混合型二次錐相補性問題に対する
平滑化と正則化を用いたアルゴリズム

岩崎 一真

摘要

二次錐相補性問題とは, 与えられた関数に対して二次錐制約上の相補性条件といくつかの等式制約を満たすようなベクトルを見つける問題である. 二次錐相補性問題は, 線形計画問題や二次錐計画問題といった問題を含む広いクラスの問題であるばかりでなく, ロバスト Nash 均衡問題やロバスト Wardrop 均衡問題など実用的な問題に対しても定式化能力を有することから, これまで盛んに研究がなされてきた. その解法として, 非平滑ニュートン法や, 平滑化ニュートン法などが提案されているが, 本論文では, 林らによって提案された平滑化と正則化を組み合わせた手法に焦点を絞る. この手法では, 二次錐相補性問題を等価な無制約最小化問題に再定式化し, その目的関数を平滑化パラメータを用いて微分可能になるように近似しながら, それと同時に, 正則化パラメータを調整することによって生成される点列の有界性を保証している. しかしながら, その手法は “相補性条件と独立な等式制約を含まない” 二次錐相補性問題のみを対象としており, 実用上十分であるとは言い難かった. 実際, ロバスト Nash 均衡問題やロバスト Wardrop 均衡問題といった多くの応用問題は, 相補性条件と独立な等式制約の含まれた “混合型の” 二次錐相補性問題に帰着されることが知られている. そこで, 本報告書では, 二次錐相補性問題と変分不等式問題の等価性に注目し, 林らのアルゴリズムを混合型の二次錐計画問題に対して拡張することを考える. さらに, 本報告書で拡張したアルゴリズムを混合型二次錐相補性問題に対して適用し, その有効性を検証する.

目 次

1　序論

二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem: SOCCP) とは, 以下の形で表わされるような問題である.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{such that} \quad & x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ x^\top y = 0,\ F(x, y, z) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

ただし, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ は与えられた連続的微分可能な関数であり, $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^n$ は n_i 次元の二次錐

$$\mathcal{K}^{n_i} := \{(\zeta_1, \zeta_2^\top)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i - 1} | \|\zeta_2\|_2 \leq \zeta_1\}$$

を用いて, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ で表わされる閉凸錐である. ただし, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ である.

SOCCP は, 非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem: NCP) や, 二次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming problem: SOCP) といった問題を含む広いクラスの問題である. たとえば, $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 1$ かつ, $F(x, y, z) = f(x) - y$ としたとき, SOCCP (1.1) は

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \text{such that} \quad & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^\top y = 0,\ y = f(x) \end{aligned}$$

となり, これは NCP にほかならない. また, SOCP は一般に

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(p) \\ \text{subject to} \quad & g(p) \in \mathcal{K},\ h(p) = 0 \end{aligned}$$

という形で与えられ, その Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は,

$$\begin{aligned} & y \in \mathcal{K},\ g(p) \in \mathcal{K},\ g(p)^\top y = 0 \\ & \nabla f(p) - \nabla g(p) y - \nabla h(p) \lambda = 0,\ h(p) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

と書くことができるが, ここで,

$$\begin{aligned} z &:= (p, \lambda), \\ F(x, y, z) &:= \begin{pmatrix} \nabla f(p) - \nabla g(p) y - \nabla h(p) \lambda \\ g(p) - x \\ h(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおけば, KKT 条件 (1.2) は SOCCP (1.1) として表すことができる.

SOCCP に対しては, これまで盛んに研究がなされてきた. たとえば, アフィン関数を含む SOCP に対しては, 線形計画問題 (Linear Programming problem: LP) に対する主双対内点法 [8, 9, 11] を拡張することができ, 理論的にも実用的にも高性能であることが知られている. 実際に主双対内点法を組み込んだソフトウェアパッケージとして SeDuMi, SDPT3, SDPA などが知られており, 多くの応用分野においてこれらのソフトウェアが用いられている．一方, ロバストナッシュ均衡問題 [1, 6, 10] やロバスト Wardrop 均衡問題 [7] などのように, 単独の SOCP として表すことはできないが, SOCCP として表すことができるような応用問題も多くある．こういった問題に対しては, SOCCP を等価なベクトル方程式や最適化問題に定式化して解く手法が一般的である．SOCCP を等価なベクトル方程式に再定式化したとき, その方程式に現れる関数は微分不可能となることが知られているが, 平滑化ニュートン法 [4] は, この微分不可能な関数を微分可能な関数としてパラメータ近似しながらニュートン法を適用していったものである．一方, 非平滑ニュートン法 [2] という手法も提案されており, こちらは微分不可能な関数に対して, ヤコビ行列の代わりに一般化ヤコビ行列を代用したものである．最近, 林ら [5] は, 平滑化のみならず正則化の技法も組み合わせたニュートン法を提案し, 単調性の仮定の下で, そのアルゴリズムに対する大域的最適性と局所的な二次収束性を証明した．しかし, 彼らのアルゴリズムは SOCCP (1.1) において $F(x,y,z) = f(x) - y$ としたもの, すなわち,

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ &\text{such that} \quad x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ x^\top y = 0,\ y = f(x) \end{aligned}$$

という形の問題のみを対象としたものであった．

一方, 本論文では, 以下のような等式制約も含む混合型の SOCCP に対して, [5] のアルゴリズムを拡張することを考える．

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ &\text{such that} \quad x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ x^\top y = 0,\ y = g(x,z),\ h(x,z) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

このような SOCCP を混合型二次錐相補性問題 (Mixed Second-Order Cone Complementarity Problem: MSOCCP) という．ここで, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は与えられた連続的微分可能な関数である．実際, ロバストナッシュ均衡問題や多くの SOCP の KKT 条件は (1.3) の形をした SOCCP と等価になっていることが知られている．

本報告書の構成は次の通りである．2 節では, 二次錐に対するスペクトル分解や MSOCCP に対するメリット関数など, アルゴリズムを構築するのに必要な準備事項について述べる．3 節では平滑化, 正則化について述べる．4 節では, 具体的に平滑化と正則化を用いたアルゴリズムを構築する．5 節ではいくつかの問題に対して数値実験を行い, アルゴリズムの有効性を検証する．最後に 6 節で結論を述べる．

本論文中では特に断りのない限り, $\|\cdot\|$ は $\|\zeta\| := \sqrt{\zeta^\top \zeta}$ で定義される 2 ノルムを表す．また, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2^\top)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対して, $(\zeta_1, \zeta_2^\top)^\top$ の代わりにしばしば (ζ_1, ζ_2) と表記する．

2 準備

本節では, MSOCCP (1.3) に対するアルゴリズムを構築するために必要な準備を行う．

2.1 二次錐相補性問題と変分不等式問題

まず, 二次錐相補性問題と変分不等式問題の関係について述べる．変分不等式問題 (Variational Inequality Problem: VIP)[3] とは, 以下の形式で表される問題のことである．

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & w \in S \\ \text{such that} \quad & \langle F(w), w' - w \rangle \geq 0 \quad (\forall w' \in S) \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで, $S \subseteq \mathbb{R}^\ell$ は空でない閉凸集合, $F : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ はベクトル値写像, $\langle \cdot \rangle$ は内積である．変分不等式問題は様々な問題を含む大変広いクラスの問題である．たとえば, $S = \mathbb{R}^\ell$ のとき, 変分不等式問題 (2.1) はベクトル方程式 $F(w) = 0$ にほかならない．一方, S が閉凸錐であるとき, 変分不等式問題 (2.1) は相補性問題と等価になることが知られている．

命題 2.1. $C \subseteq \mathbb{R}^\ell$ を与えられた任意の閉凸錐とする．このとき, 以下の変分不等式問題 $\mathrm{VI}(F, C)$ と, 相補性問題 $\mathrm{CP}(F, C)$ は等価である．

$$\begin{aligned} \mathrm{VI}(F, C) &: \text{Find } w \in C \text{ such that } \langle F(w), w' - w \rangle \geq 0 \text{ for all } w' \in C \\ \mathrm{CP}(F, C) &: \text{Find } w \in C \text{ such that } F(w)^\top w = 0,\ F(w) \in C^d \end{aligned}$$

ただし, $C^d := \{ w \in \mathbb{R}^\ell \,|\, w^\top v \geq 0,\ \forall v \in C \}$ は C の双対錐を表す．

証明. $\mathrm{VI}(F, C)$ の任意の解が $\mathrm{CP}(F, C)$ の解であり, かつ, $\mathrm{CP}(F, C)$ の任意の解が $\mathrm{VI}(F, C)$ の解であることを示せばよい．

i) まず, $\mathrm{CP}(F, C)$ の任意の解を w とする．このとき, $F(w)^\top w = 0,\ F(w) \in C^d,\ w \in C$ を満たす．ここで, $w' \in C$ を任意のベクトルとすると,

$$\begin{aligned} \langle F(w), w' - w \rangle &= F(w)^\top w' - F(w)^\top w \\ &= F(w)^\top w' \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

を得る．ここで, 最後の不等号は $F(w) \in C^d,\ w' \in C$ であることより従う．したがって, $\mathrm{CP}(F, C)$ の解 w は $\mathrm{VI}(F, C)$ の解である．

ii) 次に, $\mathrm{VI}(F, C)$ の任意の解を $w \in C$ とする．このとき, 任意の $w' \in C$ に対して

$$F(w)^\top (w' - w) \geq 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ．ここで, $w \in C$ であり C は錐であるので, $0 \in C,\ 2w \in C$ である．よって, $w' := 0,\ w' := 2w$ をそれぞれ (2.2) に代入すると, $-F(w)^\top w \geq 0$ および $F(w)^\top w \geq 0$, すなわち, $F(w)^\top w = 0$ を得る．よって, (2.2) より, 任意の $w' \in C$ に対して $F(w)^\top w' \geq F(w)^\top w = 0$ が成り立つことが言えるが, これは $F(w) \in C^d$ であることにほかならない．よって, $\mathrm{VI}(F, C)$ の解 w は $\mathrm{CP}(F, C)$ の解である．

i), ii) から, $\mathrm{VI}(F, C)$ と $\mathrm{CP}(F, C)$ は等価であることがいえる． □

さて, MSOCCP (1.3) に対して

$$w := (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ F(w) := \begin{pmatrix} g(x, z) \\ h(x, z) \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^m,\ C := \mathcal{K} \times \mathbb{R}^m$$

とおけば, $C^d = \mathcal{K} \times \{0\}^m$ であることから, MSOCCP (1.3) は $\mathrm{CP}(F, C)$ と等価であることが分かる．さらに, 命題 2.1 より, $\mathrm{CP}(F, C)$ と $\mathrm{VI}(F, C)$ は等価である．したがって, MSOCCP (1.3) は以下の変分不等式と等価である．

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & w = (x, z) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^m \\ \text{such that} & \langle F(w), w' - w \rangle \geq 0 \ (\forall w' \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^m) \end{array} \tag{2.3}$$

変分不等式問題の解の存在性を議論するためには, 関数の単調性, 強単調性が重要な役割を果たす.

定義 2.1. 写像 $F : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ が単調であるとは, 任意の $(w, v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ に対して,

$$\langle w - v, F(w) - F(v) \rangle \geq 0$$

が成立することである．また, 関数 F が強単調であるとは, ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $(w, v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ に対して,

$$\langle w - v, F(w) - F(v) \rangle \geq \varepsilon \|w - v\|^2$$

が成立することである.

次の命題は変分不等式問題の解が一意に存在するための十分条件を与えたものである．実際, MSOCCP (1.3) は変分不等式問題として表せるので, 本命題を適用することができる.

命題 2.2. [13, 定理 5.4] 写像 F が強単調であれば, 変分不等式問題 (2.3) は唯一の解をもつ.

2.2 スペクトル分解

本節では, 二次錐に対するジョルダン代数の中でもとくに重要なトピックであるスペクトル分解について述べる．さらに, このスペクトル分解を用いて, ベクトル $\xi \in \mathbb{R}^n$ の二次錐 $\mathcal{K}^n$ に対する射影を陽に記述することを考える.

ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geq 2)$ の二次錐 $\mathcal{K}^n$ に関するスペクトル分解は以下の式で定義される.

$$\xi = \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 \tag{2.4}$$

ただし, λ_1, λ_2 は

$$\lambda_i = \xi_1 + (-1)^i \|\xi_2\| \quad (i = 1, 2) \tag{2.5}$$

で表されるスペクトル値であり, u^1, u^2 は

$$u^i = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1, (-1)^i)\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, & (\xi_2 \neq 0) \\ \dfrac{1}{2}(1, (-1)^i)w, & (\xi_2 = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{2.6}$$

で表されるスペクトルベクトルである．ここで, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ は $\|w\| = 1$ を満たす任意のベクトルである．任意のベクトル $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ が常に成り立ち, さらに, $\lambda_1 \geq 0$ で

あれば, そのときに限り $\xi \in \mathcal{K}^n$ である．また, $\|u^i\| = 1/\sqrt{2}$ $(i = 1, 2)$ かつ, $(u^1)^\top u^2 = 0$ である．

さて, ベクトル $\xi \in \mathbb{R}^n$ の二次錐 $\mathcal{K}^n$ への射影

$$P_{\mathcal{K}^n}(\xi) := \arg\min_{\xi' \in \mathcal{K}^n} \|\xi' - \xi\|$$

を考える．一般に閉凸集合に対する射影は陽な形で表すことはできない．しかし, 二次錐に対する射影は, 上記のスペクトル分解を用いて陽に表すことができる．実際, $n = 1$ のときは, $P_{\mathcal{K}^1}(\xi) = \max\{0, \xi\}$ であり, $n \geq 2$ のときは ξ に対するスペクトル分解 (2.4) を用いて

$$P_{\mathcal{K}^n}(\xi) = \max\{0, \lambda_1\}u^1 + \max\{0, \lambda_2\}u^2$$

と書くことができる [4].

2.3　メリット関数

本研究では, MSOCCP (1.3) を以下の無制約最小化問題に再定式化して解くことを考える．

$$\text{Minimize} \ \ \Psi(x, y, z)$$

ここで, 関数 $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は以下の 2 つの条件を満たすものとする．

- 任意の $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ に対して $\Psi(x, y, z) \geq 0$ である．
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ が MSOCCP (1.3) の解ならば, そのときに限り, $\Psi(x, y, z) = 0$ である．

このような条件を満たす関数 Ψ を MSOCCP (1.3) のメリット関数という．このような関数を構築するために, 下記の条件を満たす $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を導入する．

$$\Phi(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathcal{K}, \ y \in \mathcal{K}, \ x^\top y = 0 \tag{2.7}$$

さらに, この関数を用いて, 関数 $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2n+m}$ を

$$H(x, y, z) := \begin{pmatrix} \Phi(x, y) \\ g(x, z) - y \\ h(x, z) \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき, 明らかに MSOCCP (1.3) とベクトル方程式 $H(x, y, z) = 0$ は等価である．したがって, 関数 $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を以下のように定義すると, メリット関数としての役割を果たしていることが分かる．

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) &:= \frac{1}{2}\|H(x, y, z)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\Phi(x, y)\|^2 + \frac{1}{2}\|g(x, z) - y\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x, z)\|^2 \end{aligned}$$

では, (2.7) を満たす関数 Φ をどのように考えればよいだろうか. 二次錐の直積 $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ 上での相補性条件は, それぞれの二次錐 $\mathcal{K}^{n_i}$ 上での相補性条件に等価に分割することができる.

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ x^\top y = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^i \in \mathcal{K}^{n_i},\ y^i \in \mathcal{K}^{n_i},\ (x^i)^\top y^i = 0\ (i = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

ここで, $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$, $y = (y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$ である. さらに, 以下で定義される残差関数 $\varphi^i_{\mathrm{NR}} : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ を導入する.

$$
\varphi^i_{\mathrm{NR}}(x^i, y^i) := x^i - P_{\mathcal{K}^{n_i}}(x^i - y^i) \tag{2.8}
$$

このとき,

$$
\varphi^i_{\mathrm{NR}}(x^i, y^i) = 0 \Longleftrightarrow x^i \in \mathcal{K}^{n_i},\ y^i \in \mathcal{K}^{n_i},\ (x^i)^\top y^i = 0
$$

が成り立つことが知られている [4]. したがって, 関数 $\Phi_{\mathrm{NR}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を以下の式で定義すれば, この関数が (2.7) を満たしていることが容易に確認できる.

$$
\Phi_{\mathrm{NR}}(x, y) := \begin{pmatrix} \varphi^1_{\mathrm{NR}}(x^1, y^1) \\ \vdots \\ \varphi^m_{\mathrm{NR}}(x^m, y^m) \end{pmatrix}
$$

さらに, 関数 H_{NR} を

$$
H_{\mathrm{NR}}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{NR}}(x, y) \\ g(x, z) - y \\ h(x, z) \end{pmatrix}
$$

で定義し, これを用いて, 関数 Ψ_{NR} を

$$
\begin{aligned}
\Psi_{\mathrm{NR}}(x, y, z) &:= \frac{1}{2}\|H_{\mathrm{NR}}(x, y, z)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\|\varphi^i_{\mathrm{NR}}(x^i, y^i)\|^2 + \frac{1}{2}\|g(x, z) - y\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x, z)\|^2
\end{aligned}
$$

で定義する. これ以降, 簡単のため, φ^i_{NR} の代わりに φ_{NR} を用いることとする.

3 平滑化と正則化

前節では, MSOCCP (1.3) に関するメリット関数 Ψ_{NR} を残差関数 φ_{NR} から構築した. このメリット関数を適当なアルゴリズムを用いて最小化することで, MSOCCP (1.3) が解ける. しかし, メリット関数 Ψ_{NR} に含まれる残差関数 φ_{NR} が微分不可能であるため, ニュートン法などのように勾配の情報を用いた降下法系のアルゴリズムを適用する際に様々な不都合が起こる. そこで, 平滑化法を用いて残差関数 φ_{NR} を微分可能な関数で近似することを考える.

また, 降下法の大域的収束性が保証されるためには, 目的関数であるメリット関数 Ψ_{NR} のレベル集合 $\mathcal{L}_\alpha := \{(x, y, z) | \Psi_{\mathrm{NR}}(x, y, z) \le \alpha\}$ が $\mathcal{L}_\alpha \neq \emptyset$ となるような任意の $\alpha \in \mathbb{R}$

に対して有界であることが非常に重要な役割を果たす．もし, MSOCCP (1.3) ににおいて関数

$$F(x,z) = \begin{pmatrix} g(x,z) \\ h(x,z) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

が強単調であれば, メリット関数 Ψ_{NR} のレベル集合が有界になることが知られている [12]. しかし, 強単調であるという仮定は実用上厳しい仮定である．そこで, 本論文では (3.1) で定義される関数 F に対して単調性のみを仮定し, その関数に正則化法を適用することにより, 強単調な関数に近似することを考える．なお, これらの平滑化法と正則化法を用いたアルゴリズムは次節で詳細に述べる.

本節以降, 表記上の簡単のため $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$ を仮定する．このとき, MSOCCP (1.3) は

$$\begin{array}{rl} \text{Find} & (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{such that} & x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n,\ x^\top y = 0,\ y = g(x,z),\ h(x,z) = 0 \end{array} \tag{3.2}$$

と書き換えることができる．この仮定の下では以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{NR}}(x,y) &= \varphi_{\mathrm{NR}}(x,y) \\ H_{\mathrm{NR}}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{NR}}(x,y) \\ g(x,z) - y \\ h(x,z) \end{pmatrix} \\ \Psi_{\mathrm{NR}}(x,y,z) &:= \frac{1}{2}\|H_{\mathrm{NR}}(x,y,z)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_{\mathrm{NR}}(x,y)\|^2 + \frac{1}{2}\|g(x,z) - y\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x,z)\|^2 \end{aligned}$$

なお, これ以降の議論は, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ の場合にも自然に拡張できる.

3.1 平滑化

本節では, 平滑化法についての説明を行い, それを残差関数 φ_{NR} およびメリット関数 Ψ_{NR} に適用する．微分不可能な関数 $h : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ に対して, パラメータ μ を用いた関数 $h_\mu : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ が下記の条件を満たすとする.

- 任意の $\mu > 0$ に対して h_μ は $\mathbb{R}^s$ 上で連続的微分可能である.
- 任意の $\zeta \in \mathbb{R}^s$ に対して $\lim_{h_\mu \downarrow 0}(\zeta) = h(\zeta)$ が成立する.

このような関数 h_μ を h の平滑化関数と呼ぶ．平滑化法は, 微分不可能な方程式 $h(x) = 0$ を直接解く代わりに, $\mu > 0$ を用いて平滑化した部分問題 $h_\mu(\zeta) = 0$ を, $\mu \downarrow 0$ としながら逐次的に解くことで最終的に $h(\zeta) = 0$ の解を得る方法である.

まず, 残差関数 φ_{NR} を平滑化することを考える．そのために, 下記の条件を満たす連続的微分可能な関数 $\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える.

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \hat{g}(\alpha) = 0,\ \lim_{\alpha \to \infty} (\hat{g}(\alpha) - \alpha) = 0,\ 0 < \hat{g}'(\alpha) < 1 \tag{3.3}$$

式 (3.3) を満たす関数 $\hat{g}$ の例としては, $\hat{g}_1(\alpha) = (\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha)/2$ や $\hat{g}_2(\alpha) = \ln(\exp(\alpha)+1)$ などがあげられる. この関数 $\hat{g}$ を用いて, $\mu > 0$ をパラメータとしてもつ関数 $P_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を以下の式で定義する.

$$P_\mu(\xi) := \mu\hat{g}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)u^1 + \mu\hat{g}\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)u^2$$

ここで, $\lambda_1,\ \lambda_2$ は $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対するスペクトル値 (2.5) であり, $u^1,\ u^2$ は $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対するスペクトルベクトル (2.6) である. このとき, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{\mu\downarrow 0}\mu\hat{g}(\lambda/\mu) = \max\{0,\lambda\}$ であり, $\gamma_\mu(\lambda) := \mu\hat{g}(\lambda/\mu)$ で定義される関数 $\gamma_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $\mu > 0$ に対して微分可能であることから, P_μ が射影関数 $P_{\mathcal{K}^n}$ の平滑化関数となっていることがわかる. したがって, φ_{NR} の定義 (2.8) より, 関数 φ_μ を以下の式で定義すると, この関数が φ_{NR} の平滑化関数となっていることが分かる.

$$\varphi_\mu(x,y) := x - P_\mu(x-y)$$

なお, [4, Proposition 5.1] より, ある正の数 ν が存在して,

$$\|\varphi_\mu(x,y) - \varphi_{\mathrm{NR}}(x,y)\| \le \nu\mu$$

が任意の $\mu > 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して成立することが知られている. さらに, 関数 φ_μ を用いて,

$$\Psi_\mu(x,y) := \frac{1}{2}\|\varphi_\mu(x,y)\|^2 + \frac{1}{2}\|g(x,z)-y\|^2 + \frac{1}{2}\|h(x,z)\|^2$$

とすれば, この関数 Ψ_μ はメリット関数 Ψ_{NR} の平滑化関数となる.

これ以降, 簡単のため $P_0(\xi) := P_{\mathcal{K}^n}(\xi),\ \varphi_0(x,y) := \varphi_{\mathrm{NR}}(x,y),\ \Psi_0(x,y) := \Psi_{\mathrm{NR}}(x,y)$ と定義する.

3.2 正則化

前節では, メリット関数 Ψ_{NR} に対する平滑化関数 Ψ_μ を定義した. この関数に対して降下法を適用することにより, Ψ_μ が最小となるような (x_μ, y_μ, z_μ) を得ることが期待できる. さらに, $\mu \to 0$ とすることにより, 点列 $\{(x_\mu, y_\mu, z_\mu)\}$ の集積点が MSOCCP (3.2) の解となることが期待できる. しかしながら, このようにして生成された点列が集積点を持つためには, Ψ_{NR} のレベル集合が有界であることが望ましい [4]. レベル集合が有界であるためには, (3.1) で定義される関数 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が強単調であれば十分である [12] が, 関数 F が強単調であるという条件は実用上厳しい条件である. したがって, 関数 F に単調性のみを仮定し, 正則化項を加えることにより強単調化することを考える. このような手法を正則化法という. 具体的に, 関数 $F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を正のパラメータ ε を用いて,

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x,z) &:= F(x,z) + \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_\varepsilon(x,z) \\ h_\varepsilon(x,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定義する．ただし,

$$g_\varepsilon(x,z) := g(x,z) + \varepsilon x,\ h_\varepsilon(x,z) := h(x,z) + \varepsilon z$$

である．さらに, 降下法における各反復で $\varepsilon \to 0$ としていくものとする．なお, 簡単のため, これらの関数を用いて新たに $H_{\mu,\varepsilon},\ \Psi_{\mu,\varepsilon}$ を定義する.

$$\begin{aligned} H_{\mu,\varepsilon}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} \varphi_\mu(x,y) \\ g_\varepsilon(x,z) - y \\ h_\varepsilon(x,z) \end{pmatrix} \\ \Psi_{\mu,\varepsilon}(x,y,z) &:= \frac{1}{2}\|H_{\mu,\varepsilon}(x,y,z)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_\mu(x,y)\|^2 + \frac{1}{2}\|g_\varepsilon(x,z) - y\|^2 + \frac{1}{2}\|h_\varepsilon(x,z)\|^2 \end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon > 0$ であれば, F_ε は強単調となり, 任意の $\mu \geq 0,\ \varepsilon > 0$ に対して $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ のレベル集合が有界となる.

4　アルゴリズム

本節では, MSOCCP (3.2) に対して, 平滑化と正則化を組み込んだアルゴリズムを構築する．まずはじめに, 枠組みとなるアルゴリズムを構築し, そのアルゴリズムに対して局所的に速い収束性が期待できるニュートン法を組み合わせることを考える.

前節までの議論で, (3.1) で定義される関数 F が単調であり, $\mu > 0$ かつ $\varepsilon > 0$ であれば, $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ は微分可能でレベル集合が有界であることがわかった．したがって, 適当な降下法を用いることによって関数 $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ を最小化するような $(x_{\mu,\varepsilon}, y_{\mu,\varepsilon}, z_{\mu,\varepsilon})$ を得ることができる．さらに, μ および ε を 0 に近づけることによって, $(x_{\mu,\varepsilon}, y_{\mu,\varepsilon}, z_{\mu,\varepsilon})$ が MSOCCP (3.2) の解に収束することが期待できる．しかし, 各 $\mu,\ \varepsilon$ に対して $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ を厳密に最小化するのは効率が良くない．そこで, 各反復において, $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ を非厳密に最小化していくアルゴリズムを構築する.

アルゴリズム 1. $\mu_0 \in (0,\infty),\ \varepsilon_0 \in (0,\infty),\ \alpha_0 \in (0,\infty)$ を適当に選ぶ.

Step 0 $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ を適当に選び, $k := 0$ とする.

Step 1 $\Psi_{\mathrm{NR}}(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}) = 0$ ならば, $(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})$ を解として出力し終了.

Step 2 以下の不等式を満たす $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の組を見つける.

$$\Psi_{\mu_k,\varepsilon_k}(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)}) \leq \alpha_k \tag{4.1}$$

Step 3 正の実数 $\mu_{k+1},\ \varepsilon_{k+1},\ \alpha_{k+1}$ を, 最終的に $\{(\mu_k, \varepsilon_k, \alpha_k)\} \to (0,0,0)$ が成り立つように選ぶ．$k = k+1$ とし, Step 1 に戻る.

以下の命題は, 任意の $\mu > 0,\ \varepsilon \geq 0$ に対して, $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ の停留点が $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ の大域的最適解であり, その関数値が 0 になることを示している．なお, $\mu > 0$ かつ $\varepsilon > 0$ であるとき, $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ のレベル集合は有界であるため, 必ず停留点が存在する．したがって, 以下の命題は, (4.1) を満たす $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)})$ が必ず存在することをも保証している.

命題 4.1. 式 (3.1) で定義される関数 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ が単調で, かつ $\mu>0,\ \varepsilon\geq 0$ であるとする．このとき, $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ の任意の停留点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ は, $\Psi_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$ を満たす.

証明. $\nabla H_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ は, [4, Proposition 6.1] より, 正則になることが知られている．ところで, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ は $\Psi_{\mu,\varepsilon}$ の停留点であるので, $\nabla\Psi_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$ である．ここで,

$$\nabla\Psi_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\nabla H_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})H_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

であるから, $H_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$ を得る．$\Psi_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1/2)\|H_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\|^2$ であるから, $\Psi_{\mu,\varepsilon}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$ を得る． $\square$

また, $H_{\mu,\varepsilon}$ と H_{NR} の間には以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|H_{\mu,\varepsilon}(x,y,z)-H_{\mathrm{NR}}(x,y,z)\| &\leq \|\varphi_\mu(x,y)-\varphi_{\mathrm{NR}}(x,y)\|+\\ &\qquad \|g_\varepsilon(x,z)-g(x,z)\|+\|h_\varepsilon(x,z)-h(x,z)\|\\ &\leq \nu\mu+\varepsilon\|x\|+\varepsilon\|z\|\end{aligned}$$

よって, $(\mu,\varepsilon)\downarrow(0,0)$ としたときに, 任意の固定された (x,y,z) に対して, $H_{\mu,\varepsilon}(x,y,z)$ が $H_{\mathrm{NR}}(x,y,z)$ に収束する．よって, 生成される点列が有界であれば, アルゴリズム 1 によって解が得られることが期待できる.

次に, アルゴリズム 1 の Step 2 で $x^{(k+1)},\ y^{(k+1)},\ z^{(k+1)}$ を, Step 3 で $\mu_{k+1},\ \varepsilon_{k+1},\ \alpha_{k+1}$ をどのように計算するのかについて考える．論文 [5] では, 次の反復点 $x^{(k+1)},\ y^{(k+1)},\ z^{(k+1)}$ を求める際にはニュートン法と Armijo のステップサイズルールを, パラメータ μ_{k+1} および ε_{k+1} を求める際には一次収束列とメリット関数値の定数倍との小さいほうの値[1]を, α_{k+1} を求める際には一次収束列を用いていた．本論文でも, 同様のものを用いるものとする．なお, 表記の簡単のために, $w,\ w^{(k)}$ を以下の式で定義する.

$$w:=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ w^{(k)}:=\begin{pmatrix}x^{(k)}\\ y^{(k)}\\ z^{(k)}\end{pmatrix}$$

アルゴリズム 2. はじめに, パラメータ $\eta,\rho\in(0,1),\ \bar{\eta}\in(0,\eta],\ \sigma\in(0,1/2),\ \kappa>0$ を設定する.

Step 0 $w^{(0)}\in\mathbb{R}^{2n+m},\ \beta_0\in(0,\infty)$ を選び, $\mu_0:=\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(0)})\|,\ \varepsilon_0:=\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(0)})\|,\ k=0$ とする.

Step 1 $\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(k)})\|=0$ ならば, $(x^{(k)},y^{(k)},z^{(k)})$ を解として出力し終了．さもなくば, Step 2 へ.

Step 2 以下の手順により $w^{(k+1)}$ を計算する.

Step 2.0 $v^{(0)}:=w^{(k)}$ および $j:=0$ とおく.

[1]実際 [5] では, μ_{k+1} を計算する際に, 一次収束列, メリット関数値の定数倍の他に $\bar{\mu}$ で表される関数を用いている．しかし, 実際に関数 $\bar{\mu}$ の項が効いてくることはほとんど無いので, 本論文では用いていない.

Step 2.1 次の方程式を満たすベクトル $\hat{d}^{(j)}$ を求める.

$$H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)}) + \nabla H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)})^\top \hat{d}^{(j)} = 0$$

Step 2.2 もし, $\|H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)} + \hat{d}^{(j)})\| \le \beta_k$ であれば, $w^{(k+1)} = v^{(j)} + \hat{d}^{(j)}$ として Step 3 へ行く. そうでなければ Step 2.3 へ行く.

Step 2.3 次の不等式を満たす最小の非負整数 m を求め, それを m_j とおく.

$$\Psi_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)} + \rho^m \hat{d}^{(j)}) \le (1 - 2\sigma\rho^m)\Psi_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j)})$$

$t_j := \rho^{m_j}$ とし, $v^{(j+1)} := v^{(j)} + t_j \hat{d}^{(j)}$ とする.

Step 2.4 もし, $\|H_{\mu_k,\varepsilon_k}(v^{(j+1)})\| \le \beta_k$ ならば, $w^{(k+1)} := v^{(j+1)}$ とおき, Step 3 へ進む. そうでなければ, $j := j + 1$ とし, Step 2.1 に戻る.

Step 3 各パラメータを以下のように更新する.

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &:= \min\{\kappa\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(k)})\|^2, \mu_0\bar{\eta}^{k+1}\} \\ \varepsilon_{k+1} &:= \min\{\kappa\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(k)})\|^2, \varepsilon_0\bar{\eta}^{k+1}\} \\ \beta_{k+1} &:= \beta_0\eta^{k+1} \end{aligned}$$

$k = k + 1$ とし, Step 1 に戻る.

アルゴリズム 2 において $\alpha_k := \beta_k^2/2$ とすれば, (4.1) 式は常に満たされる. また, $\mu_k \le \mu_0\bar{\eta}^k$, $\varepsilon_k \le \varepsilon_0\bar{\eta}^k$, $\beta_k = \beta_0\eta^k$ が全ての k に対して成り立つので, $\{(\mu_k, \varepsilon_k, \alpha_k)\} \to (0, 0, 0)$ が成り立つ. よって, アルゴリズム 2 はアルゴリズム 1 の Step 2 および Step 3 の条件を確かに満たしている.

5 数値実験

本節では, 前節で提案したアルゴリズムを計算機上に実装し, それを具体的な問題に適用することによりアルゴリズムの有用性を確かめる.

本実験では, 次のような MSOCCP に対してアルゴリズム 2 を適用する.

$$\begin{aligned} &x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n,\ x^\top y = 0 \\ &y = c - A^\top z,\ Ax - b = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は与えられた行列およびベクトルである. なお, この MSOCCP は以下の SOCP の KKT 条件にもなっていることに注意する.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad c^\top x \\ &\text{subject to} \quad x \in \mathcal{K}^n,\ Ax - b = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

MSOCCP(5.1) を変分不等式問題 (2.1) の形で書いたとき, 本実験で使用した問題に対して, 関数 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ は以下の形で表される.

$$F(x, z) = \begin{pmatrix} c - A^\top z \\ Ax - b \end{pmatrix}$$

この関数のヤコビ行列は

$$\nabla F(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^\top & 0 \end{pmatrix}$$

という半正定値行列で与えられるので, 関数 F は常に単調であることが保証される. しかも, 任意の $\zeta \in \mathbb{R}^{n+m}$ に対して $\zeta^\top \nabla F(x,z)\zeta = 0$ であるので, F は強単調ではないことも確認できる.

MSOCCP(5.1) に含まれる行列およびベクトルは次のように生成する. まず, 行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とし, 各 $i = 2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$ に対して a_{ij} は $(-1,1)$ の一様分布に従うようにランダムに選ぶ. また, $\bar{x} \in \mathrm{int}\mathcal{K}^n$ をランダムに選び, この $\bar{x}$ を用いて $b := A\bar{x}$ とする. このようにすることで, SOCP(5.2) の実行可能領域が常にコンパクト[2] かつ狭義実行可能となり, MSOCCP(5.1) が必ず解をもつことが保証される. また, ベクトル $c \in \mathbb{R}^m$ は各成分が $(-1,1)$ の一様分布に従うようにランダムに選ぶ.

また, アルゴリズム 2 を実装するにあたって, 初期点 $x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)}$ は各成分が $(-1,1)$ の一様分布に従うように選ぶ. また, パラメータはそれぞれ $\eta := 0.01,\ \rho := 0.5,\ \bar{\eta} := 0.001,\ \sigma := 0.4,\ \kappa := 0.001$ とし, プログラムの終了条件は $\|H_{\mathrm{NR}}(w^{(k)})\| \le 10^{-8}$ とした. 今回の実験は, CPU が Intel(R) Core(TM)i7 (1.60GHz) であり, メモリが 4GB であるような計算機上で行った. アルゴリズムは MATLAB R2012b を用いて実装した.

はじめの実験では, ベクトル x および y の次元 n として $n = 100,\ 200,\ldots,500$ の 5 通りを考え, 各 n に対してテスト問題を 50 題ずつ, 計 250 題生成した. その際, z の次元は $m = n/2$ とした. 各問題に対してアルゴリズム 2 を適用して得られた結果と, SDPT3 を用いて得られた結果をまとめたのが表 1 である. ここで, 内部反復回数とは Step2.1 でニュートン方程式を解いた回数を意味し, 外部反復回数とは最終的な k の値を意味する. なお, 表中の数値は各 n に対するテスト問題 50 題の平均値である. この表より, 外部反復, 内部反復の回数は問題のサイズにさほど影響を受けないが, CPU 時間は問題のサイズに大きな影響を受けていることが見て取れる. すなわち, 問題のサイズが大きければ大きいほど, 一反復あたりに必要な計算時間が大きくなることが分かる.

次の実験では, n の値は 100 で固定し, $m = 10,\ 20,\ldots,90$ のそれぞれに対してテスト問題を 100 題ずつ, 計 900 題生成した. その各問題に対してアルゴリズム 2 を適用して得られた結果をまとめたものが表 2 である. ここで, 表の各列の意味は表 1 と同じである. また, 表中の数値は各 m に対して生成した 100 題の平均値である. これより, m の値が大きいほど外部反復, 内部反復ともに回数が少しだけ多くなる傾向にあることが見て取れるが, 表 1 の場合と同様, 問題のサイズの影響を大きく受けているとは言い難い.

[2] A の列ベクトルを A_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ とし, $\Omega_i := \{x \mid A_i x - b_i = 0\}$ としたとき, SOCP(5.2) の実行可能領域は $\mathcal{K}^n \cap \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_m$ であるが, $\mathcal{K}^n \cap \Omega_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 = b_1,\ \|x_2\| \le b_1\}$ が明らかにコンパクトなので, 実行可能領域もまたコンパクトである.

表 1: n の値を変化させた場合のアルゴリズムと SDPT3 の比較

n	外部反復回数	内部反復回数	CPU 時間 (s)
100	5.06	10.32	0.200
200	5.20	10.30	0.887
300	5.40	10.02	2.194
400	5.54	9.72	3.804
500	5.66	9.80	6.223
600	5.70	9.98	9.528
700	5.76	10.22	14.138
800	5.66	10.26	19.005
900	5.84	10.46	25.579
1000	5.96	10.56	33.404

表 2: m の値を変化させた場合の結果

m	外部反復回数	内部反復回数	CPU 時間 (s)
10	4.91	9.70	0.206
20	4.95	10.06	0.192
30	4.99	10.21	0.192
40	4.99	10.32	0.205
50	5.08	10.26	0.222
60	5.15	10.30	0.268
70	5.14	10.55	0.299
80	5.22	10.59	0.317
90	5.11	10.61	0.345

6 結論

本報告書では, 林らが二次錐相補性問題に対しての提案した平滑化法と正則化法を組み合わせたアルゴリズムを, 混合型二次錐相補性問題 (MSOCCP) に対して拡張した. また, 数値実験において, そのアルゴリズムを線形な SOCP と等価な MSOCCP に対して適用し, その有用性を確認した. 今後の課題としては, まず提案したアルゴリズムの大域的収束性や二次収束性などの収束解析が挙げられる. また, 数値実験では線形な SOCP と等価な MSOCCP のみを解いたが, 非線形な SOCP と等価な MSOCCP, もしくはロバスト Nash 均衡問題などの SOCP で表せないような MSOCCP に対しても本報告書で拡張したアルゴリズムを適用することも重要な課題である.

謝辞

日頃からご教授下さり, 本報告書の作成にあたっては細部に至るまで様々な御指摘や適切な御指導を賜った林俊介助教に深く感謝の意を表します. また, 日頃からお世話になっている福嶋雅夫教授, 山下信雄准教授, 福嶋研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, Mathematical Programming, 107, pp. 231–273, 2006

[2] J.-S. Chen, X. Chen, and P. Tseng, Analysis of nonsmooth vector-valued functions associated with second-order cones, Mathematical Programming, 101, pp. 95–117, 2004.

[3] F. Facchinei and J.-S. Pang, Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Springer-Verlag, New York, 2003.

[4] M. Fukushima, Z.-Q. Luo, and P. Tseng, Smoothing functions for second-order cone complementarity problems, SIAM Journal on Optimizaton, 12, pp. 436–460, 2001.

[5] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, SIAM Journal on Optimizaton, 15, pp. 593–615, 2005.

[6] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 6, pp. 283–296, 2005.

[7] Y. Ito, Robust Wardrop equilibria in the traffic assignment problem with uncertain data, master's thesis, Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2010.

[8] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, Linear Algebra and Its Applications, 284, pp. 193–228, 1998.

[9] R. D. C. Monteiro and T. Tsuchiya, Polynomial convergence of primal-dual algorithms for the second-order cone program based on the MZ-family of directions, Mathematical Programming, 88, pp. 61–83, 1998.

[10] R. Nishimura, S. Hayashi, and M. Fukushima, Robust Nash equilibria in N-person non-cooperative games: Uniqueness and reformulation, Pacific Journal of Optimization, 5, pp. 237–259, 2009.

[11] T. Tsuchiya, A convergence analysis of the scaling-invariant primal-dual path-following algorithms for second-order cone programming, Optimization Methods and Software, 11 & 12, pp. 141–182, 1999.

[12] N. Yamashita and M. Fukushima, On the level-boundedness of the natural residual function for variational inequality problems, Pacific Journal of Optimization, 1, pp. 625–630, 2005.

[13] 福嶋雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.