

特別研究報告書

多目的最適化問題における  
最急降下法とその有効性について

指導教員 福田秀美 助教

京都大学工学部情報学科

数理工学コース

平成22年4月入学

平成26年3月卒業

森下 美子

平成26年1月31日提出

## 摘要

最適化問題とは様々な制約条件の下で目的関数を最小化する問題であり、通常この目的関数は単一の実数値関数である。しかし実際の工学問題では、要求される目的は1つではなく複数存在することが多い。複数の目的関数が存在する最適化問題を多目的最適化問題といい、その応用は工学、経済学、経営学、社会学などが知られている。この多目的最適化問題に用いられるアプローチとして最も一般的なものがスカラー化手法である。スカラー化手法では、パラメータを用いて単一目的の最適化問題へと変換し解を求める。このスカラー化手法では解がパラメータによって変化するためパラメータ選定が重要となるのだが、その選定方法が難しい。そこで本報告書では、最近提案された多目的最適化問題における最急降下法に注目した。この方法では解がパラメータの値に左右されないため、スカラー化手法では解くのが困難だった問題に対して、解を求めることができるようになる可能性がある。また、多目的最適化問題においてスカラー化手法を用いない手法は比較的新しく、数値実験の例が極めて少ない。そこで、最急降下法とスカラー化手法を具体的な問題に対して実行することで、比較、評価を行い、最急降下法の有効性について確かめた。また、最急降下法を実行するうえで非常に重要となる初期点の選定方法について考察した。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>準備</b>	<b>2</b>
2.1	記号と定義 . . . . .	2
2.2	パレート最適 . . . . .	2
<b>3</b>	<b>多目的最適化における最急降下法</b>	<b>4</b>
3.1	探索方向 . . . . .	4
3.2	ステップ幅 . . . . .	5
3.3	アルゴリズム . . . . .	6
3.4	収束の解析 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>スカラー化手法</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>数値実験</b>	<b>8</b>
5.1	実験 1 . . . . .	8
5.2	実験 2 . . . . .	11
5.3	実験 3 . . . . .	14
<b>6</b>	<b>まとめと今後の課題</b>	<b>16</b>

# 1 序論

制約条件下で目的関数を最小, もしくは最大にするような問題を**最適化問題**といい, 最適化問題を解く手法を最適化の手法という. 現在提案されている多くの最適化の手法は, 単一の目的関数に対して最適解を求める方法を提供している. しかし実世界に存在する様々な問題では, 要求される目的は1つだけでなく複数存在することが多い. 航空機の設計を例にとって考えてみる. 3次元翼の空力最適化問題では, 空気の抵抗だけを考えると抗力最小化に関する単目的最適化問題である. しかし実際の設計では, 必要な強度を保つことを制約条件として, 効力最小化, 翼重量最小化, 燃料タンク最大化等を考慮する必要がある. このように, 工学問題においてより実用的な解を求めたいとき, 目的関数は複数になる場合が多い. そのような異なる評価基準を持つ複数の目的関数が存在する最適化問題を, **多目的最適化問題**という. 多目的最適化問題は工学問題だけでなく, 経済学, 経営学, 社会学などあらゆる分野において存在している [2, 4, 5, 15, 18].

以下では, 次の式で表されるような多目的最適化問題について考える.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && F(x) \\ & \text{subject to} && x \in C \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, 目的関数は  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  のベクトル値関数であり, 実行可能集合  $C$  は  $\mathbb{R}^n$  の部分集合である. 集合  $C = \mathbb{R}^n$  のとき, これは無制約な多目的最適化問題となる.

多目的最適化問題 (1) においては, すべての目的関数を同時に最小化するような完全な最適解が存在するとは限らない. 上記の例でもある通り, 各目的関数は互いに相反する要素を持っている場合が多いため, 最適化を行う際には各要素の妥協解を得る必要がある. 言い換えれば, 多目的最適化問題での本質は各目的関数間でいかにトレードオフをとることにあるといえる. そのため, 単一の最適解を求めたところでそれが不十分である場合が多い.

そこで, 解の最適性に関して新たな概念を導入する必要がある. それが**パレート最適**という概念である. このパレート最適解とは, ある目的関数値を改善しようとした場合, 少なくとも1つの他の目的関数値が改善されてしまうような解であり, 優劣がつけられない解ともいう. パレート最適解は一般に集合を形成し, それは目的関数間のトレードオフを示すものとなっているため, 最終的な解はこの中から1つを選ぶこととなる.

現在多目的最適化問題に用いられるアプローチとして最も一般的なものは, **スカラー化手法** [13, 17] である. これは, 元の問題にパラメータを用いた何らかの工夫を施し, 単一目的関数の最適化問題に変換し解を求めるというものである. このスカラー化手法では, スカラー化パラメータの選定方法を考えなくてはならない. 求めたい解が得られるパラメータは不明なため, 意思決定者がそれを選定しなければならないのである. また, 解がパラメータに依存するというのも重要である. 問題によっては良い結果の得られるパラメータが限定されており, それ以外のものを選定した場合, スカラー化した目的関数値が発散してしまい解が得られないといった例がある.

そこで本報告書では, 最近提案された多目的最適化問題における**最急降下法** [7] に注目し, 具体的に数値実験を行うことによってその有効性について確かめる. この方法では, 最急降下方向を計算し, それを探索方向として, 初期点から最適解へと近づけていく. 理論的にはパラメータの値に左右されることなくパレート最適解を求めることができる. さらに, スカラー化手法では解くのが困難だった問題に対しても解を求められる可能性がある. しかし, 多目的最適化分野においてスカラー化手法を用いない手法は比較的新しく, 数値実験の例が極めて少ない. したがって, 様々な問題に対しこれらの手法を実行し, 比較, 評価することは非常に有意義なことである.

本報告書の構成は以下のとおりである. 2節では多目的最適化問題を考えるにあたっての準備として, 本文中に使用する記号や用語の定義を行う. 3節では最急降下法について説明する. まず, 探索方向やステップ幅の計算について述べた後, それを使った実際のアルゴリズムを示す. 4節では一般的な解法であるスカラー化手法について説明する. 5節では, 最急降下法とスカラー化手法によって具体的な問題 [3, 6, 14] を解いた数値実験を行い, 最急降下法の有効性について述べる. 最後に, 6節では結論と今後の課題について述べる.

## 2 準備

この節では本論文で扱う記号や用語について説明した後、多目的最適化における最適性の概念において説明する。

### 2.1 記号と定義

$n$ 次元ベクトル全体の集合 ( $n$ 次元ユークリッド空間) を  $\mathbb{R}^n$  と表し,  $n$ 次元ベクトル  $x$  は  $x \in \mathbb{R}^n$  と書く. ベクトルは列ベクトルとし, その成分は転置記号  $\top$  を用いて  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  のように表す. ベクトルの成分は下付き添え字を用いて  $x_1, \dots, x_n$  と書き, ベクトルの列は上付き添え字を用いて  $x^1, x^2, \dots$ , または  $\{x_k\}$  と書く.

二つのベクトル  $x, y \in \mathbb{R}^n$  に対して  $x_i \leq y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が成り立つとき  $x \leq y$  と書き,  $x_i < y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が成り立つとき  $x < y$  と書く. さらに, その内積を  $\langle x, y \rangle = x^\top y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  と表し,  $x \in \mathbb{R}^n$  のユークリッドノルムを  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  と定義する.

$\mathbb{N}$  は自然数を,  $\mathbb{R}_{++}$  は正の実数を表し,  $\text{range}(A)$  は行列  $A$  による線形写像の値域, すなわち  $\text{range}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$  とする.  $m$  個の実数値関数  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を成分とするベクトル値関数を  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  と表す. すなわち  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))^\top$  である. 成分関数  $F_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) がすべて連続であるとき,  $F$  は連続であるという.

関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  において,

$$\nabla f(x) := \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^\top$$

で定義されるベクトル  $\nabla f(x)$  を  $f$  の  $x$  における勾配と呼ぶ.  $m$  個の実数値関数  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を成分とするベクトル値関数  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して定義される  $n \times m$  行列

$$JF(x) := \begin{bmatrix} \nabla F_1(x)^\top \\ \vdots \\ \nabla F_m(x)^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

を関数  $F$  の  $x$  におけるヤコビ行列という.

任意の  $x, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  において,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  が

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(z)$$

を満たすとき,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を凸関数であるという. また, ベクトル値関数  $F = (F_1, \dots, F_m)^\top$  において, 各目的関数  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が全て凸関数となっているとき,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  は  $\mathbb{R}_+^m$ -凸であるという.

### 2.2 パレート最適

通常の最適化問題では  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  は実数値関数となり, 全ての実行可能解  $x \in C$  に対して

$$F(x^*) \leq F(x)$$

が成り立つとき,  $x^* \in C$  を最適解という.

しかし多目的最適化において, 各目的関数を同時に最小化する完全な最適解が必ずしも存在するとは限らない. 実際, 次の多目的最適化問題は完全な最適解をもたない.

例 2.1. 問題 (1) において,  $m = 2, n = 1, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F_1(x) = x^2, F_2(x) = x, C = [-1, 1]$  とする. ここで, 通常の最適解の定義を適用すると,  $F_1(x^*) \leq F_1(x), F_2(x^*) \leq F_2(x)$  となるが, そのような  $x^* \in [-1, 1]$  は存在しない.

したがって, 通常のものとは別の新たな最適解の定義が必要である. 次では, 多目的最適化問題に関して非常に重要となるパレート最適の概念を定義する.

定義 2.1. 1.  $F(x) \leq F(x^*)$  かつ  $F(x) \neq F(x^*)$  となる  $x \in \mathbb{R}^n$  が存在しないような  $x^* \in \mathbb{R}^n$  をパレート最適 (Pareto optimum), または強パレート最適解 (strongly Pareto optimum) という (図 1 参照).

2. ある  $x^*$  の近傍  $U$  が存在し,  $F(x) \leq F(x^*)$  かつ  $F(x) \neq F(x^*)$  となる  $x \in U$  が存在しないような  $x^* \in U$  を局所的パレート最適解 (locally Pareto optimum) という.

3.  $F(x) < F(x^*)$  となるような  $x \in \mathbb{R}^n$  が存在しないような  $x^* \in \mathbb{R}^n$  を弱パレート最適解 (weakly Pareto optimum) という.

4. ある  $x^*$  の近傍  $U$  が存在し,  $F(x) < F(x^*)$  となる  $x \in U$  が存在しないような  $x^* \in U$  を局所的弱パレート最適解 (locally weak Pareto optimum) という.

5.  $\text{range}(JF(x)) \cap (-\mathbb{R}_{++}^m) = \emptyset$  を満たすような  $x \in \mathbb{R}^n$  をパレート停留点 (Pareto critical) という.

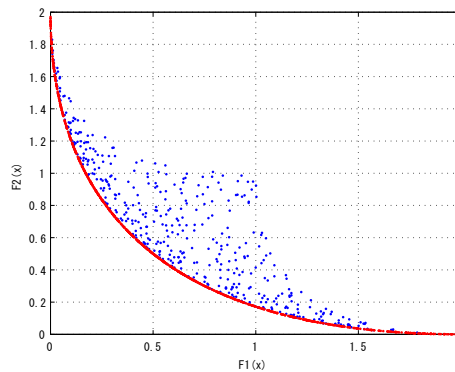


図 1: パレート最適の概念

図 1 はテスト問題として,  $n = 2, m = 2, C = \mathbb{R}^n$  で,

$$F_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$F_2(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

という多目的最適化問題に対して,  $(F_1(x), F_2(x))$  をプロットしたものである. いくつかの点  $x$  をランダムに選ぶとき, 青い点が  $(F_1(x), F_2(x))$  の点集合であり, その中で赤い点がこの問題のパレート最適解となっている. またこのパレート最適解の集合をパレートフロンティアと呼ぶ.

パレート解は局所的パレート解であり, 弱パレート解は局所的弱パレート解である. また,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸のとき, 局所的弱パレート解は弱パレート解となる.

定義のパレート解, 弱パレート解, パレート停留点には以下の関係がある.

命題 2.1. 局所的パレート最適点は, 局所的弱パレート最適点である. 逆は成り立たない.

命題 2.2.  $x \in \mathbb{R}^n$  がパレート停留点であることは,  $x$  が局所的弱パレート最適であることの必要条件である.

命題 2.3.  $x \in \mathbb{R}^n$  がパレート停留点であるとき, 全ての  $v \in \mathbb{R}^n$  に対して  $\nabla F_i(x)^\top v \geq 0$  を満たすような  $i \in \{1, \dots, m\}$  が存在する. また,  $x \in \mathbb{R}^n$  がパレート停留点でないとき,  $JF(x)v < 0$  を満たすような  $v \in \mathbb{R}^n$  が存在する.

命題 2.4. 単一目的の最適化問題では,  $F$  が凸であれば停留点は必ず最適解である. しかし多目的の場合では,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸であってもパレート停留点はパレート最適解とは限らない.

### 3 多目的最適化における最急降下法

この節では多目的最適化問題における最急降下法について述べる. この手法は [7] で提案され, 通常の単一目的の最適化問題の最急降下法 [20] を拡張したものであるといえる. 最急降下法は反復法の一つであり, 反復法では適当な初期点  $x_0$  から  $x_{k+1} = x_k + t_k v_k$  と更新していき, アルゴリズムによって生成された点列  $\{x_k\}$  を最終的に最適解  $x^*$  に収束させる.

以下では, 探索方向ベクトル  $v \in \mathbb{R}^n$ , ステップ幅  $t \in \mathbb{R}$  の計算の仕方について説明し, それらを使ったアルゴリズムを示した後, その収束性について述べる.

#### 3.1 探索方向

単一目的関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  の通常の最適化問題における最急降下法では,  $k$  回目の反復における探索方向として  $v_k = -\nabla f(x_k)$  が選ばれ, このような  $v_k$  は最急降下方向と呼ばれる. この節では, 多目的最適化問題における最急降下方向の求め方について説明する.

関数  $f_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\begin{aligned} f_x(v) &:= \max\{(JF(x)v)_i \mid i = 1, \dots, m\} \\ &= \max\{\nabla F_i(x)^\top v \mid i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

とする. ここで, 次の無制約最小化問題を解くことによって探索方向を決定する.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_x(v) + \frac{1}{2}\|v\|^2 \\ \text{subject to} \quad & v \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

これは, 次の線形不等式制約付きの凸 2 次計画問題に書き換えられる.

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{(\alpha, v)} \quad & \alpha + \frac{1}{2}\|v\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \nabla F_i(x)^\top v \leq \alpha \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{3}$$

探索方向問題 (2) は強凸関数であるため唯一の解をもつので [19], それを

$$v(x) := \arg \min_{v \in \mathbb{R}^n} f_x(v) + \frac{1}{2}\|v\|^2$$

とする. さらに, その目的関数値を

$$\alpha(x) := f_x(v(x)) + \frac{1}{2}\|v(x)\|^2$$

とする. いま,  $v = 0$  が問題 (2) の実行可能解であるので, 全ての  $x$  に対して

$$\alpha(x) \leq f_x(0) + \frac{1}{2}\|0\|^2 = 0$$

が成り立つ. したがって, 次の補題が成り立つ.

補題 3.1. [7, 補題 1] 問題 (1) に対して,

1.  $x$  がパレート停留点のとき,  $v(x) = 0$ , および  $\alpha(x) = 0$  となる. また,  $v(x) = 0$ , および  $\alpha(x) = 0$  のとき,  $x$  はパレート停留点である.
2.  $x$  がパレート停留点でないとき,  $v(x) \neq 0$  および  $\alpha(x) < 0$  となる. また,  $v(x) \neq 0$ , および  $\alpha(x) \neq 0$  のとき,  $x$  はパレート停留点でない.
3. 写像  $x \mapsto v(x)$ ,  $x \mapsto \alpha(x)$  は連続である.

例 3.1. 探索方向問題 (2) について,  $m = 1$  を考える. これは通常 of 最小化問題と等しい. このとき,

$$f_x(v) = \nabla F(x)^\top v$$

となる. したがって, 方向探索問題 (2) は

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \nabla F(x)^\top v + \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ & \text{subject to} && v \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

と書ける. これは 2 次凸関数の最小化問題となっている. したがって, この問題の目的関数を  $v \mapsto s(v)$ , すなわち

$$s(v) = \nabla F(x)^\top v + \frac{1}{2} \|v\|^2$$

とすると,  $\nabla s(v) = 0$  を満たすような  $v$  がここでの最適解となる.

$$\begin{aligned} \nabla s(v) &= \nabla F(x) + v = 0 \\ v &= -\nabla F(x) \end{aligned}$$

となり,  $v = -\nabla F(x)$  であることが確認できる. したがって, 探索方向問題 (2) では通常 of 最急降下方向が得られていることがわかる.

## 3.2 ステップ幅

反復法では適当なステップ幅  $t_k$  を求める必要があり, このステップ幅の調整を直線探索という. 最も適当なステップ幅は  $v_k$  方向で目的関数値を最小にするものであるが, これを正確に計算することは不可能である. そこで緩和された直線探索法がいくつか紹介されており, 今回はその中でも最もよく使用されているアルミホ条件 (4) を用いる. 以下では, アルミホ条件を用いたステップ幅  $t_k$  の計算について説明する.

今,  $JF(x)v < 0$  となる  $v \in \mathbb{R}^n$  が得られているとする. 命題 2.3 より, このときの  $x$  はパレート停留点ではないことがわかる.  $\beta \in (0, 1)$  は適当な定数とする. ステップ幅  $t$  は 1 からスタートし,

$$F(x + tv) \leq F(x) + \beta t JF(x)v \tag{4}$$

が満たされない間

$$t := \frac{t}{p}$$

と更新する. ここで,  $p > 1$  であり, 通常  $p = 2$  とされることが多い.

次の補題により, 十分に小さな  $t > 0$  で式 (4) が満たされることから, この手順が有限であることが分かる.

補題 3.2. [7, 補題 4]  $JF(x)v < 0$  のとき,  $x, v, \beta$  に依存するある正の定数  $\varepsilon$  が存在し,  $t \in (0, \varepsilon]$  で

$$F(x + tv) < F(x) + \beta t JF(x)v$$

を満たす.



### 3.3 アルゴリズム

この節では、最急降下法のアルゴリズムについて述べる。

多目的最適化における最急降下法

**Step 1.**  $\beta \in (0, 1)$ ,  $p > 1$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $x^1 \in \mathbb{R}^n$  を選び,  $k := 1$  とする.

**Step 2.**  $x = x^k$  における方向探索問題 (2) を解き,  $v(x^k)$ ,  $\alpha(x^k)$  を計算する.

**Step 3.**  $\alpha(x^k) < \varepsilon$  なら, 終了.

**Step 4.** ステップ幅  $t_k \in (0, 1]$  を

$$T_k := \{t = 1/p^j \mid j \in \mathbb{N}, F(x^k + tv(x^k)) \leq F(x^k) + \beta t JF(x^k)v(x^k)\}$$

の最大値として計算する.

**Step 5.**  $x^k := x^k + t_k v(x^k)$ ,  $k := k + 1$  として, Step 2 に戻る.

問題 (2) の目的関数は強凸関数であることから,  $v(x^k)$  はただ一つ存在することが分かる. 補題 3.2 より, Step 3 の終了条件  $\alpha(x^k) = 0$  は  $v(x^k) = 0$  と置き換えることができる.

また,  $\varepsilon > 0$  が十分に小さいとき, 理論的に Step 2 は  $\alpha(x^k) = 0$  のことである. そのため, アルゴリズムが Step 3 で終了したとき, そのときの  $x^k$  は  $F$  のパレート停留点となっているといえる.

アルゴリズムが Step 4 において, 補題 3.1 と 3.2 より, ステップ幅  $t_k$  の計算は有限回で終了する. アルゴリズムが終了していない間, Step 4 と  $JF(x^k)v(x^k) < 0$  から, 目的関数値  $\{F(x^k)\}$  は単調減少であること, すなわち

$$F(x^{k+1}) < F(x^k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

となっていることが分かる.

### 3.4 収束の解析

この節では, 多目的最適化における最急降下法の収束性について述べる. 節 3.3 のアルゴリズムは,  $x^k$  が停留点で終了するか, または無限回の反復を行うものとなっている. 今, 停留点でない無限数列  $\{x^k\}$  が生成されたとする. 次の定理は, 最急降下法における通常の収束性を示す定理である.

**定理 3.1.** [7, 定理 1] アルゴリズムによって得られた  $\{x^k\}$  の集積点はパレート停留点である. また,  $F$  が有界なレベル集合  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^1)\}$  をもつなら,  $\{x^k\}$  は有界で少なくとも 1 つの集積点を持つ.

この定理より, 適当な条件下で数列  $\{x^k\}$  の集積点がパレート停留点であることがわかる. ここで, 定理 3.1 よりもより厳密な収束性を示すために, 仮定 3.1 を加える.

**仮定 3.1.** 単調減少数列  $\{y^k\} \subseteq F(\mathbb{R}^n) := \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  は,  $F(\mathbb{R}^n)$  の点によって下に有界である. すなわち, 全ての  $k$  について  $y^{k+1} < y^k$  となるような  $F(\mathbb{R}^n)$  内の点  $\{y^k\}$  について,  $F(\hat{x}) \leq y^k$  となるような点  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  が存在する.

仮定 3.1 は, 通常の単一目的の最適化問題においては最適解が存在するという意味であり, また多目的最適化問題でもパレート最適解が存在することを示す仮定となっている.

ここで,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸のとき, 次の補題が成り立つ.

**補題 3.3.** [10, 補題 3.5]  $\hat{x}$  を  $F$  の弱パレート最適解とする. このとき,  $\hat{x}$  はパレート停留点となる. また,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸のとき, この逆が成り立つ. すなわち,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸で,  $\hat{x}$  が  $F$  のパレート停留点なら,  $\hat{x}$  は  $F$  の弱パレート解となる. したがって,  $\mathbb{R}_+^m$ -凸問題ならば, 弱パレート最適解とパレート停留点は同じである.

仮定 3.1, 補題 3.3 より,  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸であるという条件下では,  $\{x_k\}$  が  $F$  の停留点, すなわち弱パレート解に収束することが分かる. これは, 多目的最適化問題における最急降下法によって得られた解の数列  $\{x^k\}$  が, 問題 (2) の最適解に収束するということである.

**定理 3.2.** [10, 補題 3.11]  $F$  が  $\mathbb{R}_+^m$ -凸で, 仮定 3.1 を満たしているとする. このとき, 最急降下法のアルゴリズムによって得られた数列  $\{x^k\}$  は弱パレート解に収束する.

## 4 スカラー化手法

この節では, 多目的最適化問題の解法として一般的に用いられるスカラー化手法について述べる. スカラー化手法とは, もとの多目的最適化問題の各目的関数を総合的に組み合わせて全順序関係を持つ単一目的最適化問題に変換して解く方法である. ここでは, スカラー化手法の中でも最もよく使われている加重平均法をとりあげることにする.

加重平均法とは, 多目的最適化問題の各目的関数をスカラー倍し, その総和を新たな目的関数とする方法である. すなわち, ベクトル値関数である目的関数  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))^T$  と重みベクトル  $w = (w_1, \dots, w_m)^T \in \mathbb{R}^m$  の内積をとることで以下のように実数値関数  $f_w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に変換しているのである.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_w(x) := \langle w, F(x) \rangle \\ & \text{subject to} && x \in C \end{aligned} \tag{5}$$

ただし,  $w$  は一般性を失わずに  $w_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$  をみたすものとする.

加重平均法の利点として, 凸計画問題であればパレート解集合を求めることができることがあげられる. また, 通常の単一目的最適化問題と同じため, 効率的なソルバーが様々に存在する.

しかし一方で, 目的関数の定義域の次元が増加するにつれ計算量が増大することや, どのようなパラメータを用いれば良い解が求まるのかが既知でないため, パラメータの取り方が難しいという欠点がある. さらに, パラメータによっては非有界な問題になってしまうものもある.

例えば, 次のような問題を考える.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \epsilon\sqrt{1+x^2} - x \\ F_2(x) &= \epsilon\sqrt{1+x^2} \end{aligned} \tag{6}$$

ただし,  $0 < \epsilon < 1$ ,  $C = \mathbb{R}^n$  とする.

用いるパラメータを  $w = (w_1, w_2)$  とすると, 加重平均法の目的関数は

$$f_w(x) = w_1 F_1(x) + w_2 F_2(x)$$

となる. ここで,  $w_1 \in (0, 1)$  を選んだとする.  $w_1 + w_2 = 1$  より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_w(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{w_1 \epsilon \sqrt{1+x^2} - w_1 x + (1-w_1) \epsilon \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon \sqrt{1+x^2} - w_1 x}{x} \\ &= \epsilon - w_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $w_1 > \epsilon$  のとき  $f_w$  は下に有界でない。そのため、パラメータの取り方が  $w_1 \in (0, \epsilon]$  に限定されるのである。

この問題に対し、実際に最急降下法とスカラー化手法を用いて解いた数値実験結果を節 5.2 に示す。

## 5 数値実験

この節では、前節までで紹介した最急降下法及び加重平均法を計算機上の実装し、それらを具体的な問題に適用した数値実験結果を示す。多目的最適化問題においてスカラー化手法を用いない手法は比較的新しく、数値実験の例が極めて少ない。そのため、最急降下法と加重平均法で具体的な問題を多数解き、反復回数、関数評価回数、計算時間を比較する。また多目的最適化問題においては、計算時間だけでなくパレート解をいかに網羅するかも重要となるため、求めたパレート解を図に示し、その現れ方を比較する。これらをもとに、最急降下法の有効性について確かめる。

なお、実験は CPU が Core i5 2.27GHz、メモリが 4GB の計算機上で MATLAB 7.10.0(R2010a) を用いて行った。

### 5.1 実験 1

この実験では、多目的最適化問題の例としてよく使用されている問題 [3, 6, 14] を、最急降下法及び加重平均法でパレート解を求め、その結果を比較した。

#### ■問題

この実験では、ボックス制約  $L \leq x \leq U$  のもとで問題を解いた。この制約は、初期点  $x_0$  を  $L \leq x_0 \leq U$  から選び、方向探索問題 (3) を

$$\begin{aligned} \underset{(\alpha, v)}{\text{minimize}} \quad & \alpha + \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \nabla F_i(x)^\top v \leq \alpha \quad (i = 1, \dots, m) \\ & L - x \leq v \leq U - x \end{aligned} \tag{7}$$

と置き換えることと同値である。ここで、ボックス制約付き方向探索問題 (7) においても補題 3.1 が成り立つ。また、ボックス制約がない場合には  $L_i = -\infty$ ,  $U_i = \infty$  とすることができる。

このような制約の下、次の 4 つの問題について解を求めた。

**DD1**  $m = 2$  で非凸な問題:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \\ F_2(x) &= 3x_1 + 2x_2 - \frac{x_3}{3} + 0.01(x_4 - x_5)^3 \end{aligned}$$

**JOS**  $m = 2$  の凸 2 次計画問題:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ F_2(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2 \end{aligned}$$

**FDS**  $m = 3$  の凸な問題:

$$F_1(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(x_k - k)^4$$

$$F_2(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k/n\right) + \|x\|_2^2$$

$$F_3(x) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k(n-k+1)e^{-x_k}$$

**PNR**  $m = 3$  の非凸な問題

$$F_1(x) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 + x_2^2 + 0.25x_1 + 20$$

$$F_2(x) = x_1^2 + x_2^2$$

### ■実験方法

問題 DD1 に対してはボックス制約  $U, L$  を, JOS と FDS に対しては次元数  $n$  を変化させ, また PNR では  $n, L, U$  を固定させて, それぞれの問題につき反復回数, 関数評価回数, 計算時間を求めた.

最急降下法では初期点を  $L \leq x \leq U$  から各反復ごとにランダムに選び, 100 回の反復を行った. 探索方向問題 (2) を解く際のソルバーとして, アルゴリズム trust-region-reflective を用いて凸 2 次計画問題の解を求める quadprog (MATLAB の Optimization Toolbox) を使用した. また, 節 3.3 の多目的最適化における最急降下法のアルゴリズムに Step 1 において,  $\beta = 10^{-4}$ ,  $p = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  とした.

加重平均法では初期点を  $L \leq x \leq U$  からとり,  $w_i$  の刻み幅を 0.01 とし,  $w_i$  の値を変化させ反復を行った. スカラー値関数の最適化問題 (5) を解くソルバーとして, 射影勾配法を用いてスカラー関数の最小化問題を解く gradproj[16] を使用した. gradproj 内の tolerance の値を既定値  $10^{-6}$  から  $10^{-4}$  とした.

### ■実験結果 1

それぞれの結果を表 1, 2 に示す. 表中の反復回数, 関数評価回数, 計算時間はそれぞれ 1 回あたりのアルゴリズムに対する数値の平均となっている.

表 1: 最急降下法の数値実験結果

問題	$n$	$L$	$U$	反復回数	関数評価回数	計算時間
DD1a	5	$[-1, \dots, -1]$	$[1, \dots, 1]$	8.07	7.07	0.460
DD1b	5	$[-5, \dots, -5]$	$[5, \dots, 5]$	6.57	5.57	0.367
DD1c	5	$[-10, \dots, -10]$	$[10, \dots, 10]$	11.27	10.27	0.648
DD1d	5	$[-20, \dots, -20]$	$[20, \dots, 20]$	13.68	13.02	0.792
JOSa	2	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	7.96	6.96	0.330
JOSb	3	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	4.87	3.87	0.293
JOSc	5	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	5.71	4.71	0.518
JOSd	10	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	12.69	11.69	2.303
JOSe	50	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	57.57	56.57	192.200
FDSa	3	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	9.67	8.67	0.842
FDSb	5	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	13.01	12.01	1.717
FDSc	10	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	14.29	14.01	4.072
PNR	2	$[-2, \dots, -2]$	$[2, \dots, 2]$	3.83	5.37	0.211

表 2: 加重平均法の数値実験結果

問題	$n$	$L$	$U$	反復回数	関数評価回数	計算時間
DD1a	5	$[-1, \dots, -1, ]$	$[1, \dots, 1]$	18.92	19.92	0.800
DD1b	5	$[-5, \dots, -5, ]$	$[5, \dots, 5]$	25.17	26.17	1.052
DD1c	5	$[-10, \dots, -10, ]$	$[10, \dots, 10]$	28.68	29.68	1.199
DD1d	5	$[-20, \dots, -20, ]$	$[20, \dots, 20]$	33.09	34.09	1.375
JOSa	2	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	35.67	36.67	0.881
JOSb	3	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	25.61	26.61	1.201
JOSc	5	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	21.88	22.88	1.784
JOSd	10	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	21.21	22.21	3.692
JOSe	50	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	39.75	80.50	85.133
FDSa	3	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	58.39	59.39	4.219
FDSb	5	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	77.30	78.30	9.177
FDSc	10	$[-2, \dots, -2, ]$	$[2, \dots, 2]$	67.63	137.18	19.134
PNR	5	$[-2, \dots, -3, ]$	$[2, \dots, 3]$	15.49	43.23	0.808

表 1, 2 より, どちらの手法も変数の次元が大きくなると, 反復回数, 関数評価回数が大きくなる傾向にあることがわかる.

計算時間に関しては, 多次元での結果に注目する. 最も次元数の多い JOSe では, 最急降下法と加重平均法で計算時間に比較的大きな差が見られた. これは, 2つの手法のアルゴリズムに起因すると考えられる. 最急降下法は反復法であり, 加えて目的関数が複数あるために, 次元の増大に伴い各反復の計算にかかる負担が増大し, それによって計算時間が増大する. 一方で加重平均法では単一目的最適化問題を一度解くだけとなっている. プログラムや使用したソルバーが異なるため一概には断言できないが, 多次元での計算時間の差はこの違いによるものだと考えられる.

## ■実験結果 2

問題のうち, 次数  $n$  が小さい DD1a, JOSa, PNR のパレート解をプロットしたものを, 図 2~7 に示す.

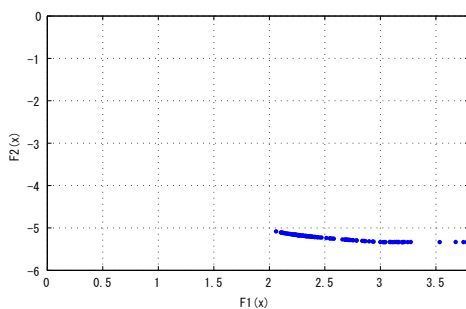


図 2: 最急降下法 (DD1a)

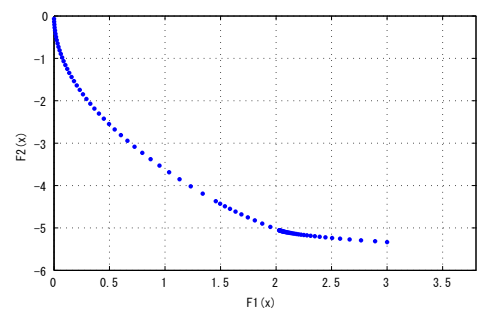


図 3: 加重平均法 (DD1a)

図 2, 3 を見ると, パレートフロントの範囲が異なっていることがわかる. 加重平均法では全体的な範囲が規則的に得られているのに対し, 最急降下法では不規則に一部しか得られていない. 最急降下法で反復回数を 10 倍にしてもパレートフロントの範囲は変化しなかったため, この原因は初期点によるものではないことが考えられる. 他の問題ではこのような違いは見られなかったため, これは問題が非凸な問題だったからではないかと考える.

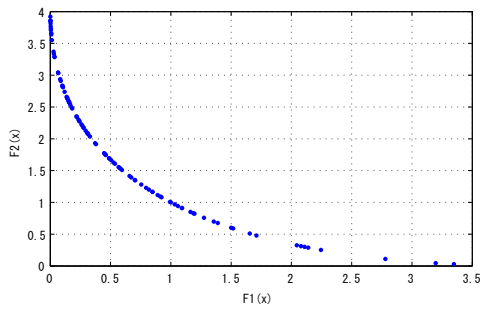


図 4: 最急降下法 (JOSa)

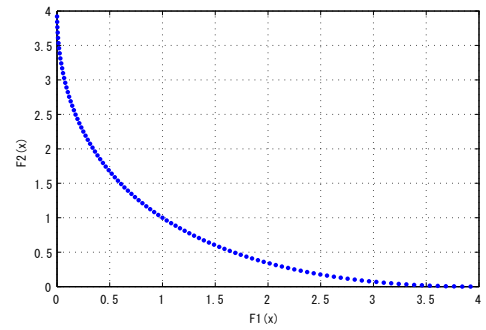


図 5: 加重平均法 (JOSa)

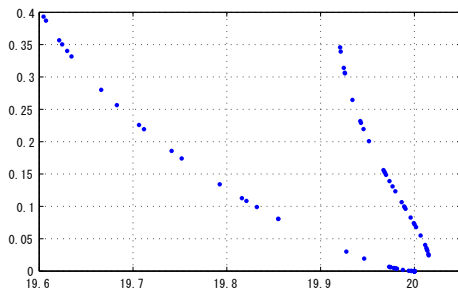


図 6: 最急降下法 (PNR)

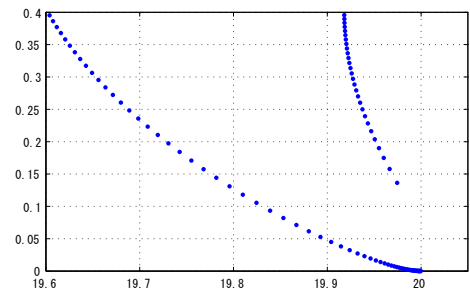


図 7: 加重平均法 (PNR)

図 4, 5 では, どちらも同じ形状のパレートフロントが表れている. 最急降下法でも加重平均法でも同じパレート解が得られていることがわかる.

図 6, 7 においては, 2 つの曲線が見られる. これは, 左の曲線がパレート解, 右の曲線が局所的パレート解の集合である. 本来は左のパレート解集合のみが得たいのにも関わらず, 右の局所的パレート解集合も得られてしまっている.

図 2~7 を通して, 最急降下法ではパレート解が離散的に表れているのに対し, 加重平均法では連続的に表れていることがわかる. これは, 最急降下法では初期点  $x_0$  を  $L \leq x \leq U$  でランダムに選定しているのに対し, 加重平均法ではパラメータ  $w$  の刻み幅が一定であるからだと考えられる.  $w$  を  $[0, 1]$  でランダムに選定する場合については, 次の節 5.2 に示す. また, 最急降下法において定期的に初期点  $x_0$  を選ぶ方法については, 節 5.3 に示す.

## 5.2 実験 2

節 4 で, パラメータ  $w_1$  の取り方が範囲が限定されてしまい, 加重平均法で解くことが困難な問題 (6) について述べた. この実験では, 最急降下法と加重平均法で実際に問題 (6) を解き, 節 4 で言及したことを確かめる. また, 節 5.1 での実験結果より, 最急降下法と加重平均法でパレート解の現れ方が違うのは初期点とパラメータの選定方法によるものだと考えられるため, パラメータ  $w_i$  の値を  $[0, 1]$  でランダムにとった場合の実験も行い, パレート解の現れ方を比較する.

### ■実験方法

問題 (6) について,  $\epsilon = 10^{-4}$  と  $\epsilon = 0.3$  で, それぞれ最急降下法と加重平均法で解いた.

表 3:  $\epsilon = 10^{-4}$  のとき

最急降下法			加重平均法			
$x_0$	$F_1(x_p)$	$F_2(x_p)$	$w_1$	$f_w(x_p)$	$F_1(x_p)$	$F_2(x_p)$
0.162	-0.162	1.01E-06	0.01	unbounded	unbounded	unbounded
0.794	-0.794	1.28E-06	0.02	unbounded	unbounded	unbounded
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.240	-0.240	1.03E-06	0.50	unbounded	unbounded	unbounded
0.417	-0.417	1.08E-06	0.51	unbounded	unbounded	unbounded
0.050	-0.050	1.00E-06	0.52	unbounded	unbounded	unbounded
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.511	-0.511	1.12E-06	0.98	unbounded	unbounded	unbounded
0.818	-0.818	1.29E-06	0.99	unbounded	unbounded	unbounded

また, 加重平均法においてパラメータ  $w$  をランダムに選定した場合についてパレート解の現れ方を見るため, 問題 (6) で  $\epsilon = 0.3$  のときに関して  $w_i \in [0, 1]$  として 100 回の反復を行う実験も行った.

#### ■実験結果

表 3, 4 に, それぞれ  $\epsilon = 10^{-4}$  と  $\epsilon = 0.3$  での結果を示す. 最急降下法では初期値  $x_0$ , それに対する解の目的関数値  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  を記録した. 加重平均法では問題 (6) におけるパラメータの値  $w_1$ , それに対する解の目的関数値  $f_w(x)$ , 得られた解を元の目的関数  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  に代入した値を記録した. 図 8, 9, に最急降下法によって得られたパレート解を示す. また,  $w_i \in [0, 1]$  をランダムに選定した場合のパレート解を図 7 に示す.

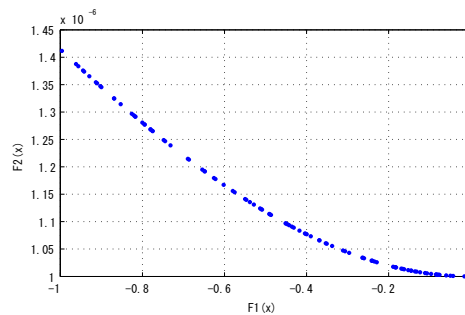


図 8: 最急降下法 ( $\epsilon = 10^{-4}$ )

表 3 より, 最急降下法では解が得られているのに対し, 加重平均法では目的関数値  $f_w(x)$  が発散してしまい, 解が得られていないことがわかる. これは節 4 でも述べたとおり,  $w_1$  の値を  $(0, \epsilon]$  でとらなければならないのに対し,  $w_1$  の値がその範囲外にあるため  $f_w(x)$  が発散しているのだと考えられる. このことから, 解の得られるパラメータの値があらかじめわかっているわけではないため, やはりスカラー化手法ではパラメータの取り方が難しいということがわかる.

図 8 からは, 最急降下法では  $\epsilon$  が非常に小さい値であってもパレート解が得られていることがわかる.

表 4 より, 節 4 で述べたとおり, 実際に加重平均法では解の得られるパラメータ  $w_1$  の値が  $(0, \epsilon]$  に限定されていることがわかる. 一方最急降下法では,  $\epsilon$  の値に左右されることなく解が得られている.

表 4:  $\epsilon = 0.3$  のとき

最急降下法			加重平均法			
$x_0$	$F_1(x_p)$	$F_2(x_p)$	$w_1$	$f_w(x_p)$	$F_1(x_p)$	$F_2(x_p)$
0.423	-0.097	3.26E-01	0.01	3.00E-01	2.67E-01	3.00E-01
0.094	0.207	3.01E-01	0.02	2.99E-01	2.34E-01	3.01E-01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.457	-0.128	3.30E-01	0.29	7.68E-02	-2.60E+00	1.17E+00
0.875	-0.477	3.99E-01	0.30	3.55E-04	-2.96E+02	1.27E+02
0.518	-0.180	3.38E-01	0.31	unbounded	unbounded	unbounded
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.833	-0.442	3.90E-01	0.98	unbounded	unbounded	unbounded
0.256	0.053	3.10E-01	0.99	unbounded	unbounded	unbounded

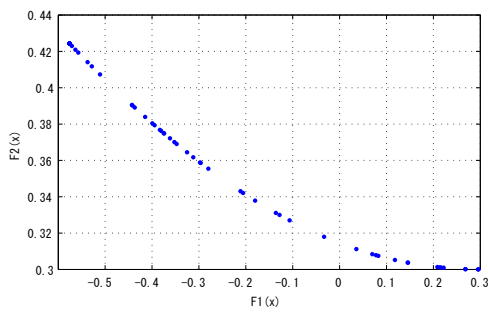


図 9: 最急降下法 ( $\epsilon = 0.3$ )

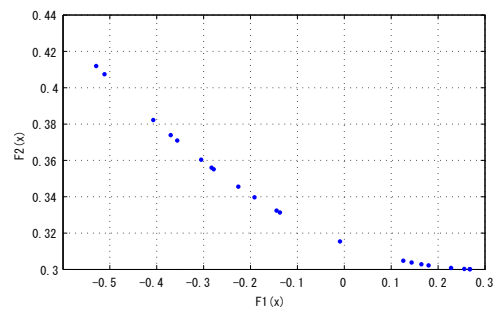


図 10: 加重平均法 ( $\epsilon = 0.3$ )



図 9, 10 より, どちらも同じ形状のパレートフロントが表れており, また同じように点が離散的な分布になっていることがわかる. したがって, これまでの加重平均法の図がなめらかで連続的だったのは,  $w$  の刻み幅が一定であったからだと考えられる.

### 5.3 実験 3

図 2, 4, 6 を見ると今までの実験方法の下では最急降下法によって求められるパレート解は離散的で不規則であることがわかり, またそれは初期点  $x_0$  がランダムに選定されていることに起因すると考えられる. そこでこの実験では, 良いパレート解が広範囲にわたって得られるような初期点  $x_0$  の選定方法をヒューリスティックなやり方で決定した.

#### ■実験内容

最急降下法でパレートフロントを得るにあたって,  $k$  回目の反復における初期点  $x_0^{(k)}$  を規則的に選定する方法を考える. そこで, 次のような方法で初期点を決定することを考えた.

まず 1 回目の反復では初期点  $x_0^{(1)}$  をランダムに決定する. ここで得られたパレート解を  $x_p^{(1)}$ , その目的関数値を  $F(x_p^{(1)})$  とする. 次に 2 回目の反復では, 初期点  $x_0^{(2)}$  をその目的関数値  $F(x_0^{(2)})$  が 1 回目のパレート解での目的関数値  $F(x_p^{(1)})$  の近傍になるようにとる. 3 回目の反復では,  $F(x_0^{(3)})$  が  $F(x_p^{(2)})$  の近傍になるような初期点  $x_0^{(3)}$  とする. これを繰り返し, 300 回パレート最適解を求めたところで終了し, 結果をプロットする.

反復  $k$  回目 ( $k \geq 2$ ) における初期点  $x_0^{(k)}$  は次のように求める. 反復  $k-1$  回目のパレート解  $x_p^{(k-1)}$  が得られているとする. このとき, 方程式

$$F(x_0^{(k)}) = F(x_p^{(k-1)}) + \gamma_k \|F(x_p^{(k-1)})\| \quad (8)$$

を満たすような  $x_0^{(k)}$  を求める. ここで,  $\gamma_k$  は  $[-1, 1]$  のパラメータである. しかし,  $x_p^{(k-1)}$  の値によっては方程式 (8) が解を持たないことがある. そこで, (8) が解をもたないときは, 初期点  $x_0^{(k)}$  を  $k-1$  回目のパレート解  $x_p^{(k-1)}$  の近傍にとることによって, 問題 (8) の近似を行う. すなわち

$$x_0^{(k)} = x_p^{(k-1)} + \zeta_k (\|x_0^{(k)}\| + \eta) \quad (9)$$

として,  $x_0^{(k)}$  を求める. ここで,  $\zeta_k$  は  $[-1, 1]$  の定数であり,  $\eta$  は正のパラメータである.

#### ■実験方法

問題 JOSa, PNR において 300 回の反復で最急降下法を解く際に, 2 回目以降の反復で上記の初期点の選定方法を実行する. そこで  $\gamma_k, \zeta_k$  を変化させながら繰り返し実験を行い, 得られたパレートフロントを見て最適なパラメータ  $\gamma_k, \eta$  を決定する. (9) の  $\eta$  は, 各反復において  $[-1, 1]$  でランダムに選んだ. また, 問題 (8) を解く際のソルバーとして, 非線形方程式問題の解を求める fsolve (MATLAB の Optimization Toolbox) を使用した.

#### ■実験結果

問題 JOSa, PNR において, 初期点をランダムに選んだ場合のパレート解をそれぞれ図 12, 14, 上記の方法で選んだ場合のパレート解をそれぞれ図 11, 13 に示す.

図 11, 12 を比べると,  $x_0$  を規則的に選んだ図の方が全体に均等にパレート解が得られていることがわかる. 特にランダムに選んだ図 11 では解の少ない  $x > 2$  の範囲において, 比較的多く解が得られている. また, 問題 JOS において実験的に得られたパラメータ  $\gamma_k, \eta$  はそれぞれ  $\gamma_k = 0.5\gamma, \eta = 1$  となった. ここで,  $\gamma$  は  $[-1, 1]$  でランダムに選ぶ.

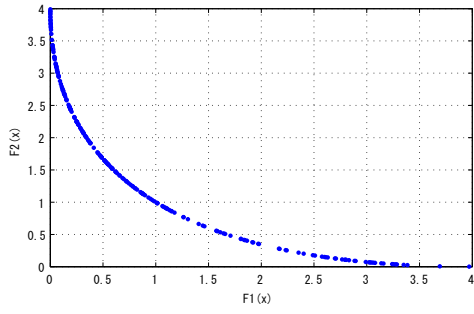


図 11: 規則的に選んだ場合 (JOSa)

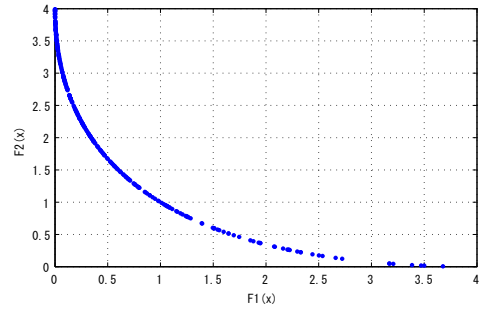


図 12: ランダムに選んだ場合 (JOSa)

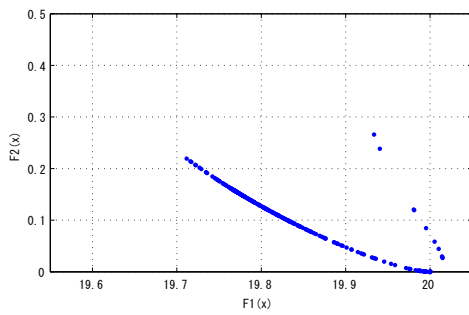


図 13: 規則的に選んだ場合 (PNR)

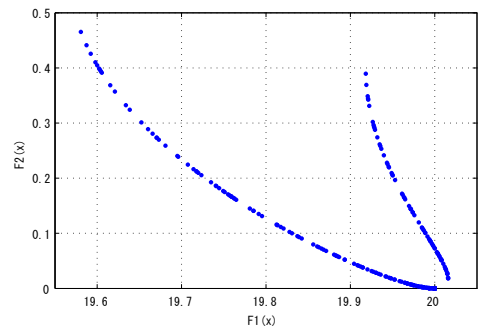


図 14: ランダムに選んだ場合 (PNR)

図 13, 14 を比べると, 求められた解の範囲が明らかに違うことがわかる. 図 13 では, 範囲は少し狭くなっているが, 局所的パレート解に収束した点がほとんどなく, ほぼすべての点がパレート解に収束しており, 精度の高さがうかがえる. 一方で初期点をランダムに選んだ図 14 では, 求められた範囲は広いが, 多くの点が局所的パレート解の方へ収束した. また, 問題 PNR において実験的に得られたパラメータは  $\gamma_k = 0.01\gamma$  であった. 今回, 方程式 (8) が解けなかった際の近似解を設定した問題 (9) は使用しないことにした. この問題 PNR では, 目的関数  $F_1(x)$  の値が  $F_2(x)$  の値に比べて極めて大きい. そのため,  $x$  を近傍で変化させても, 目的関数値は大きく変化する可能性があるからである.

## 6 まとめと今後の課題

本報告書では, 多目的最適化問題における最急降下法について実際に数値実験を行うことによって, その有効性について確かめた. その中で, スカラー化手法で解くことが困難だった問題を最急降下法では解くことができ, 解ける問題が拡張されることを確かめた. また, 最急降下法を解くうえで重要となる初期点の選定方法について考察し, 実験を行った.

多目的最適化問題において, 最近では最急降下法のほかにもパラメータを用いないアプローチの仕方が提案されてきた. これらは単一目的の最適化手法を拡張し, 近接勾配法や射影勾配法, ニュートン法等を提案している [1, 8, 9, 11]. また, 多目的最適化問題の拡張であるベクトル最適化問題について, 最急降下法を提案した論文もある [12]. 今後これらの文献を参考にしながら多目的最適化問題に関する理解を深め, よりよいアプローチの仕方を考案していきたいと考える.

日頃からご教授下さり, 本報告書の作成に当たっては細部に至るまで様々ご指摘や適切なご指導を賜った福田秀美助教に深く感謝の意を表します. また, 日頃からお世話になっている山下信雄准教授, 最適化研究室の皆様にも厚く御礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] H. Bonnel, A. N. Iusem, and B. F. Svaiter. Proximal methods in vector optimization. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 15, pp. 953–970, 2005.
- [2] E. Carrizosa, E. Conde, M. Muñoz-Márquez, J. Puerto. Planar point-objective location problems with nonconvex constraints: a geometrical construction. *Journal of Global Optimization*, Vol. 6, No. 1, pp. 77–86, 1995.
- [3] I. Das and J. E. Dennis. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 8, No. 3, pp. 631–657, March 1998.
- [4] H. Eschenauer, J. Koski, and A. Osyczka. *Multicriteria Design Optimization: Procedures and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] G. W. Evans. An overview of techniques for solving multiobjective mathematical programs. *Management Science*, Vol. 30, No. 11, pp. 1268–1282, 1984.

- [6] J. Fliege, L. M. Graña Drummond, and B. F. Svaiter. Newton's method for multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 20, No. 2, pp. 602–626, 2009.
- [7] J. Fliege and B. F. Svaiter. Steepest descent methods for multicriteria optimization. *Math. Meth. of OR*, Vol. 51, No. 3, pp. 479–494, 2000.
- [8] E. H. Fukuda and L. M. Graña Drummond. On the convergence of the projected gradient method for vector optimization. *Optimization*, Vol. 60, No. 8-9, pp. 1009–1021, 2011.
- [9] E. H. Fukuda and L. M. Graña Drummond. Inexact projected gradient method for vector optimization. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 54, No. 3, pp. 473–493, 2013.
- [10] E. H. Fukuda and L. M. Gra na Drummond. A survey on multiobjective descent methods, submitted 2013.
- [11] L. M. Graña Drummond and A. N. Iusem. A projected gradient method for vector optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 28, No. 1, pp. 5–29, 2004.
- [12] L. M. Graña Drummond and B. F. Svaiter. A steepest descent method for vector optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 175, No. 2, pp. 395–414, 2005.
- [13] J. Jahn. Scalarization in vector optimization. *Mathematical Programming*, Vol. 29, pp. 203–218, 1984.
- [14] Y. Jin, M. Olhofer, and B. Sendhoff. Dynamic weighted aggregation for evolutionary multi-objective optimization: Why does it work and how? In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference GECCO*, pp. 1042–1049. Morgan Kaufmann, 2001.
- [15] A. Jüschke, J. Jahn, and A. Kirsch. A bicriterial optimization problem of antenna design. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 7, No. 3, pp. 261–276, 1997.
- [16] C. T. Kelly. *Iterative Methods for Optimization*. Society for Industrial Mathematics, 1987.
- [17] D. T. Luc. Scalarization of vector optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 55, No. 1, pp. 85–102, 1987.
- [18] 千里柿田, 百合子伊佐田, 聖治南, 勇二仲川. 多目的離散最適化法を用いた投資信託最適組み合わせ問題 (組合せ最適化 (2)). *日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集*, Vol. 2001, pp. 58–59, sep 2001.
- [19] 福嶋雅夫. *非線形最適化の基礎*. 朝倉書店, 2001.
- [20] 矢部博. *工学基礎 最適化とその応用*. 数理工学社, 2006.