分を $\boldsymbol{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ と表す．これも，各資産に投資している量を表し，単位は揃えている．ここで注意したいのは，最適な資産配分 $\boldsymbol{y}$ は，取引コストを払い終えた後の資産配分のことである．

また，資産 S_i の単位量あたりの現在の価格を s_i^0 とし，一定期間終了後の価格を s_i とする．s_i は確率変数である．このとき，収益率 R_i を以下のように定義する[2]．

$$R_i = 1 + \frac{s_i - s_i^0}{s_i^0}$$

R_i も確率変数となる．これにより，資産配分 $\boldsymbol{y}$ の一定期間終了後の資産価値は，$\sum_{i=1}^{n} R_i y_i$ である．

最後に，最適な資産配分とは，資産の期待価値 $E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i y_i\right]$ が一定以上のもとでリスクを最小化する配分とする．

2.2 リスク尺度

リスクを表す尺度として，これまでに様々な尺度が提案されている．Markowitz の平均・分散モデル [2, 4] では，リスクを表す尺度として収益率の分散が用いられている．分散を用いた資産配分問題は，凸 2 次計画問題に定式化できる．その他のリスク尺度としては，絶対偏差が用いられることもあり，その場合は線形計画問題に定式化できる．

しかし，分散や絶対偏差は，期待収益率などの基準からのずれだけを考慮しており，この基準より上にずれているのか，下にずれているかは考慮していない．投資家の心情を考えると，基準より下にずれるものをリスクとよぶのが適切だろう．そういった視点で絶対偏差を改良したリスク尺度が，下半絶対偏差 [5] である．下半絶対偏差は，収益率 z と基準 α に対して以下のように定義される．

$$E\left[|\min(z - \alpha, 0)|\right]$$

[1] 期間を分けて各期間ごとに異なる資産配分で運用を行うときには，各期間ごとに 1 期間の独立した問題と考える．ただし，この場合は，あくまでも各期間ごとの最適な運用を考えており，全期間を通しての最適な運用ではない．

[2] 収益率は，一般的には $R_i = (s_i - s_i^0)/s_i^0$ と定義されることが多いが，本報告書では，それに 1 を足したものと定義することにする．

ここで α は，一定の値とすることもできるし，ベンチマークなどの確率変数とすることもできる．下半絶対偏差は，以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
E\left[|\min(z-\alpha,0)|\right] &= E\left[\max(\alpha-z,0)\right] \\
&= E\left[(\alpha-z)^{+}\right]
\end{aligned}
$$

本報告書では，リスクを表す尺度として，この下半絶対偏差を用いることにする．

2.3　取引コスト

本報告書では，各資産を売買するときには，その取引量に応じて取引コストがかかるものとする．取引コストとして，取引手数料と市場インパクトコストが考えられる．取引手数料とは，取引量に応じて証券会社や証券取引所に支払う手数料である．一方，市場インパクトコストとは，高額の資産を売買する注文を出したときに，その注文によって資産価値が変動してしまい，想定していたよりも損な取引になってしまうという損失コストである．例えば，大量の買い注文を出したときに，その注文によって株価が上昇してしまい，より高い値段で買わなければならなくなる．そういった取引コストを一般的にグラフにしたものが，以下の図 1 である．

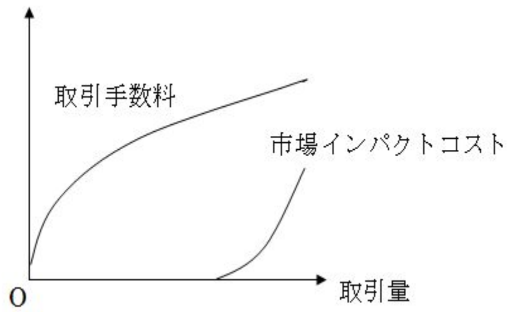


図 1: 取引手数料と市場インパクトコスト

図 1 のように，一般に取引手数料は，取引量が多くなるほど多くなるが，その増加する割合は小さくなっていく．つまり，取引量の凹関数となる．一方，市場インパクトコストは，高額な注文を出すほど増加する割合は大きくなる．つまり，取引量の凸関数となる．それらを足し合わせると，取引コストは一般的に以下の図 2 のようになる．

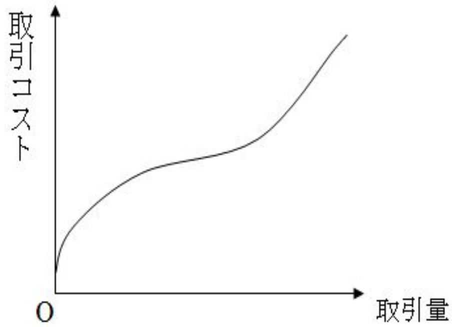


図 2: 取引コスト関数

以下では，資産 S_i を Δy_i だけ売買したときにかかる取引コストを $\mathrm{cost}_i(\Delta y_i)$ とかくことにする．ただし，$\Delta y_i = \left|y_i - y_i^0\right|$ である．

2.4 取引コストを考慮した資産配分問題

本小節では，小節 2.1-2.3 に基づいて取引コストを考慮した資産配分問題を与える．つまり，以下のような資産配分問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{y}} \quad & E\left[\left(\alpha - \sum_{i=1}^{n} R_i y_i\right)^+\right] \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i^0 = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cost}_i(y_i - y_i^0) \\
& y_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n \\
& E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i y_i\right] \geq \beta
\end{aligned} \tag{1}
$$

この問題における目的関数は，資産配分 $\boldsymbol{y}$ のリスクを表す下半絶対偏差である．1 つ目の制約条件は，取引前後の総資産と取引にかかるコストとの関係式である．2 つ目の制約条件は，空売りができないという設定を表しており，3 つ目の制約条件は，資産配分 $\boldsymbol{y}$ の期間終了後の期待価値の下限が β と決められていることを表している．

次節では，この資産配分問題 (1) に基づいて，資産配分関数を求める問題を提案する．

3 取引コストを考慮した資産配分関数を求める問題

本節では，前節の資産配分問題 (1) を土台にして，いくつかの変形を加えることにより，取引コストを考慮した資産配分関数を求める問題を定式化する．

3.1 資産配分関数と取引コストの扱い

最適な資産配分をある経済指標の関数として表したい．そこで，通常の資産配分問題 (1) において，資産配分 $\boldsymbol{y}$ を，経済指標 $\boldsymbol{X}$ を変数とした関数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{y}^0) = (g_1(\boldsymbol{X}_1;\boldsymbol{y}^0), g_2(\boldsymbol{X}_2;\boldsymbol{y}^0), \ldots, g_n(\boldsymbol{X}_n;\boldsymbol{y}^0))$ でおきかえる．ここで，$\boldsymbol{X}_i$ は資産 S_i に対する経済指標を表す確率変数 (行ベクトル) であり，$\boldsymbol{X}$ はそれを並べた確率変数で $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ である．また，$\boldsymbol{X}$ のとりうる集合を $\Omega_{\boldsymbol{X}}$ とする．

問題 (1) の制約条件の中にある取引コスト関数 cost_i は，一般には図 2 のような非凸な非線形関数であるため，このままでは扱いにくい．そこで本報告書では，図 2 の取引コスト関数 cost_i を，原点を通る線形関数で近似することを考える（図 3）．資産 S_i に対するこの線形関数の傾きを c_i とし，$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ とおく[3]．

[3]本報告書では，取引コストとして取引手数料と市場インパクトコストを考えているが，単に頻繁な取引を抑えるパラメータと考えることもできる．

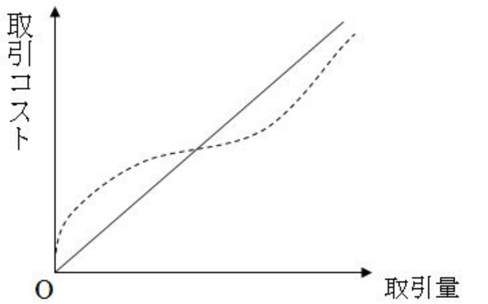


図 3: 取引コスト関数（点線）を線形関数（実線）で近似

例えば，$n=2$, $\boldsymbol{c}=(0.1,0.2)$ で，240 円の価値がある株と 80 円の価値があるドル通貨を保有しており，株への投資分のうち 120 円をドル通貨に移し替えたい場合を考える．つまり，現在の資産配分は $\boldsymbol{y}^0=(240,80)$ である（単位は円）．まず株を半分売ることによって，$y_1=120$ となると同時に，取引コストを引かれた 108 $(=120-0.1\times 120)$ 円の現金が手に入る．次に，その現金を全てドル通貨に投資するのだが，ドル通貨を買うときの取引コストを考慮しなければならないので，90 円分のドル通貨を買って，残りの 18 $(=108-90)$ 円は取引コスト 18 $(=0.2\times 90)$ 円に使う．結果的に，取引後の資産配分は $\boldsymbol{y}=(120,170)$ となり，かかった取引コストは計 30 $(=12+18)$ 円である．この例でも確認できるように，取引コストは $\sum_{i=1}^n c_i|y_i-y_i^0|$ という式で表すことができる．

これより，問題 (1) に基づいて，資産配分関数を求める問題は以下のように定式化できる．

$$
\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{g}} & E\left[\left(\alpha-\sum_{i=1}^n R_i g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)\right)^+\right] \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^n y_i^0=\sum_{i=1}^n g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)+\sum_{i=1}^n c_i\left|g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)-y_i^0\right|, \quad \forall \boldsymbol{X}\in\Omega_{\boldsymbol{X}} \\
& g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)\ge 0, \quad i=1,\ldots,n, \ \forall \boldsymbol{X}\in\Omega_{\boldsymbol{X}} \\
& E\left[\sum_{i=1}^n R_i g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)\right]\ge\beta
\end{array}
\tag{2}
$$

ここで，決定変数は関数 $\boldsymbol{g}$ であることに注意する．

3.2　資産配分関数に対する制限と期待値の近似

本小節では，資産配分問題 (2) を数値的に解けるように変換することを考える．

資産配分問題 (2) は，決定変数が関数 $\boldsymbol{g}$ であるため，無限計画問題である．そこで関数 g_i に対して，以下のような形で表されるという制限を加える．

$$
g_i(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{y}^0)=\langle \boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle, \qquad i=1,\ldots,n \tag{3}
$$

ただし，関数 $\boldsymbol{\phi}_i$ はある基底関数を縦に並べたベクトル値関数（以後，基底関数ベクトルとよぶ）であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表す．つまり，関数ベクトル $\boldsymbol{\phi}_i$ の各要素が基底関数であり，ベクトル $\boldsymbol{w}_i$ の各要素が

基底関数の線形結合の係数である．求めたい資産配分関数 g_i の形の自由度を確保するには，基底関数ベクトル $\boldsymbol{\phi}_i$ の関数値の次元 m_i（$\boldsymbol{w}_i$ の次元と同じ）は大きいほうが良く，以下では無限次元 $(m_i = \infty)$ も認めることとする．

このような制限によって，資産配分問題の決定変数は関数 $\boldsymbol{g}$ からベクトル $\boldsymbol{w}$ に代わる．なお，取引前の資産配分 $\boldsymbol{y}^0$ の情報は決定変数 $\boldsymbol{w}$ に含まれていることに注意する．このとき，資産配分問題 (2) は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{w}} \quad & E\left[\left(\alpha - \sum_{i=1}^{n} R_i \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle\right)^{+}\right] \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i^0 = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i \left|\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle - y_i^0\right|, \qquad \forall \boldsymbol{X} \in \Omega_{\boldsymbol{X}} \\
& \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \;\; \forall \boldsymbol{X} \in \Omega_{\boldsymbol{X}} \\
& E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i)\rangle\right] \geq \beta
\end{aligned}
\tag{4}
$$

次に，資産配分問題 (4) をみると，目的関数と制約条件に期待値が含まれている．また，1 つ目の制約条件は $\Omega_{\boldsymbol{X}}$ の要素の数だけあり，一般にはこの要素数は無限である．そこで，この期待値と $\Omega_{\boldsymbol{X}}$ を，確率変数 $R_i, \boldsymbol{X}_i$ の過去の時刻 t における実現値 $r_i^t, \boldsymbol{x}_i^t$ $(t = 1, \ldots, T)$ を用いて近似することを考える．この近似を用いると，資産配分問題 (4) は以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{w}} \quad & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right)^{+} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i^0 = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i \left|\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - y_i^0\right|, \qquad t = 1, \ldots, T \\
& \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \;\; t = 1, \ldots, T \\
& \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right) \geq \beta
\end{aligned}
\tag{5}
$$

変形前はすべての $\boldsymbol{X} \in \Omega_{\boldsymbol{X}}$ に対して制約条件が成り立たなければいけなかったが，変形後の制約は，過去のデータ $\boldsymbol{x}_i^t$ $(i = 1, \ldots, n, \; t = 1, \ldots, T)$ に対してのみ成り立つことを要求している．したがって，この問題を解いて求まった資産配分関数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{y}^0)$ に，過去のデータと一致しない $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\boldsymbol{X}}$ を入力した場合，制約条件を満たしていない可能性がある．このようなときの対処法については，本節の最後で述べる．

資産配分問題 (5) をみると，1 つ目の制約条件に絶対値が入っており線形な式ではないため，資産配分問題 (5) は凸計画問題ではない．そこで，1 つ目の制約条件の等号 $=$ を不等号 $\geq$ に変える．α^t と β が適切に設定されていれば，このように変えても問題はない．なぜなら，目的関数と制約条件の形から，できるだけ $\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle$ $(i = 1, \ldots, n, \; t = 1, \ldots, T)$ を大きくしたほうが最適となるためである．つまり，不等号 $\geq$ に変えた問題の最適解は結果的に，1 つ目の制約条件の等号 $=$ を満たす．したがって，1 つ目の制約条件を不等式に変え，以下のような凸計画問題にする．

$$
\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{w}} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right)^+ \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^0 \ge \sum_{i=1}^{n}\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i \left|\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - y_i^0\right|, \qquad t = 1,\ldots,T \\
& \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle \ge 0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T \\
& \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right) \ge \beta
\end{array}
\tag{6}
$$

次に，目的関数と制約条件に入っている $|\cdot|, (\cdot)^+$ を消去するため，補助変数 p_i^t, q_t を新たに導入する．その結果，資産配分問題 (6) は以下のように変形できる．

$$
\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q^t \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^0 \ge \sum_{i=1}^{n}\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i p_i^t, \qquad t = 1,\ldots,T \\
& \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle \ge 0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T \\
& \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right) \ge \beta \\
& \displaystyle q^t \ge 0,\ \ q^t \ge \alpha^t - \sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle, \qquad t = 1,\ldots,T \\
& p_i^t \ge \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - y_i^0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T \\
& p_i^t \ge y_i^0 - \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T
\end{array}
\tag{7}
$$

この資産配分問題 (7) は，決定変数が $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の線形計画問題である．しかし，この問題を解いて求まった解は過去のデータ $r_i^t, \boldsymbol{x}_i^t$ に過度に適応してしまい，未知の状況に対してよい振る舞いをしないことがある．この問題点は，機械学習の分野で過学習とよばれるものである．これを防ぐために正則化という方法がよく用いられる [7]．資産配分問題 (7) において過学習がおきるときには，基底関数の係数ベクトル $\boldsymbol{w}_i$ の要素の絶対値が大きくなってしまうので，それを防ぐために目的関数にペナルティ項を加える．具体的には，各 i に対するペナルティを $\|\boldsymbol{w}_i\|^2$ と考え，それらの平均に正のペナルティパラメータ τ (>0) をかけたもの，つまり $\tau\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i\|^2/n$ をペナルティ項とする．このペナルティ項を加えると，資産配分問題 (7) は以下の凸 2 次計画問題となる．

$$
\begin{array}{lll}
\min_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q^t + \frac{\tau}{n}\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{w}_i\|^2 & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^0 - \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} c_i p_i^t, \qquad t = 1,\ldots,T & \\
& \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T & \\
& \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right) \geq \beta & (8) \\
& \displaystyle q^t \geq 0,\ \ q^t \geq \alpha^t - \sum_{i=1}^{n} r_i^t \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle, \qquad t = 1,\ldots,T & \\
& p_i^t \geq \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - y_i^0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T & \\
& p_i^t \geq y_i^0 - \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T &
\end{array}
$$

この資産配分問題 (8) が，本報告書の提案する資産配分問題である．

3.3 双対問題

資産配分問題 (8) は，実際に数値的に解くには扱いにくい部分がある．それは，本来の解 $\boldsymbol{g}$ の自由度を確保するために基底関数ベクトルの関数値の次元 m_i を大きく（あるいは $m_i = \infty$ に）すると，以下の 2 つの計算に手間がかかるからである．

- $\boldsymbol{x}_i^t$ に対する $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)$ $(i = 1,\ldots,n,\ t = 1,\ldots,T)$ の計算
- 要素数が多いベクトル同士の内積 $\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle$

また，資産配分問題 (8) の決定変数の個数も多くなるので，数値的に解きにくい問題になる．そこで本節では，資産配分問題 (8) の双対問題を考え，さらにカーネルトリックとよばれる方法を適用することで，上のような問題点を解消できることを示す．

資産配分問題 (8) の各制約条件に関するラグランジュ乗数を上から順に $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \eta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa}/2, \boldsymbol{\theta}/2$ とする．ここで，$\boldsymbol{\kappa}$ と $\boldsymbol{\theta}$ に 1/2 をかけているのは，以下で与える双対問題の式を簡潔にするためである．このとき，ラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta})$ は，

$$
\begin{aligned}
& L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta}) \\
= \;& \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q^t + \frac{\tau}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i\|^2 + \sum_{t=1}^{T}\lambda^t\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i p_i^t - y_i^0 + \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right)\right\} \\
- \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\mu_i^t\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle + \eta\left\{\beta - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle\right)\right\} \\
- \;& \sum_{t=1}^{T}\xi^t q^t + \sum_{t=1}^{T}\nu^t\left(\alpha^t - \sum_{i=1}^{n} r_i^t\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - q^t\right) \\
+ \;& \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\frac{\kappa_i^t}{2}\left(\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - y_i^0 - p_i^t\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\frac{\theta_i^t}{2}\left(y_i^0 - \langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\rangle - p_i^t\right)
\end{aligned}
$$

であり，双対問題は以下のように定義される．

$$
\begin{array}{lll}
\min_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta}} & -\inf_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta}) \\
\text{s.t.} & \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0},\ \eta \geq 0,\ \boldsymbol{\xi} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\kappa} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{9}
$$

以下では，目的関数 $-\inf_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta})$ を具体的に求める．ラグランジュ関数を変形すると，

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\tau}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \boldsymbol{w}_i, \sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^t - \mu_i^t - \frac{1}{T}r_i^t\eta - r_i^t\nu^t + \frac{\kappa_i^t}{2} - \frac{\theta_i^t}{2}\right)\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t)\right\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(c_i\lambda^t - \frac{\kappa_i^t}{2} - \frac{\theta_i^t}{2}\right)p_i^t + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{T} - \xi^t - \nu^t\right)q^t \\
&- \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^0\right)\sum_{t=1}^{T}\lambda^t + \sum_{t=1}^{T}\alpha^t\nu^t - \sum_{i=1}^{n}y_i^0\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{\kappa_i^t}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}y_i^0\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{\theta_i^t}{2}\right) + \beta\eta
\end{aligned}
$$

となる．まず，$\boldsymbol{w}$ に関しては凸二次関数なので，最適性の条件 $\nabla_{\boldsymbol{w}} L(\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\eta,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\theta}) = 0$ より，

$$
\boldsymbol{w}_i^* = \frac{n}{2\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(-\lambda^t + \mu_i^t + \frac{1}{T}r_i^t\eta + r_i^t\nu^t - \frac{\kappa_i^t}{2} + \frac{\theta_i^t}{2}\right)\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t) \tag{10}
$$

となる．次に，$\boldsymbol{p}$ の項に注目すると，

$$
-\inf_{p_i^t}\left\{\left(c_i\lambda^t - \frac{\kappa_i^t}{2} - \frac{\theta_i^t}{2}\right)p_i^t\right\} = \left\{\begin{array}{cl} 0 & (c_i\lambda^t = \kappa_i^t/2 + \theta_i^t/2) \\ +\infty & (c_i\lambda^t \neq \kappa_i^t/2 + \theta_i^t/2) \end{array}\right.
$$

であるが，ここでは目的関数を最小化したいので，

$$
c_i\lambda^t = \frac{\kappa_i^t}{2} + \frac{\theta_i^t}{2}, \qquad i = 1,\ldots,n,\ \ t = 1,\ldots,T \tag{11}
$$

とならなければならない．同様に，$\boldsymbol{q}$ の項に注目すると，

$$
\frac{1}{T} = \xi^t + \nu^t, \qquad t = 1,\ldots,T \tag{12}
$$

とならなければならない．式 (10)-(12) より，双対問題 (9) の目的関数 $\omega(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu},\eta)$ は，

$$
\begin{aligned}
&\omega(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu},\eta) \\
&= \frac{\tau}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i^*\|^2 - \sum_{i=1}^{n}y_i^0\left(\sum_{t=1}^{T}\theta_i^t\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}(1+c_i)\,y_i^0\right)\sum_{t=1}^{T}\lambda^t - \sum_{t=1}^{T}\alpha^t\nu^t - \beta\eta
\end{aligned}
$$

とかける．また，式 (11) を用いて式 (10) の $\boldsymbol{\kappa}$ を消去すると，

$$
\boldsymbol{w}_i^* = \frac{n}{2\tau}\sum_{t=1}^{T}\left(\mu_i^t + \theta_i^t - (1+c_i)\lambda^t + r_i^t\nu^t + \frac{1}{T}r_i^t\eta\right)\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}_i^t) \tag{13}
$$

と表せる．このとき，目的関数の中の項 $\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i^*\|^2$ は，

$$\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{w}_i^*\|^2=\frac{n}{2\tau}\boldsymbol{z}^\top Q\boldsymbol{z},\qquad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mu}_n\\ \boldsymbol{\theta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\theta}_n\\ \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\nu}\\ \eta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2nT+2T+1}$$

とかける．ただし，$\boldsymbol{\mu}_i=(\mu_i^1,\ldots,\mu_i^T)^\top,\boldsymbol{\theta}_i=(\theta_i^1,\ldots,\theta_i^T)^\top$ であり，行列 Q は以下のように定義される半正定値対称行列である．

$$Q=\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c|c}
H_1 & & & H_1 & & & -M_1 & H_1R_1 & \boldsymbol{s}_1\\
 & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & H_n & & & H_n & -M_n & H_nR_n & \boldsymbol{s}_n\\ \hline
H_1 & & & H_1 & & & -M_1 & H_1R_1 & \boldsymbol{s}_1\\
 & \ddots & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & H_n & & & H_n & -M_n & H_nR_n & \boldsymbol{s}_n\\ \hline
-M_1 & \cdots & -M_n & -M_1 & \cdots & -M_n & B & -\sum_{i=1}^n M_iR_i & -\boldsymbol{d}\\ \hline
R_1H_1 & \cdots & R_nH_n & R_1H_1 & \cdots & R_nH_n & -\sum_{i=1}^n R_iM_i & H_0 & \boldsymbol{h}\\ \hline
\boldsymbol{s}_1^\top & \cdots & \boldsymbol{s}_n^\top & \boldsymbol{s}_1^\top & \cdots & \boldsymbol{s}_n^\top & -\boldsymbol{d}^\top & \boldsymbol{h}^\top & a
\end{array}\right]$$

ここで，

$$(H_i)_{kl}=\frac{n}{2\tau}\langle\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^k),\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^l)\rangle,\quad M_i=(1+c_i)H_i,\quad R_i=\mathrm{diag}(r_i^1,\cdots,r_i^T),$$
$$\boldsymbol{r}_i=(r_i^1,\ldots,r_i^T)^\top,\quad \boldsymbol{s}_i=\frac{1}{T}H_i\boldsymbol{r}_i,\quad \boldsymbol{h}=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^n R_iH_i\boldsymbol{r}_i,\quad a=\frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{r}_i^\top H_i\boldsymbol{r}_i,$$
$$H_0=\sum_{i=1}^n R_iH_iR_i,\quad B=\sum_{i=1}^n(1+c_i)^2H_i,\quad \boldsymbol{d}=\sum_{i=1}^n(1+c_i)\boldsymbol{s}_i$$

である．以上より，双対問題 (9) は具体的に以下のようにかける．

$$\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu},\eta} & \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^\top Q\boldsymbol{z}-\sum_{i=1}^n y_i^0\left(\sum_{t=1}^T\theta_i^t\right)+\left(\sum_{i=1}^n(1+c_i)\,y_i^0\right)\sum_{t=1}^T\lambda^t-\sum_{t=1}^T\alpha^t\nu^t-\beta\eta\\
\text{s.t.} & \boldsymbol{\mu}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\theta}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda}\geq\boldsymbol{0},\ \eta\geq 0,\\
 & 0\leq\nu^t\leq\frac{1}{T},\quad t=1,\ldots,T\\
 & \frac{\theta_i^t}{2}-c_i\lambda^t\leq 0,\quad i=1,\ldots,n,\quad t=1,\cdots,T
\end{array}\tag{14}$$

以上のようにして，資産配分問題 (8) は，決定変数 $2nT+2T+1$ 個で制約条件が $3nT+3T+1$ 個の凸 2 次計画問題に帰着できる．

双対問題 (14) の解を $(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}, \hat{\eta})$ とすると，主問題の解は，式 (3),(13) より，

$$\begin{aligned} g_i(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{y}^0) &= \langle \boldsymbol{w}_i^*, \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i) \rangle \\ &= \frac{n}{2\tau} \sum_{t=1}^{T} \left(\hat{\mu}_i^t + \hat{\theta}_i^t - (1+c_i)\hat{\lambda}^t + r_i^t \hat{\nu}^t + \frac{1}{T} r_i^t \hat{\eta} \right) \langle \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i), \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t) \rangle \end{aligned} \tag{15}$$

となる．取引前の資産配分 $\boldsymbol{y}^0$ の情報は，双対問題の解 $(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}, \hat{\eta})$ に含まれることになる．

このように資産配分問題 (8) の解が求まるのだが，数値計算上の問題点はまだ残っており，それは以下の 2 箇所である．

- 行列 Q の中の行列 H_i を計算するための $\langle \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^k), \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^l) \rangle$
- 式 (15) の $\langle \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{X}_i), \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x}_i^t) \rangle$

この 2 箇所はどちらも $\boldsymbol{\phi}_i$ どうしの内積である．この内積を陽に計算しない方法として，カーネルトリック [1, 9] とよばれる方法がある．その方法は，$\boldsymbol{\phi}_i$ の写像計算と $\boldsymbol{\phi}_i$ どうしの内積計算をまとめて，

$$K_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{v}) \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$$

とおき，$\boldsymbol{\phi}_i$ を定義せずに K_i を直接定義する，という方法である．ただし，K_i は任意に決められるわけではなく，上の式を満たすような $\boldsymbol{\phi}_i$ が存在するように決めなければならない．この条件を満たす関数はカーネル関数とよばれており，カーネル関数としては以下のガウスカーネル（パラメータ σ）がよく知られている．

$$K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2}{\sigma^2} \right)$$

主問題の解 (15) は，内積の部分をカーネル関数 $K_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ で置き換えると，

$$g_i(\boldsymbol{X}_i; \boldsymbol{y}^0) = \frac{n}{2\tau} \sum_{t=1}^{T} \left(\hat{\mu}_i^t + \hat{\theta}_i^t - (1+c_i)\hat{\lambda}^t + r_i^t \hat{\nu}^t + \frac{1}{T} r_i^t \hat{\eta} \right) K_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{x}_i^t) \tag{16}$$

となる．

3.2 節でも述べたように，式 (16) で与えられる資産配分関数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{y}^0)$ に対して，過去のデータと一致しない $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\boldsymbol{X}}$ を入力した資産配分 $\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}^0)$ は，資産配分問題 (2) の制約条件を満たしていない可能性がある．特に，以下の 2 つの制約

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i^0 &= \sum_{i=1}^{n} y_i^1 + \sum_{i=1}^{n} c_i \left| y_i^1 - y_i^0 \right| \\ y_i^1 &\geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

は取引の制度上の制約であるため，満たされなければならない．そこで，上の 2 つの制約を満たさないときには，次のように適宜資産配分を調整する．まず，$y_i^1 < 0$ となっている場合には，$\tilde{y}_i = 0$ とし，$y_i^1 \geq 0$ のときは $\tilde{y}_i = y_i^1$ とする．こうすることによって，必ず $\tilde{y}_i \geq 0$ は満たされる．この $\tilde{\boldsymbol{y}}$ に対して，$\sum_{i=1}^n y_i^0 \neq \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n c_i \left| \tilde{y}_i - y_i^0 \right|$ となっている場合には，資産配分の各資産への投資割合を保ちつつ，等号 $=$ が成り立つように調整する．そのためには，実際の資産配分 $\boldsymbol{y}$ を以下のように定めればよい．

$$\boldsymbol{y} = \frac{\sum_{i \in I_1} (1+c_i) y_i^0 + \sum_{i \in I_2} (1-c_i) y_i^0}{\sum_{i \in I_1} (1+c_i) \tilde{y}_i + \sum_{i \in I_2} (1-c_i) \tilde{y}_i} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ここで，$I_1 = \{i | \tilde{y}_i \geq y_i^0\}$，$I_2 = \{i | \tilde{y}_i < y_i^0\}$ である．以上のように調整された $\boldsymbol{y}$ は，取引の制度上の制約を満たすことがわかる．

4　数値実験

本節では，取引コストが存在する市場を想定して，実データによるシミュレーションを行う．本実験では，取引コストを考慮した提案手法による運用（以下では提案運用）と，取引コストを考慮しないが実際には取引コストがかかる既存手法による運用（以下では既存運用）とを比較する．

本実験は，CPU が Intel Core 2 Duo，3.2 GHz，メモリが 3.2 GB，OS が fedora 7.0 の計算機上で，Matlab 7.4 を用いて行った．凸 2 次計画問題 (14) は，IBM ILOG Optimization のソルバー cplex [3] を用いて解いた．

指標としてドル円相場の変動率を用い，投資対象資産として，ドル円相場の変動率と相関があると思われる企業の株を用いる．ただし一企業の株価は，その企業特有の出来事に影響を受けるため，その影響を緩和するために，いくつかの同業の企業の株をまとめて一つの資産とする．また，1 週間を 1 期間とし，その 1 週間の終値をその期間終了時の株価とする．以下では，資産配分問題に利用する過去のデータのことをトレーニングデータとよび，実際にシミュレーションを行うデータをテストデータとよぶ．

本実験では資産を 2 つとし，資産 S_1 を自動車会社株（トヨタ株，日産株，ホンダ株に等配分に投資したもの）とし，資産 S_2 を電力会社株（東京電力株，関西電力株，中部電力株に等配分に投資したもの）とした．また，時刻 t におけるドル円相場 d^t を用いて，ドル円相場の変動率 s^t を

$$s^t = \frac{d^t - d^{t-1}}{d^{t-1}} + 1$$

と定義し，時刻 t における指標 x_i^t $(i = 1, 2)$ として，過去 4 週間分のドル円相場の変動率

$$x_i^t = (s^{t-3}, s^{t-2}, s^{t-1}, s^t), \qquad i = 1, 2$$

を用いた．これらの実データは，Yahoo!ファイナンスの株価・為替時系列データ [6] から集めた．

本実験では，パラメータを以下のように設定した．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^0 &= (50, 50) \\ \alpha^t &= \sum_{i=1}^{n} y_i^0, \qquad t = 1, \ldots, T \\ \tau &= 10^{-6} \end{aligned}$$

取引コストは取引量に対して線形にかかるものとし，取引コスト係数 $\boldsymbol{c}$ は 3 通りに変化させる．取引コストの基準を $\boldsymbol{c} = (0.002, 0.002)$ とし，それより大きいものとして $\boldsymbol{c} = (0.004, 0.004)$，小さいものとして $\boldsymbol{c} = (0, 0)$ を考えた．また，期待価値の下限 β は，資産配分 $\boldsymbol{y}^0$ のまま取引を行わない場合の期間終了後の期待価値に 0.1 パーセントをプラスしたものに設定した．期待値を計算するためにトレーニングデータの資産の収益率 r_i^t を用いると，β は以下のように与えられている．

$$\beta = 1.001 \times \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^t y_i^0 \right)$$

なお，期待値の下限 β が大きすぎると，凸 2 次計画問題 (8) の双対問題 (14) が非有界になることがあるため，非有界にならないように調整を行った．

また，資産 S_i のカーネル関数 K_i として以下のガウスカーネルを用い，パラメータ σ_i は，トレーニングデータの指標のノルム $\|\boldsymbol{x}_i^t\|$ の標準偏差とした．つまり，以下のようにした．

$$\begin{aligned} K_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2}{\sigma_i^2} \right), \qquad i = 1, 2 \\ \sigma_i &= \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\|\boldsymbol{x}_i^t\| - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \|\boldsymbol{x}_i^t\| \right)^2}, \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

本実験では，トレーニングデータを過去 5 年間，テストデータを 2005 年〜2010 年の 6 年間とした．つまり，2005 年の第 1 期のトレーニングデータは 2000 年第 1 期〜20004 年最終期とし，次の第 2 期のトレーニングデータは 2000 年第 2 期〜2005 年第 1 期，といったようにトレーニングデータを更新した．図 4 は，2000 年から 2010 年までの自動車会社株 S_1 の価値と電力会社株 S_2 の価値，そしてそれらの平均価値の変動をグラフにしたものである．ただしこの図では，すべての資産の初期価値を 1 としている．

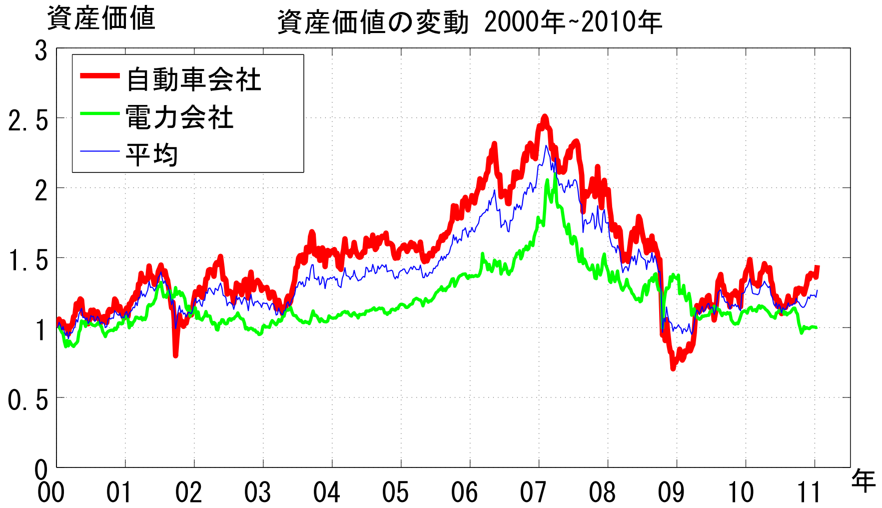


図 4: 資産 S_1, S_2 の価値の変動

また，次の図 5 は，指標となる 2000 年から 2010 年までのドル/円の為替レートの変動をグラフにしたものである．この図において，初期為替レートを 1 としており，上にいくほど円安，下に行くほど円高であることを表している．

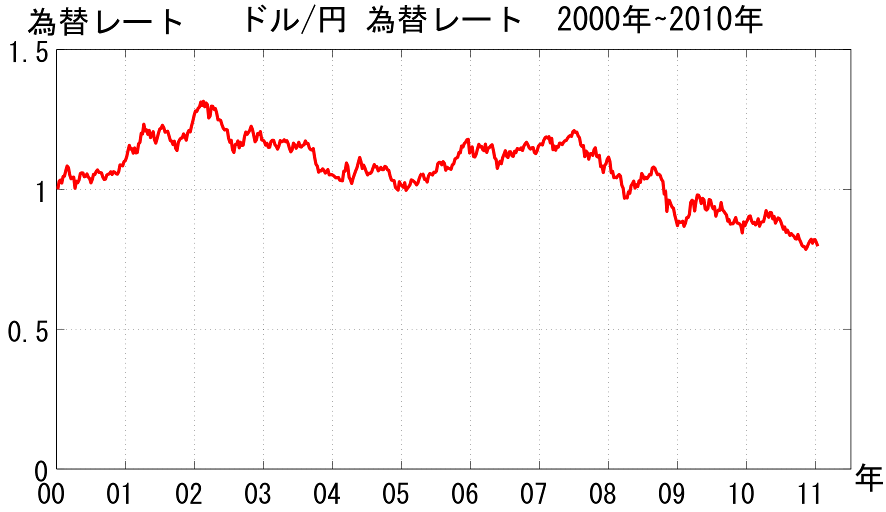
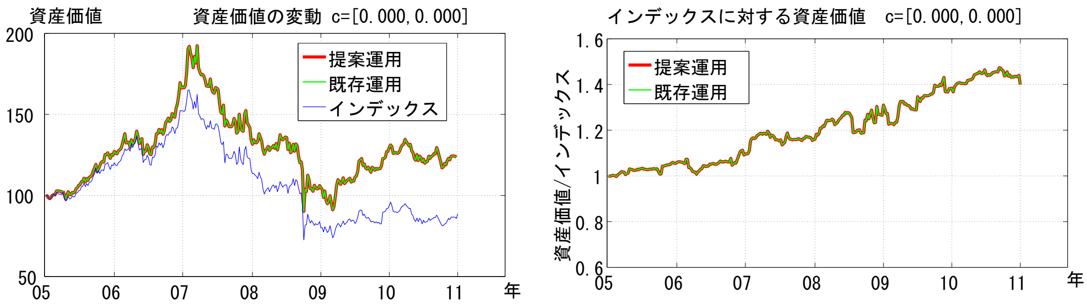


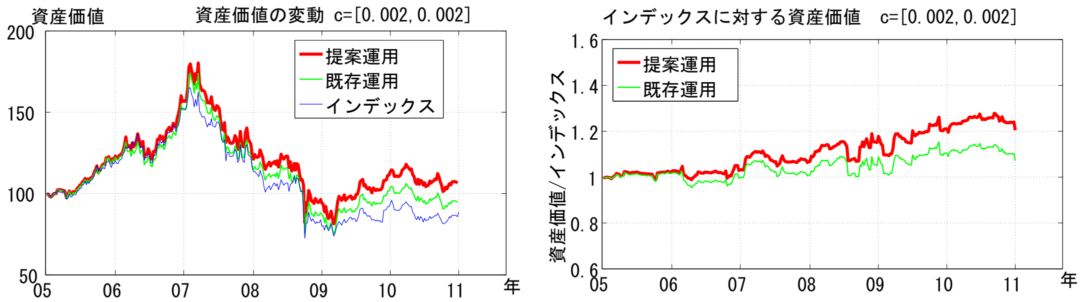
図 5: ドル/円の為替レートの変動

本実験では，取引コスト係数 $\boldsymbol{c}$ を 3 通りに変化させて，シミュレーションを行った．図 6 は $\boldsymbol{c} = (0, 0)$ にした場合，図 7 は $\boldsymbol{c} = (0.002, 0.002)$ にした場合，図 8 は $\boldsymbol{c} = (0.004, 0.004)$ にした場合の結果である．ここで，図 6(a),7(a),8(a) は，3 通りの $\boldsymbol{c}$ に対して，提案運用と既存運用とインデックスの資産価値の変動をグラフにしたものである．また，図 6(b),7(b),8(b) は，3 通りの $\boldsymbol{c}$ に対して，提案運用, 既存運用の資産価値をその時刻のインデックスで割ったものの変動をグラフにしたものである．



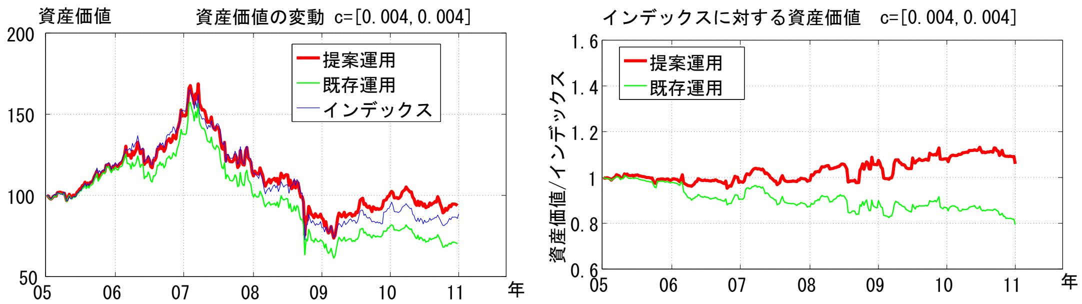
(a) 提案運用, 既存運用, インデックスの資産価値の変動 (b) インデックスに対する提案運用, 既存運用の資産価値の変動

図 6: $\boldsymbol{c} = (0, 0)$ の場合



(a) 提案運用, 既存運用, インデックスの資産価値の変動 (b) インデックスに対する提案運用, 既存運用の資産価値の変動

図 7: $\boldsymbol{c} = (0.002, 0.002)$ の場合



(a) 提案運用, 既存運用, インデックスの資産価値の変動 (b) インデックスに対する提案運用, 既存運用の資産価値の変動

図 8: $\boldsymbol{c} = (0.004, 0.004)$ の場合

全期間を通して提案運用, 既存運用でかかった取引コストの累計はそれぞれ，$\boldsymbol{c} = (0, 0)$ のとき (提案運用の取引コスト, 既存運用の取引コスト) $= (0, 0)$，$\boldsymbol{c} = (0.002, 0.002)$ のとき $(27, 30)$，$\boldsymbol{c} = (0.004, 0.004)$ のとき $(45, 55)$ であった（小数点以下四捨五入）．

図 6 では，取引コストが存在しないため，提案運用と既存運用は常に等しい資産価値になっており，また，収益の面ではインデックスを上回っていることがわかる．しかし，取引コストが存在する場合の

図 7(a),8(a) では，提案運用, 既存運用ともに，取引コストがかからない場合に比べて収益が落ちている．しかし，提案運用は既存運用に比べ，取引コストを考慮することによって頻繁な取引を避けるため，収益への影響は小さい．一方，既存運用は取引コストを考慮せずに資産配分を決定するため，取引コストが多くかかってしまい，収益が落ちていることがわかる．特に，インデックスが下落する 2007,2008 年には，取引コスト分を資産価値の上昇で補えないため，提案運用と既存運用との差が顕著になる．

図 7(b) をみると，インデックスが順調に上昇する 2005 年では，インデックスに対する資産価値は提案運用, 既存運用ともにほぼ一定で 1 であり，インデックスと同等の収益をあげている．それに対し，インデックスが下落する 2007,2008 年では，どちらの運用もインデックスに対する資産価値は少しずつ上昇している．これは，どちらの運用も，2007,2008 年に比較的下落幅が小さい電力会社株を多く保有する傾向があったからである．図 5 によると，2007,2008 年と同じく円高傾向である時期は 2002,2003 年である．この期間では，電力会社株は自動車会社株に比べて資産価値の下落幅が小さい（図 4）．このことを学習したため，提案運用, 既存運用ともに，2007,2008 年における資産価値の下落を抑えられたと考えられる．

次の図 9 は，3 通りの取引コスト係数 $\boldsymbol{c}$ に対して，既存運用の資産価値に対する提案運用の資産価値の変動をグラフにしたものである．また，その次の図 10 は，3 通りの取引コスト係数 $\boldsymbol{c}$ に対して，既存運用の累計の取引コストから提案運用の累計の取引コストを引いたものの変動を表したものである．

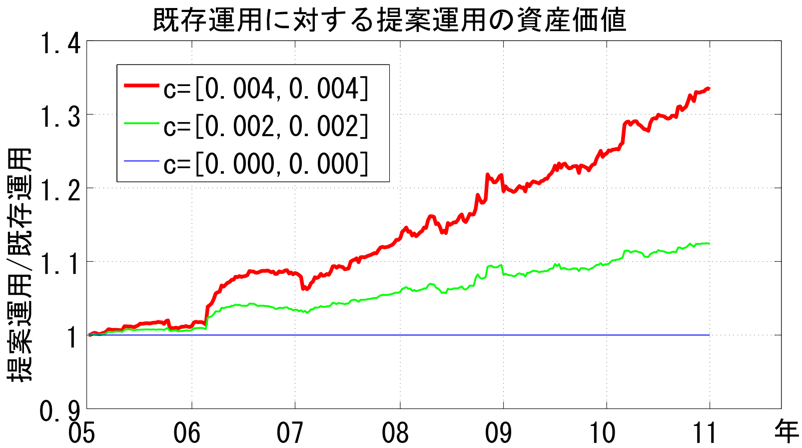


図 9: 既存運用の資産価値に対する提案運用の資産価値の変動

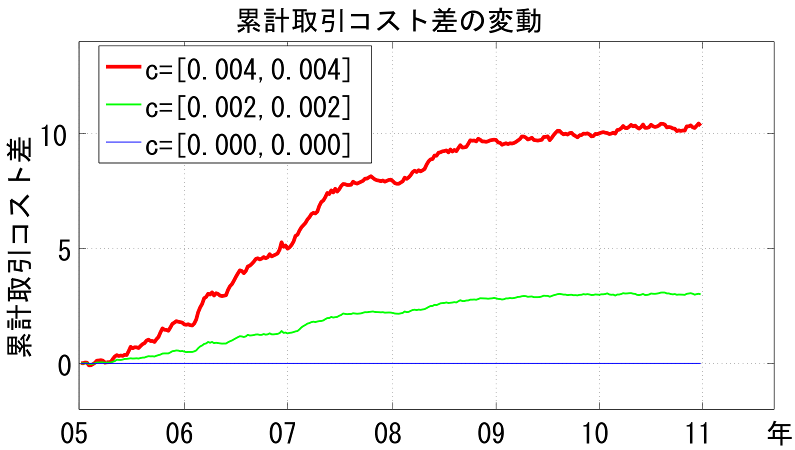


図 10: 提案運用と既存運用との累計取引コスト差の変動

図 9 より，取引コストが大きいときほど，既存運用の資産価値に対する提案運用の資産価値は上昇していることがわかる．また図 10 では，取引コストが存在するときには，提案運用と既存運用の累計コスト差はしだいに大きくなっている．さらに，取引コスト係数が大きいときほど，累計取引コスト差が大きくなっている．これは，提案運用は取引コストを考慮して資産配分を決定するのに対し，既存運用は取引コストを全く考慮せずに資産配分を決定し，頻繁に取引を行うためである．

また，図 10 によると，累計取引コスト差はほぼ一定の割合で増えている．一方，図 9 によると，資産価値比が増減する割合は時期によって一定ではない．これは，インデックスが順調に上昇する 2005 年では，既存運用においても，かかった取引コストの分を収益で補うことができるため資産価値比はほぼ一定で 1 であるが，2006 年以降では収益で補えないことが多いため，取引コストの考慮の有無の違いが影響したと考えられる．

5 まとめと今後の課題

本報告書では，吉田と山下が提案した資産配分関数による資産配分決定に，取引コストの考慮を加えた手法を提案した．まず，手数料を考慮した資産配分関数に対する最適化問題を定式化し，最終的に凸 2 次計画問題を解くことにより資産配分関数が求まることを示した．数値実験では，取引コストを考慮した運用と，取引コストを考慮しないが実際には取引コストがかかる運用とを比較した．その結果，取引コストを考慮した提案手法では，頻繁な取引を抑えられることがわかった．インデックスが上昇しているときには，考慮の有無による違いは大きくないが，インデックスが下落しているときには，提案手法による運用のほうが，資産価値の下落を大きく抑えられることがわかった．

今後の課題として，安全資産を加えること，そして適切な指標とパラメータを見つけることがあげられる．本報告書では，安全資産を加えない 2 つの資産の場合の数値実験を示したが，この設定では，2 つの資産の価値がともに下落するときには提案手法による運用の資産価値も必ず下落してしまう．実際，数値実験によると，提案手法による運用とインデックスでは収益は提案手法による運用のほうがよかったが，収益率の下半絶対偏差はほとんど変わらなかった．ここに安全資産を加えることで，資産価値の下落を多少なりとも防ぐことができ，リスクも抑えられると考えられる．一方，安全資産を加えて数値実験を行うと，今回の実験データにおいては，安全資産にほぼすべてを配分してしまい，状況に応じた適切な配分ができなかった．これは，ドル円の為替レートが指標として適していなかったためだと考えられる．そのため，安全資産を含めても適切な運用ができるような指標やパラメータをみつけることが今後の課題となる．

謝辞

日頃から御教授下さり，本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘と適切な御指導を賜った山下信雄准教授に深く感謝の意を表します．また, 日頃よりお世話になっている福嶋雅夫教授, 林俊介助教ならびに福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] 赤穂昭太郎, カーネル多変量解析 —非線形データ解析の新しい展開—, 岩波書店, 2008.

[2] H.Markowitz, Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 7, pp. 77-91, 1952.

[3] IBM ILOG CPLEX, http://www-06.ibm.com/software/jp/websphere/ilog/optimization/core-products-technologies/cplex/ .

[4] 今野浩, 理財工学 I —平均・分散モデルとその拡張—, 日科技連出版社, 2004.

[5] 今野浩, 下方リスクモデルによるポートフォリオ最適化, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 46, pp. 635-639, 2001.

[6] Yahoo!ファイナンス, http://finance.yahoo.co.jp/ .

[7] 山西健司, 情報論的学習理論, 共立出版, 2010.

[8] 吉田雅基, 山下信雄, カーネル法を用いた資産配分関数の構築, Technical Report 2009-013, 数理工学専攻, 京都大学, 2009.

[9] Y.Takano and J.Gotoh, A nonlinear control policy using kernel method for dynamic allocation, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 54, No. 4, pp. 201-218, 2011.