特別研究報告書

リスク尺度にCVaRを用いる
ロバストポートフォリオ最適化

指導教員　　福島雅夫　教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成20年4月入学
平成24年3月卒業

梅田　零

平成24年1月31日提出

摘要

インターネットの普及により, オンライン株投資などが身近なものになりつつある. 投資を行う際に複数の銘柄に分散して投資を行うことによってリスクを軽減できることが知られており, その資産分配のことをポートフォリオと呼ぶ. また, 投資家にとって最適なポートフォリオを求める問題をポートフォリオ最適化問題と呼ぶ. Markowitz の平均・分散モデルに代表されるようにリスク, リターンの二つの尺度を用いた数理モデルがよく用いられる. 分散以外にもさまざまなものがリスク尺度として提唱されており, その一つにバリュー・アット・リスク (Value-at-Risk, VaR) や条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional Value-at-Risk, CVaR) がある. VaR とはある確率水準で発生する最大損失であり, CVaR とは VaR を超えて発生する損失の期待値として定義される. CVaR はコヒーレント性というリスク尺度として好ましい性質をもち, CVaR をリスク尺度として用いるポートフォリオ最適化問題は線形計画問題の枠組みで実現できることから近年注目を集めている. リスク尺度として CVaR を用いるには収益率の分布を定めなければならないが, 現実には収益率に関する情報が完全にわかることは少ないので, 投資家は不完全な情報のもとで投資を行う必要がある. そこで, 本報告書では不確実で不完全な情報のもとでロバスト最適化の考え方を用いるポートフォリオ最適化のアプローチを提案する. 通常のロバスト最適化においてはデータの値そのものがある不確実性集合に含まれると仮定することが多いが, ここではデータの値はある確率分布に従い, その確率分布のパラメータが不確実性集合に含まれると仮定して, ロバスト最適化モデルを構築する. さらに, 株式の実際のデータを用いて数値実験を行い, その結果をもとに投資比率と不確実性集合を構成する要素との関係に対する仮説の検証を行う.

目次

1　序論

投資を行う際, 投資家はリターンを追い求めるだけでなくそれに伴うリスクを定量的に管理する必要がある. 一般的に複数の銘柄に投資を行うことによってリスクを軽減することができるため, 投資家は分散投資を行う. 投資家にとって最適な資産分配（ポートフォリオ）を決定する問題をポートフォリオ最適化問題といい, それを解くために様々な数理モデルが提案されている. 経済学の理論では不確実性のもとでの意思決定を分析する際, 投資家はリスク回避的な効用関数を持ち, この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定する期待効用最大化原理に基づく考え方が一般的である. しかし個々の投資家の効用関数を特定するのは困難であるため, 期待効用最大化原理を実務に応用するのは難しい [11]. これに対して Markowitz [3] はリターン（収益の期待値）とリスク（収益の分散）という二つの尺度を用いて, 投資家が最低限要求するリターン以上のもとで収益の分散を最小化する平均・分散モデルを提唱した. この考え方は個々の効用関数を特定する必要がないことや, 平均・分散モデルは凸 2 次計画問題として定式化できることから実務・理論的に発展を遂げた. 収益の分散以外にも下方半分散, 絶対偏差, 下方部分積率など様々なものがリスク尺度として提案されており [7], その中の一つにバリュー・アット・リスク (Value-at-Risk, VaR) が挙げられる [10]. VaR とはあるポートフォリオの損失が α 以下である確率が β （$\beta = 0.95, 0.99$ などがよく用いられる）以上となるときの最小の α として定義される.VaR は実務でも標準的に用いられるリスク尺度となっているが, 劣加法性と呼ばれる性質を満たさないという問題点が指摘されており [4], それらの問題点を解消するものとして条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional-Value-at-Risk, CVaR) がリスク尺度として提唱された [11]. CVaR は期待ショートフォール (Expected Shortfall) と呼ばれることもある. CVaR はあるポートフォリオの損失が VaR を上回る場合の損失の期待値として定義され, 劣加法性を満たしていることから VaR よりも理論的に優れたリスク尺度と言える. さらに CVaR をリスク尺度に用いるポートフォリオ最適化問題は, 適当な仮定の下で線形計画問題の枠組みで実現できることから計算機上で実装を簡単に行うことができる.

しかし, リスク尺度として CVaR を用いるには各銘柄の収益率の分布を定義しなければならない. 現実には, 収益率に関する情報が完全にわかることは少ないので, 投資家は不完全な情報のもとで投資を行う必要がある. そこで, 本報告書では不確実で不完全な情報のもとでロバスト最適化の考え方を用いるポートフォリオ最適化のアプローチを提案する. 通常のロバスト最適化においてはデータの値そのものがある不確実性集合に含まれると仮定することが多い. しかし, ここでは収益率が多変量対数正規分布を用いて表されるとし, その確率密度関数のパラメータが不確実性集合に含まれる場合を考えることにより, ロバスト最適化の考え方に基づくポートフォリオ最適化の新しいモデルを提案する.

本報告書の構成を以下に記す. まず第 2 節で VaR と CVaR の定義を述べ,VaR と CVaR の理論的な性質を比較し, ロバスト最適化の定義を述べる. 第 3 節ではリスク尺度として CVaR を用いるロバストポートフォリオ最適化問題を定式化する. 第 4 節では収益率が従う確率分布のパラメータに対してロバスト最適化の考え方を適用し, リスク尺度として CVaR を用いるロバストポートフォリオ最適化モデルを提案する. 第 5 節で数値実験を行い, その結果を報告する.

2　VaR と CVaR

2.1　定義

この節では VaR と CVaR の定義を示し（Rockafellar と Uryasev [5]）,VaR と CVaR についての比較を行う.

投資対象の銘柄を $i = 1, \cdots, n$ とし, 銘柄 i に対する投資比率を x_i, 銘柄 i の収益率を y_i とする. ここで, y_i は確率変数であり, 以下では $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ と表す.（太字はベクトルを表す.）損失関数を $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とし, 確率変数 $\mathbf{y}$ は連続的な確率密度関数 $p(\mathbf{y})$ に従うと仮定する (一般には $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ が用いられる). そのとき, 損失が α 以下となる確率は

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \alpha} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

で与えられる. $\mathbf{x}$ を任意に固定したとき, $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ は α の関数として非減少であり, 一般に右連続である. 本報告書では簡単のため $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ は α に関して連続であると仮定する. VaR はあるポートフォリオの損失が α 以下である確率が β 以上になるような最小の α, すなわち

$$\mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min\{\alpha \mid \Psi(\mathbf{x},\alpha) \geq \beta\}$$

で定義される. 以下では $\mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})$ をしばしば $\alpha_\beta(\mathbf{x})$ と表す. 上の仮定より $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ は α に関して連続であるため, $\alpha_\beta(\mathbf{x})$ は $\Psi(\mathbf{x},\alpha)=\beta$ を満たす α の中で最小のものとなる.

一方, CVaR はポートフォリオの損失が VaR を上回る場合の損失の期待値であり,

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})} p(\mathbf{y})d\mathbf{y}}$$

で定義される.$\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ の α に関する連続性の仮定より, $\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})} p(\mathbf{y})d\mathbf{y} = 1-\beta$ となるため, CVaR は

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta}\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

と書くことができる. これを確率水準 β のもとでの CVaR という.

関数 $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ を次式で定義する.

$$F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^m} [f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha]^+ p(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{1}$$

ただし, $[t]^+ = \max\{t,0\}$ である.

以下では $\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x})$ をしばしば $\phi_\beta(\mathbf{x})$ と書く. 定義より, CVaR は VaR を上回る場合の損失の期待値であるから, 明らかに不等式

$$\alpha_\beta(\mathbf{x}) \leq \phi_\beta(\mathbf{x})$$

が成立する. また, 以下の定理が成り立つ

定理 2.1　任意に固定した $\mathbf{x}$ に対して, $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ は α の関数として凸かつ連続的微分可能であり, $\phi_\beta(\mathbf{x})$ は $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ を α に関して最小化することにより与えられる. つまり,

$$\phi_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha\in R} F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$$

である.

証明 Shapiro と Wardi[8] によると, 固定した $\mathbf{x}$ に対して $G(\alpha)=\int_{\mathbf{y}\in R^m}[f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha]^+p(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ と定めると G は凸で微分可能であり $G'(\alpha)=\Psi(\mathbf{x},\alpha)-1$ が成り立つ. この性質より式 (1) の $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ は α に関して凸かつ微分可能であり,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F_\beta(\mathbf{x},\alpha)=(1-\beta)^{-1}[\Psi(\mathbf{x},\alpha)-\beta]$$

が成立する. これより, $F_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ の最小値を与える α は $\Psi(\mathbf{x},\alpha)=\beta$ を満たす α となる. よって,

$$\min_{\alpha\in R}F_\beta(\mathbf{x},\alpha)=F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x}))=\alpha_\beta(\mathbf{x})+\frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^m}[f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha_\beta(\mathbf{x})]^+p(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

となり, 右辺の積分は

$$\begin{aligned}&\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha_\beta(\mathbf{x}))p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\\&=\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y}-\alpha_{\beta(\mathbf{x})}\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}p(\mathbf{y})d\mathbf{y}\end{aligned}$$

と変形できる. さらに右辺の第 1 項は定義より $(1-\beta)\phi_\beta(\mathbf{x})$ であり, 第 2 項は $\alpha_\beta(\mathbf{x})(1-\beta)$ となるため,

$$\min_{\alpha\in R}F_\beta(\mathbf{x},\alpha)=\alpha_\beta(\mathbf{x})+(1-\beta)^{-1}((1-\beta)\phi_\beta(\mathbf{x})-\alpha_\beta(\mathbf{x})(1-\beta))=\phi_\beta(\mathbf{x})$$

となる. □

2.2 VaR の問題点

X_1,X_2 を確率変数とし, あるリスク尺度を $\rho(\cdot)$ とする. Artzner ら [4] によるとリスク尺度が満たすべき望ましい性質として以下の四つがあげられる.

- 単調性 (monotonicity): $X_1\leq X_2$ ならば $\rho(X_1)\leq\rho(X_2)$
- 劣加法性 (subadditivity): $\rho(X_1+X_2)\leq\rho(X_1)+\rho(X_2)$
- 正斉次性 (positive homogeneity): 任意の $\lambda>0$ に対して $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$
- 平行移動不変性 (translation invariance): 任意の c に対して $\rho(X+c)=\rho(X)+c$

これらの条件を満たすリスク尺度はコヒーレントなリスク尺度 (Coherent measure of risk) と呼ばれる. VaR はリスク尺度として, 劣加法性を満たさない. VaR が劣加法性を満たさない例を表 1 に挙げ

る [4]. 表 1 において, A,B はポートフォリオを表し, 80 や -20 などの数字は収益を表すものとする. $\beta = 0.99$ とすると, $\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}) = 30$, $\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{B}) = 30$, $\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 120$ で, $\mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) > \mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{A}) + \mathrm{VaR}_{0.99}(\mathrm{B})$ となるため劣加法性を満たさない. つまり,VaR はコヒーレント性を有さないことがわかる.

状態	確率	A	B	A+B
1	98.0%	80	80	160
2	0.9%	-20	-100	-120
3	0.2%	-30	-30	-60
4	0.9%	-100	-20	-120

表 1　VaR が劣加法性を満たさない例

2.3　CVaR のコヒーレント性

この節では CVaR が 2.2 節で述べたコヒーレント性を持つことを確かめる.

定理 2.2　X と Y を連続な分布関数を持つ確率変数とするとき, 任意の $\beta \in (0,1)$ に対して確率水準 β での CVaR, すなわち ϕ_β は以下の劣加法性を満たす.

$$\phi_\beta(X+Y) \le \phi_\beta(X) + \phi_\beta(Y)$$

証明 $Z = X + Y$ とする. 損失額 X の β 分位点を x_β, Y の β 分位点を y_β, Z の β 分位点を z_β とすると, $\phi_\beta(X), \phi_\beta(Y), \phi_\beta(Z)$ は次のように書ける [4].

$$\phi_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} E[X \mathbf{1}_{X \ge x_\beta}]$$

$$\phi_\beta(Y) = \frac{1}{1-\beta} E[Y \mathbf{1}_{Y \ge y_\beta}]$$

$$\phi_\beta(Z) = \frac{1}{1-\beta} E[Z \mathbf{1}_{Z \ge z_\beta}]$$

ここで, $\mathbf{1}_A$ は A が真のときに 1 を, 偽のときに 0 となる関数である. また,

$$\mathbf{1}_{X \ge x_\beta} - \mathbf{1}_{Z \ge z_\beta} \ge 0 \quad \text{if} \quad X \ge x_\beta$$

$$\mathbf{1}_{X \ge x_\beta} - \mathbf{1}_{Z \ge z_\beta} \le 0 \quad \text{if} \quad X \le x_\beta$$

という関係が成立するので,

$$(\mathbf{1}_{X \geq x_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta})(X - x_\beta) \geq 0$$

$$(\mathbf{1}_{Y \geq y_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta})(Y - y_\beta) \geq 0$$

である. これより,

$$\begin{aligned}
&(1-\beta)(\phi_\beta(X) + \phi_\beta(Y) - \phi_\beta(Z)) \\
&= E[X\mathbf{1}_{X \geq x_\beta} + Y\mathbf{1}_{Y \geq y_\beta} - Z\mathbf{1}_{Z \geq z_\beta}] \\
&= E[X(\mathbf{1}_{X \geq x_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta}) + Y(\mathbf{1}_{Y \geq y_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta})] \\
&\geq x_\beta E[\mathbf{1}_{X \geq x_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta}] + y_\beta E[\mathbf{1}_{y \geq y_\beta} - \mathbf{1}_{Z \geq z_\beta}] \\
&= x_\beta\{(1-\beta) - (1-\beta)\} + y_\beta\{(1-\beta) - (1-\beta)\} = 0
\end{aligned}$$

が成立する. したがって $\phi_\beta(Z) \leq \phi_\beta(X) + \phi_\beta(Y)$ である. □

CVaR がリスク尺度として単調性, 正斉次性, 平行移動不変性を満たすのは明らかであるから, CVaR はコヒーレントなリスク尺度である.

2.4 ロバスト最適化

ロバスト最適化とは, 問題を定義するデータが不正確あるいは不確定な場合にも, 信頼できる結果を与えるような最適化問題のモデリング技法およびその解法を指す（Ben-Tal と Nemirovski [1]). 最適化の結果が外部の擾乱について非常に不安定で, 全く信頼できないケースが存在することが, ロバスト最適化の必要性が叫ばれる背景となっている. 通常のロバスト最適化では, 問題を定義するデータが存在すると考えられる集合 (不確実性集合と呼ばれる) を仮定して, その中における最悪のケースの最適化という形で定式化する.

リスク尺度として CVaR を用いてロバスト最適化を考える場合, データそのものの不確実性集合ではなく, データを確率変数と考えた時, それが従う確率分布の不確実性集合 P を仮定して, その中における最悪の場合を想定した最適化という形で定式化する.

定義 2.1　確率分布の集合 P に対して, 固定された $\mathbf{x} \in X$ での最悪の CVaR (Worst-case CVaR, WCVaR) を以下で定義する.

$$\mathrm{WCVaR}_\beta(\mathbf{x}) \equiv \sup_{p(\cdot) \in P} \mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x})$$

3　リスク尺度に CVaR を用いるロバスト最適化問題

3.1　混合分布

確率変数 $\mathbf{y}$ の分布が連続で, ある範囲に制限される場合を考える. 具体的には, 確率密度関数 $p(\cdot)$ は不確実性集合と呼ばれる確率密度関数の集合 P に属する, すなわち,

$$p(\cdot) \in P \tag{2}$$

とする. しかし, 集合 P が無限個の確率密度関数を含むときは取り扱いが難しいので, P から選ばれた有限個の確率密度関数 $p^i(\cdot), i = 1, \cdots, l$ の凸 1 次結合 P_M で近似することを考える. すなわち,

$$P_M \equiv \{\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p^i(\cdot) : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, l\} \tag{3}$$

である. 以下ではしばしば P_M を確率分布の不確実性集合と呼び, P_M に属する確率分布を $p^i(\cdot), i = 1, \cdots, l$ の混合分布という. また, 集合 Λ と関数 $F^i_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ を次式で定義する.

$$\Lambda \equiv \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l) : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, l\}$$

$$F^i_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \equiv \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^n} [f(x, y) - \alpha]^+ p^i(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, i = 1, \cdots, l$$

定理 1.1 より, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1　　任意の $\mathbf{x}$ と β に対して, 確率分布の不確実性集合 P_M に関する $\mathrm{WCVaR}_\beta(\mathbf{x})$ は次式で与えられる.

$$\mathrm{WCVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha \in R} \max_{i \in L} F^i_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$$

ただし, $L \equiv \{1, 2, \cdots, l\}$ とする.

ここで $F^L_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ を

$$F^L_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \equiv \max_{i \in L} F^i_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$$

で定義すると, 定理 2.1 より次の補題が得られる.

補題 3.1　任意の β に対して次式が成立する.

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \mathrm{WCVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min_{(\mathbf{x},\alpha)\in X\times R} F_\beta^L(\mathbf{x},\alpha)$$

3.2　定式化

この節では混合分布を用いて WCVaR 最小化問題を定式化する. 補題 3.1 と $F_\beta^L(\mathbf{x},\alpha)$ の定義より, WCVaR 最小化問題は次の問題に書き換えることができる.

$$\begin{array}{ll} \min_{(\mathbf{x},\alpha,\theta)\in X\times R\times R} & \theta \\ \text{s.t.} & \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^m} [f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha]^+ p^i(\mathbf{y})d\mathbf{y} \le \theta,\ i=1,\cdots,l \end{array}$$

この問題の制約条件に含まれる微分不可能な多変数関数の積分は計算が難しいため, モンテカルロシュミレーションを用いて近似を行う. 各 $i=1,\cdots,l$ に対して, $\mathbf{y}_{[k]}^i$ を k 番目のサンプルとし, S^i をサンプル数とすれば, 上に示した WCVaR 最小化問題は以下のように近似できる.

$$\begin{array}{ll} \min_{(\mathbf{x},\alpha,\theta)\in X\times R\times R} & \theta \\ \text{s.t.} & \alpha + \frac{1}{S^i(1-\beta)}\sum_{k=1}^{S^i} [f(\mathbf{x},\mathbf{y}_{[k]}^i)-\alpha]^+ \le \theta,\ i=1,\cdots,l \end{array}$$

補助変数 $\mathbf{u}=(\mathbf{u}^1;\cdots;\mathbf{u}^l)\in R^n, n=\sum_{i=1}^l S_i$ を用いると, WCVaR 最小化問題は以下のようになる.

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & x\in X \\ & \alpha + \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{S^i}\sum_{k=1}^{S^i} u_k^i \le \theta,\ i=1,\cdots,l \\ & u_k^i \ge f(\mathbf{x},\mathbf{y}_{[k]}^i)-\alpha,\ k=1,\cdots,S^i, i=1,\cdots,l \\ & u_k^i \ge 0,\ k=1,\cdots,S^i, i=1,\cdots,l \end{array}$$

特に, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が $\mathbf{x}$ に関して線形で, X が凸多面体ならば, この問題は線形計画問題である.

4　リスク尺度に CVaR を用いるロバストポートフォリオ最適化

4.1　株の収益率と対数正規分布

この節では収益率と対数正規分布の関係について説明する. 一般に, 株の収益率は以下で定義される.

$$\text{株の収益率} = \frac{\text{当期の株価} - \text{前期の株価}}{\text{前期の株価}}$$

ツヴィ・ボディ, アレックス・ケイン, アラン・J・マーカス [9, pp.191-194] では, 個別の株式の収益率は正規分布に従うという仮定が用いられている. しかしながら, 株価が負の値をとらないことを考えると, 正規分布は収益率を表す分布となりえない. なぜならば, 負の値も含む正規分布はどのような値も取りうることを許すも

のだからである. 特に,-1 よりも小さい収益率は負の株価の可能性を意味するので, 現実にはありえない. 正規分布はこのような可能性も許すので, 収益率の分布としては適切とはいえない.

そこで, 連続複利率が正規分布に従うという仮定を考える. 連続複利率とは, ある期間での収益率を無限に小さい期間での複利であらわしたもので, 連続複利率を r, 収益率を r_e とすると, $r = \log(1 + r_e)$ であり, $\exp(r) > 0$ であるから, r_e の取りうる値の最小値は -1 となる. この仮定は, 負の価格の可能性を排除するので, 正規分布を適用できるという利点をもつことになる. この前提のもとで, $1 + r_e$ の分布は対数正規分布となる. よって, 株の収益率は対数正規分布を用いて近似できる.

対数正規分布の確率密度関数は次式であらわされる.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

ただし, パラメータ μ と σ は正規分布に変換したときの平均と分散であって, 対数正規分布の平均, 分散ではない. 株価は互いに相関があるので, ポートフォリオの収益率は多変量対数正規分布にしたがう. より一般的に, m 変量対数正規分布の確率密度関数は次式であらわされる.

$$p(\mathbf{y}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^m \frac{1}{|\Sigma|} \frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_m} \exp(-\frac{1}{2}(\log \mathbf{y} - \mu)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} (\log \mathbf{y} - \mu))$$

ただし, $\log \mathbf{y} = (\log y_1, \cdots, \log y_m)^{\mathrm{T}}$ であり, パラメータ $\mu \in R^m$ と $\Sigma \in R^{m \times m}$ は多変量正規分布に変換したときの平均と分散・共分散行列である.

4.2　パラメータ μ と Σ の不確実性

この節では, 前節で紹介した多変量対数正規分布のパラメータ μ,Σ の不確実性について考える. μ の各要素はポートフォリオの収益率の対数の平均を表し, その期間の景気や, そのポートフォリオの業績によって値は変動しやすい. 一方, Σ の各要素はポートフォリオの対数の分散・共分散を表し, 十分長い期間においてその値はあまり変動しないと考えられる. このことから, 以下では Σ は固定し, μ はある不確実性集合 C の任意の値をとり得る. 2.4 節で述べたように, リスク尺度として CVaR を用いてロバスト最適化を考える場合, 確率分布

の集合 P を仮定して, その中における最悪の確率分布を想定した最適化という形で定式化する. しかし, 確率密度関数の形が定まっているとき, パラメータが決まれば確率密度関数が決まるので, 本報告書ではパラメータ μ の不確実性集合 $C(r)$ における最悪のケースの最適化という形でリスク尺度として CVaR を用いてロバスト最適化を考える. ここで, r は不確実性集合の大きさを表すパラメータである.

4.3　パラメータ μ の不確実性集合

竹村, 谷口 [8, pp.32-36] に示された方法を参考にしてパラメータ μ の不確実性集合を以下のように構成する. まず, 過去の収益率のデータ全体から平均ベクトルを計算し, それを μ_{center} とする. 次に収益率のデータを T 個の期間に分け, それぞれの期間で平均ベクトル $\mu^1, \cdots, \mu^T$ を計算する. 各区間のデータ数が等しければ, $\mu_{center} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mu^t$ が成り立つので, μ_{center} は T 個のベクトルの重心となるが, データの分布は μ_{center} の周りで比較的密になり, μ_{center} から離れるにつれて疎になると考えられる. さらに, データが楕円状に分布することも多い. このような場合, 散布図に楕円を当てはめることが考えられる. これが集中楕円の概念であり, 集中楕円は平均ベクトルの分散・共分散行列 S を用いて次の方程式で定義される.

$$(\mu - \mu_{center})^{\mathrm{T}} S^{-1} (\mu - \mu_{center}) = r^2 \tag{4}$$

ここで $r > 0$ は楕円の大きさを表し, r の値を変えることによって μ_{center} を中心とする同心楕円の族ができる. 以下では, この楕円をパラメータ μ の不確実性集合 $C(r)$ とする.

4.4　モデルの定式化

この節では, 次式であらわされる WCVaR 最小化問題を解くことを考える.

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \mathrm{WCVaR}_{\beta}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in X} \sup_{p(\cdot)\in P} \mathrm{CVaR}_{\beta}(\mathbf{x})$$

ただし, X は投資比率の集合, P はパラメータ $(\mu \in C, \Sigma)$ の多変量対数正規分布の集合とする.

まず, μ の不確実性集合 $C(r)$ から第 3.1 節の混合分布を考える. ロバスト最適化は不確実性集合から想定される最悪の場合の最適化という形で定式化されるので, 集中楕円 $C(r)$ から無限個の点を取り, 式 (2) の不確実

性集合 P を作ればよいと考えられるが, ここでは簡単のため集中楕円と軸との交点と中心の点を選ぶこととし, それらを $\mu_i, i=1,\cdots,l$ とする. そしてパラメータ μ_i を持つ確率密度関数を $p^i(\cdot)$ として式 (3) から混合分布を作る. ポートフォリオが m 個の株式からなるとすると, 集中楕円の次元は m であり, 上述の方法で得られる点の数 l は $l=2m+1$ となる. いま, $p^i(\mathbf{y}), i=1,\cdots,l$ はパラメータ (μ_i,Σ) の m 変量対数正規分布の確率密度関数となるので,

$$p^i(\mathbf{y}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^m \frac{1}{|\Sigma|} \frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_m} \exp(-\frac{1}{2}(\log \mathbf{y} - \mu_i)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} (\log \mathbf{y} - \mu_i))$$

と書ける. 各 $i=1,\cdots,l$ に対して, 確率密度関数 $p^i(\cdot)$ を用いてモンテカルロシミュレーションを行ってサンプル $\mathbf{y}^i_{[k]}, k=1,\cdots,S^i$ を生成し, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}^i_{[k]}) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^i_{[k]}$ とすることにより, WCVaR 最小化問題は以下のように定式化される.

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \\ & \alpha + \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{S^i}\sum_{k=1}^{S^i} u^i_k \le \theta,\ i=1,\cdots,l \\ & u^i_k \ge -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^i_{[k]} - \alpha,\ k=1,\cdots,S^i, i=1,\cdots,l \\ & u^i_k \ge 0,\ k=1,\cdots,S^i, i=1,\cdots,l \end{array}$$

5　数値実験

この節では第 4 節で提案したモデルの有用性を確認するため数値実験を行う. 線形計画問題を解く際は Matlab の optimiztion toolbox が提供する linprog 関数を使用した. 第 4 節のモデルにおいて確率水準 $\beta = 0.99$ のもとで CVaR を考え, 三つの銘柄についてのポートフォリオを構築する. そのとき $m=3,\ \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} \in R^3$ であり, $X=\{\mathbf{x}\in R^3 | x_1+x_2+x_3=1,\ x_1,x_2,x_3 \ge 0\}$ となる. 4.5 節より, 集中楕円の次元 m と不確実性集合 $C(r)$ から取る点の数 l の関係は $l=2m+1$ となるので, いまの場合 $l=7$ となる. モンテカルロシミュレーションによるサンプル数を $S^i=4000, i=1,\cdots,7$ とする. 以下に数値実験の手順を示す.

- 過去のデータから分散・共分散行列 Σ と式 (4) の μ_{center} と S を定める.
- 大きさ r を定める.

- 不確実性集合 $C(r)$ から $\mu_i, = 1, \cdots, 7$ を選ぶ.
- 各 $\mu_i, i = 1, \cdots, 7$ に対して, パラメータ (μ_i, Σ) の 3 変量対数正規分布に従うモンテカルロシュミレーションのサンプル $\mathbf{y}^i_{[k]}, k = 1, \cdots, 4000$ を生成する.
- 以下の問題を解く.

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & \alpha + \frac{1}{1-0.99}\frac{1}{4000}\sum_{k=1}^{4000} u^i_k \leq \theta,\ i = 1, \cdots, 7 \\ & u^i_k \geq -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^i_{[k]} - \alpha,\ k = 1, \cdots, 4000, i = 1, \cdots, 7 \\ & u^i_k \geq 0,\ k = 1, \cdots, 4000, i = 1, \cdots, 7 \end{array}$$

以下では 2006 年から 2010 年までのトヨタ自動車, 丸紅, 野村ホールディングスの実際の株価データを用いて実験を行う. 以降ではトヨタ自動車を株式 A, 丸紅を株式 B, 野村ホールディングスを株式 C とする. 2006 年から 2010 年までの株式 A, 株式 B, 株式 C の連続複利率の平均は表 2 のようになる. また, 連続複利率の分

表 2　連続複利率の平均

銘柄	連続複利率の平均
株式 A	0.002588675
株式 B	0.000477945
株式 C	0.006046415

散・共分散行列は表 3 のようになる. 各年ごとの連続複利率の平均は表 4 のようになる. 表 2 と表 4 の分散・

表 3　連続複利率の分散・共分散行列

	株式 A	株式 B	株式 C
株式 A	0.002308732	0.001720457	0.001741415
株式 B	0.001720457	0.003987745	0.00241946
株式 C	0.001741415	0.00241946	0.004607697

共分散行列 S から不確実性集合 $C(r)$ を作り, その大きさ r を変え, 不確実性集合 $C(r)$ の取りうる範囲が変化したときに, ロバスト最適化モデルから得られるポートフォリオがどのように変化するかを考察する. 4.4 節で

表 4　各年ごとの連続複利率の平均

	株式 A	株式 B	株式 C
2006	-0.005311089	0.001542907	0.000488414
2007	0.005230447	-0.006659508	0.003530539
2008	0.014399919	0.017666839	0.018699048
2009	-0.004727987	-0.00749924	0.001646234
2010	0.003823477	-0.001526867	0.006584478

述べた集中楕円の分散・共分散行列 S の逆行列 S^{-1} は

$$S^{-1} = 1.0 \times 10^5 \begin{pmatrix} 2.9785 & 0.7603 & -4.0348 \\ 0.7603 & 0.6183 & -1.5458 \\ -4.0348 & -1.5458 & 6.2775 \end{pmatrix}$$

となる. r の大きさを変えて, $r = 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ の五つの場合に対して比較を行う.

5.1　実験結果・考察

表 5　不確実性集合の大きさと投資比率の関係

	x_1	x_2	x_3
r=2.5	0.8110	0.0000	0.1839
r=2.0	0.7026	0.0604	0.2370
r=1.5	0.7949	0.0642	0.1408
r=1.0	0.8202	0.0663	0.1135
r=0.5	0.7690	0.0345	0.1965

行列 S^{-1} の i 行 j 列目の要素を $S^{-1}(i,j)$ と記す. 表 5 を見ると株式 A の投資比率は r の大きさを変えても常に他の二つの株式に比べ大きい. これは表 3 より他の二つの株式に比べ分散が小さく, 他の株式との間の共分散も小さいためと考えられる. しかし, 株式 B は株式 C に比べ分散が小さいにもかかわらず投資比率が株式 C よりも小さい. これはパラメータ μ の不確実性集合の楕円の形が関係していると考えられる. いま, 不確実性集合 $C(r)$ は式 (4) で与えられ, $S^{-1}(3,3)$ は $S^{-1}(2,2)$ の 10 倍以上なので, r の値が増加しても株式 C の投資比率の取りうるパラメータの範囲は株式 B の投資比率の取りうるパラメータの範囲に比べて小さい. 以上のことから株式 B は株式 C に比べ分散が小さいにもかかわらず投資比率が株式 C よりも小さくなったと考え

られる. この仮説を検証するため, S^{-1} を以下のように定め同様の実験を行った.

$$S^{-1} = 1.0 \times 10^5 \begin{pmatrix} 2.9785 & -4.0348 & 0.7603 \\ -4.0348 & 6.2775 & -1.5458 \\ 0.7603 & -1.5458 & 0.6183 \end{pmatrix}$$

その結果, 表 6 より $r = 2.5, 2.0, 1.5$ ときには仮説通りの結果になったが, $r = 1.0, 0.5$ のときには株式 B の投

表 6　不確実性集合の大きさと投資比率の関係 2

	x_1	x_2	x_3
r=2.5	0.8637	0.0989	0.0374
r=2.0	0.7172	0.1538	0.1290
r=1.5	0.7192	0.1880	0.0928
r=1.0	0.8152	0.0897	0.0951
r=0.5	0.7708	0.0550	0.1742

資比率よりも株式 C の投資比率のほうが大きくなった. この原因としては不確実性集合が小さいときには, 過去の連続複利率の平均を含まなくなるので, その結果, 過去のデータをまったく考慮しないか, あるいは一部しか考慮しない結果が出たためと考えられる.

6　結論

本報告書ではリスク尺度に CVaR を用いるロバスト最適化モデルを提案し, そのモデルを線形計画問題として定式化した. また, 2006 年から 2010 年の実際のデータに対して提案したモデルを解くことによってポートフォリオを計算し, 結果をもとに仮説を立てその考察を行った.

モンテカルロシュミレーションのサンプル数を増やし, より正確な実験を行うこと, 固定したパラメータ Σ, パラメータの不確実性集合 $C(r)$ とポートフォリオの関係をより詳しく検証するのが今後の課題である.

謝辞

日頃からご教授くださり, 本報告書の作成にあたっても細部に至るまで熱心なご指導を賜った福島雅夫教授に心より感謝いたします. また日頃からお世話になり, 本研究に対しても適切な助言をしていただいた山下信雄准教授や林俊介助教をはじめ福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust Optimization - Methodology and Applications, Mathematical. Programming, Vol.92, pp. 453-480, 2002.

[2] A. Shapiro and Y. Wardi, Nondifferentiability of The Steady-State Function in Discrete Event Dynamic Systems , IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, pp.1707-1711, 1994.

[3] H. Markowitz, Portfolio Seletion, The Journal of Finance, Vol7 pp.77-91, 1952.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath, Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, Vol.9, pp.203-228, 1999.

[5] R.T. Rockafellar and S. Uryasev, Optimization of Conditional Value-at-Risk , J. Risk, Vol.2, pp.21-41, 2000.

[6] S. Zhu and M. Fukushima, Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management, Operations Research, Vol.57, pp.1155-1168, 2009.

[7] 今野浩, 理財工学 1, 日科技連出版社, 1995.

[8] 竹村彰通, 谷口正信, 統計学の基礎 1, 岩波書店, 2003.

[9] ツヴィ・ボディ, アレックス・ケイン, アラン・J・マーカス, 証券投資 (上), 東洋経済新報社, 2003.

[10] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.

[11] 山井康浩, 吉羽要直, バリューアット・リスクと期待ショートフォールの比較分析, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.45, pp.99-101, 2001.