特別研究報告書

非線形２次錐最適化の
テスト問題とその解法について

指導教員　　　福田秀美　助教

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 23 年 4 月入学

飯塚　拓矢

平成 27 年 1 月 30 日提出

摘要

ある制約の下で目的関数を最小もしくは最大化する問題を最適化問題といい, その中でも 2 次錐制約と呼ばれる特別な制約を持つものを 2 次錐計画問題という. 非線形計画問題や 2 次計画問題など多くの問題を 2 次錐計画問題で再定式化することができ, ロバスト最適化など様々な数理最適化のモデリングに用いられている. 非線形 2 次錐計画問題を解く手法は現在も開発中であり, 新たな手法を提案するにあたってその手法の有用性を確かめるために実際の問題に対してテストを行う必要がある. 通常の非線形計画問題の場合は CUTEr/st などでテスト問題を簡単に見つけることができるが非線形 2 次錐計画問題ではテスト問題を見つけるのが困難であり, そのため数理実験を行う環境が適切ではない.

そこで本報告書では, 非線形 2 次錐計画問題に対するテスト問題として実際に論文などに用いられている問題ををまとめて投稿する. さらに逐次 2 次計画法と 2 乗スラック変数法を用いて数値実験を行うことでこのテスト問題の性質や最適解の存在などを確認した.

目次

1 序論

ある制約の下で目的関数値を最小もしくは最大化するような問題を最適化問題という．その中でも 2 次錐制約と呼ばれる特別な制約を持つような問題を **2** 次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming, **SOCP**) という．非線形計画問題 (Nonlinear Programming, **NLP**) や **2** 次計画問題 (Quadratic Programming, **QP**) など多くの問題を SOCP で再定式化することができ, ロバスト最適化など様々な数理最適化のモデリングに用いられている [1]. SOCP は半正定値計画問題 (Semidefinite Programming, **SDP**) の特殊な場合と見ることができるので SDP に再定式化して解くことも可能であるが, 直接取り扱うことにより計算コストを抑えられるという利点がある．目的関数と制約関数が線形な場合である線形 SOCP については長年多くの研究がなされてきており, 問題を解くためのアルゴリズムが提案されていて, またそれを実行するソフトウェアも改良されてきている.

非線形 **SOCP** (Nonlinear SOCP, **NSOCP**) に対しては逐次 **2** 次計画法 (Sequential Quadratic Programming, **SQP**) [17], 主双対内点法 [3, 4], 拡張ラグランジュ関数法 [19, 20], 2 次錐への射影を用いたニュートン法 [16], 正確なペナルティ関数法 [15], **2** 乗スラック変数法 [14] などの手法が開発されているが, これらの手法には欠点や未解決の問題がある．例えば, [3, 4] ではアルゴリズムの収束性について触れらておらず, [17] では問題を線形 SOCP として解く必要があり, アルゴリズムの局所的収束性や大域的収束性を保証するためには部分問題の実行可能解が存在することなど多くの仮定が必要となっている．[19, 20] では収束率が低くなっており, [16] では大域的収束性について議論していない. また, [15] では直線探索に多く時間がかかる可能性があり, [14] では数値的な特異性や不安定性を引き起こす可能性がある.

NSOCP の問題を解く手法を新たに提案するとき, その手法で最適解が求まるかや既存の手法と比べてよりよいものになっているかどうかを確認するために実際の問題に対してテストを行う．NLP の場合には CUTEr/st などにテスト問題が多く存在するが NSOCP ではテスト問題を見つけるのが困難であり, そのため数理実験を行うための環境が適切ではない．そこで本報告書では, NSOCP に対するテスト問題として実際に論文などに用いられている問題をまとめて投稿する.

本報告書の構成を述べる．2 節では Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件やジョルダン代数など 2 次錐計画問題に関しての基礎的事項を紹介する．3, 4 節では NSOCP に対する解法の例として既存のソルバーを用いて数値実験を比較的容易に行える SQP 法と 2 乗スラック変数法の 2 つについて説明する．まず 3 節では NSOCP に対する SQP 法について探索方向やステップ幅の計算方法について説明した後, それらを用いたアルゴリズムとそのアルゴリズ

ムの収束性について述べる．4 節では NSOCP に対する 2 乗スラック変数法を説明し, 元の NSOCP と再定式化された NLP の KKT 点の関係について制約想定に関しても触れながら述べる．5 節では SOCP のテスト問題を紹介する．6 節では 5 節で挙げたテスト問題の性質や最適解の存在などを確認するため SQP 法と 2 乗スラック変数法の 2 つの手法を用いて数値実験を行う．最後に 7 節では結論と今後の課題について述べる．

本報告書において, n 次元ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積, $\| \cdot \|$ はユークリッドノルムを表す．また, 微分可能な関数 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について, 点 $x \in \mathbb{R}^n$ における p の勾配ベクトルを $\nabla p(x)$, ヘッセ行列を $\nabla^2 p(x)$, q のヤコビ行列を $Jq(x)$ と書く．また微分可能な関数 $r : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ について点 x における勾配ベクトルとヘッセ行列をそれぞれ $\nabla_x r(x,y),\ \nabla_x^2 r(x,y)$ と表す．n 次元の単位行列を I_n と書く．ある行列 A の転置行列を A^T と表し, A が半正定値 (正定値) 対称行列であることを $A \succeq 0$ $(A \succ 0)$ と表記する．また, 錐 K に対して K の内部の集合を $\mathrm{int}(K)$, 原点を除いた境界の集合を $\mathrm{bd}^+(K)$ と定義する．

2　準備

本節では SOCP に関する基本的事項について説明する．

2.1　2 次錐計画問題

以下では, ベクトル $z \in \mathbb{R}^n$ を

$$z := (z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

と表す. SOCP は以下の式で表される最適化問題である．

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \mathrm{s.t.} & g(x) = 0 \\ & h(x) \in K \end{array} \tag{1}$$

ここで $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ であり, K は s 個の 2 次錐の直積 $K = K^{l_1} \times \cdots \times K^{l_s}$(ただし $l_1 + \cdots + l_s = l$) で表され, l_i 次元の 2 次錐は

$$K^{l_i} := \begin{cases} \{(z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{l_i} \mid z_0 \geq \|\bar{z}\|\} & (l_i > 2) \\ \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\} & (l_i = 1) \end{cases}$$

で定義される．

問題 (1) の局所的最適解を $x \in \mathbb{R}^n$ とし, 関数 f, g, h は点 x において 2 回連続的微分可能であるとする．さらに, $h := (h_1, \ldots, h_s),\ h_i :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{l_i}\ (i = 1, \ldots, s)$ とする．このときこ

の問題の KKT 条件は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}&\nabla f(x) + Jg(x)^T\lambda - Jh(x)^T\mu = 0\\&g(x) = 0\\&h_i(x) \in K^{l_i},\ \mu_i \in K^{l_i}\\&h_i(x) \circ \mu_i = 0\ \ (i = 1, \ldots, s)\end{aligned}$$

ここで $\lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu := (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{R}^l$ はラグランジュ乗数を表し, 問題 (1) のラグランジュ関数は,

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + g(x)^T\lambda - h(x)^T\mu$$

で表される. また, 各 i について $h_i(x) \in K^{l_i},\ \mu_i \in K^{l_i}$ より $h_i(x) \circ \mu_i = 0$ と $h_i(x)^T\mu_i = 0$ は等価である [1]. この KKT 条件は適当な制約想定のもとで最適性の必要条件となる [23].

さらに, この問題の 2 次の十分条件, 狭義相補性条件, 解の非退化性を以下で定義する. 詳しくは [1, 6] を参照.

定義 2.1 $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+l}$ を問題 (1) の KKT 点とする. このとき問題 (1) の **2** 次の十分条件 (second-order sufficient condition) は, 任意の零でないベクトル $d \in C(x)$ に対して,

$$\left\langle \left(\nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu) + \sum_{i \in \tilde{\mathcal{I}}} H_i(x, \lambda, \mu) \right) d, d \right\rangle > 0$$

が成立することである. ここで集合 $\tilde{\mathcal{I}}, C(x)$, 関数 $H(x, \lambda, \mu)$ は,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}} &:= \left\{ i \in \{1, \ldots, s\} \middle|\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}),\ \mu_i \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}) \right\}\\C(x) &:= \{ d \in \mathbb{R}^n |\ Jg(x)d = 0, \langle \nabla f(x), d \rangle = 0,\ Jh(x)d \in T_K(h(x)) \}\\H_i(x, \lambda, \mu) &:= -\frac{\mu_{i0}}{h_{i0}(x)} Jh_i(x)^T \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & -I_{l_i - 1} \end{bmatrix} Jh_i(x)\end{aligned}$$

で与えられ, $T_K(h(x))$ は K の点 $h(x)$ における接錐である.

定義 2.2 $(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+l}$ を問題 (1) の KKT 点とする. このとき, 問題 (1) の狭義相補性条件 (strict complementarity) は

$$h_i(x) + \mu_i \in \mathrm{int}(K^{l_i})$$

が成立することである.

定義 2.3 問題 (1) の実行可能解 x に対して, 以下のベクトル

$$\begin{array}{ll}\nabla g_i(x) & (i = 1, \ldots, m)\\ Jh_i(x)^T \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & -I_{l_i - 1} \end{bmatrix} h_i(x) & (i \in \{1, \ldots, s\},\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}))\\ \nabla h_{i,j}(x) & (i \in \{1, \ldots, s\},\ h_i(x) = 0,\ j = 1, \ldots, s)\end{array}$$

が 1 次独立であれば, x は非退化 (nondegenerate) であるという.

2.2　ジョルダン代数

K を l 次元の 2 次錐とする. ベクトル $w, z \in \mathbb{R}^l$ に対して 2 次錐 K に関するジョルダン積は以下の式で定義される.

$$w \circ z := (\langle w, z \rangle, w_0 \bar{z} + z_0 \bar{w}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$$

このジョルダン積は次の性質を持つ.

命題 2.1　任意のベクトル $u, w, z \in \mathbb{R}^l$ に対して,

(a)　$u \circ z = z \circ u$

(b)　$u \circ ((u \circ u) \circ z) = (u \circ u) \circ (u \circ z)$

(c)　$e \circ u = u \circ e = u$

(d)　$(w + u) \circ z = (w \circ z) + (u \circ z)$

(e)　$\langle w \circ u, z \rangle = \langle u \circ z, w \rangle = \langle w \circ z, u \rangle$

が成立する. ここで, $e := (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^l$ は単位元である. 結合法則 $u \circ (w \circ z) = (u \circ w) \circ z$ については一般には成立しない.

また, このジョルダン積に関して, ベクトル $z \in \mathbb{R}^l$ に対する Arrow 行列を

$$\mathrm{Arw}(z) := \begin{bmatrix} z_0 & \bar{z}^T \\ \bar{z} & z_0 I_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

で定義する. このとき, 任意の $w, z \in \mathbb{R}^l$ に対して, $w \circ z = \mathrm{Arw}(z) w = \mathrm{Arw}(w) z$ が成立する. さらに $\mathrm{Arw}(z)$ が半正定値 (正定値) であることが $z \in K$ $(K \in \mathrm{int}(K))$ と等価であるので 2 次錐制約を半正定値制約で書き換えると SOCP を SDP として定式化することができる [14].

2.3 スペクトル分解

K を l 次元の 2 次錐とする．任意のベクトル $z \in \mathbb{R}^l$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\eta_1 := z_0 - \|\bar{z}\|,\ \eta_2 := z_0 + \|\bar{z}\| \\
c^{(1)} := \begin{cases} (1/2)(1, -\bar{z}/\|\bar{z}\|) & (\bar{z} \neq 0) \\ (1/2)(1, -\bar{w}) & (\bar{z} = 0) \end{cases} \\
c^{(2)} := \begin{cases} (1/2)(1, \bar{z}/\|\bar{z}\|) & (\bar{z} \neq 0) \\ (1/2)(1, \bar{w}) & (\bar{z} = 0) \end{cases} \\
\bar{w} \in \mathbb{R}^{l-1}\ :\ \|\bar{w}\| = 1 \text{ を満たす任意のベクトル}
\end{aligned}
$$

とおくと，$z = \eta_1 c^{(1)} + \eta_2 c^{(2)}$ と書くことができ，これをベクトル z の 2 次錐 K に関するスペクトル分解という．ここで η_1, η_2 は z の固有値，$c^{(1)}, c^{(2)}$ は z の固有ベクトル，$\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$ は z のジョルダンフレームである．またジョルダンフレームに関して，

(a) $c^{(1)} \circ c^{(2)} = 0$

(b) $c^{(1)} \circ c^{(1)} = c^{(1)},\ c^{(2)} \circ c^{(2)} = c^{(2)}$

(c) $c^{(1)} + c^{(2)} = e$

(d) $c^{(1)}, c^{(2)}$ は K の境界に含まれる

が成立する．また以下のように，この固有値の値からベクトルが 2 次錐 K あるいは $-K$ のどの部分に含まれているか，つまりベクトルが $z = 0,\ z \in \mathrm{int}(K),\ z \in \mathrm{bd}^+(K),\ z \in \mathrm{int}(-K),\ z \in \mathrm{bd}^+(-K)$ のどれに当てはまるかを知ることができる [1].

命題 2.2 ベクトル $z \in \mathbb{R}^l$ の固有値を η_1, η_2 $(\eta_1 < \eta_2)$ とするとき，以下の関係が成立する．

(a) $z = 0 \Longleftrightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0$

(b) $z \in \mathrm{bd}^+(K) \Longleftrightarrow \eta_1 = 0,\ \eta_2 > 0$

(c) $z \in \mathrm{int}(K) \Longleftrightarrow \eta_1 > 0$

(d) $z \in \mathrm{bd}^+(-K) \Longleftrightarrow \eta_1 < 0,\ \eta_2 = 0$

(c) $z \in \mathrm{int}(-K) \Longleftrightarrow \eta_2 < 0$

3 逐次 2 次計画法

本節では SOCP に対する **SQP** 法について説明する．定理や補題の証明や詳しい内容は [17] を参考にしていただきたい．SQP 法では各反復において目的関数を 2 次近似，制約関数を 1 次近似して得られる 2 次計画問題を解いて探索方向を求め，その方向に探索していく反

復法である. k 回目の反復における x, λ, μ の値をそれぞれ x^k, λ^k, μ^k と表し, さらに以下の 2 つを仮定する.

仮定 3.1　解 x^k が非退化性 (定義 2.3) を持つ.

仮定 3.2　問題 (1) の 2 次の十分条件 (定義 2.1) を満足する

3.1　探索方向

探索方向を決定するため, 各反復 k で以下のような問題 (1) の部分問題を考える. これは線形 SOCP で再定式化できるので解法が一般の NSOCP より開発が進んでいる.

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x} \quad & \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T M_k \Delta x \\ \text{s.t.} \quad & g(x^k) + Jg(x^k)^T \Delta x = 0 \\ & h(x^k) + Jh(x^k)^T \Delta x \in K \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は k 回目の反復におけるラグランジュ関数のヘッセ行列を正定値対称行列で近似した行列を表す. $M_k \succ 0$ より, 目的関数が狭義凸関数となるため最適解は存在すれば唯一となる. また等式制約と錐の制約に関するラグランジュ乗数をそれぞれ ζ, η とすると, この問題は凸計画問題であるので, ある制約想定のもとで $(\Delta x, \zeta, \eta)$ が KKT 条件を満たすとき Δx は最適解となる. この結果を用いて Δx を次の x の探索方向, ζ, η をそれぞれ次の λ, μ として反復を繰り返していく. また k 回目の反復における問題 (2) の最適解 Δx^k について, 以下の命題が成立する.

命題 3.1　x^k が問題 (1) の停留点である場合に限り, $\Delta x^k = 0$ が問題 (2) の最適解となる.

ニュートン法では, 解の探索方向として降下方向を選ぶことが望ましくなっている. ここで問題 (1) に対するペナルティ関数を,

$$\begin{aligned} P_a(x) &:= f(x) + a(\psi(x) + \phi(x)) \\ \psi(x) &:= \sum_{i=1}^{m} |g_i(x)| \\ \phi(x) &:= \sum_{j=1}^{s} \max\{0,\ -h_{j0}(x) + \|\overline{h_j(x)}\|\} \end{aligned} \tag{3}$$

で定義する. ここで, $a > 0$ はペナルティパラメータである. 点 x における関数 ψ, ϕ の Δx 方向微分係数に関して以下の補題が成立する.

補題 3.1　点 x における ϕ の Δx 方向微分係数に関して, 以下の式が成立する.

$$\phi'(x;\Delta x) = \sum_{j\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2}\left(-\nabla h_{j0}(x)^T\Delta x + \frac{\overline{h_j(x)}^T J\overline{h_j(x)}}{\|\overline{h_j(x)}\|}\Delta x\right) + \sum_{j\in\mathcal{J}_3\cup\mathcal{J}_4}\left(-\nabla h_{j0}(x)^T\Delta x + \|\ J\overline{h_j(x)}\Delta x\|\right)$$

ここで, 各添字集合 $\mathcal{J}_k$ $(k=1,2,3,4)$ は,

$$\mathcal{J}_1 := \left\{j\in\{1,\ldots,s\}|\ h_{j0}(x) < \|\overline{h_j(x)}\|,\ \overline{h_j(x)}\neq 0\right\}$$
$$\mathcal{J}_2 := \left\{j\in\{1,\ldots,s\}|\ h_{j0}(x) = \|\overline{h_j(x)}\|\neq 0,\ \nabla h_{j0}(x)^T\Delta x < \frac{\overline{h_j(x)}^T J\overline{h_j(x)}}{\|\overline{h_j(x)}\|}\Delta x\right\}$$
$$\mathcal{J}_3 := \left\{j\in\{1,\ldots,s\}|\ h_{j0}(x) < \|\overline{h_j(x)}\|,\ \overline{h_j(x)} = 0\right\}$$
$$\mathcal{J}_4 := \left\{j\in\{1,\ldots,s\}|\ h_{j0}(x) = \|\overline{h_j(x)}\| = 0,\ \nabla h_{j0}(x)^T\Delta x < J\overline{h_j(x)}\Delta x\right\}$$

である.

補題 3.2　$(\Delta x^k,\zeta^k,\eta^k)$ は問題 (2) の KKT 条件を満たすとする. このとき, $a\geq\eta^k_{j0}$ $(j=1,\ldots,s)$ ならば以下の不等式が成立する.

$$-\sum_{j=1}^{s}(\eta^k_j)^T h_j(x^k) + a\phi'(x^k;\Delta x^k)\leq 0$$

補題 3.3　Δx^k を問題 (2) の最適解とする. このとき, 以下の等式が成立する.

$$\psi'(x^k;\Delta x^k) = -\sum_{i=1}^{m}|g_i(x^k)|$$

この 3 つの補題より, ペナルティ関数の方向微分係数について以下の定理が成立する.

定理 3.1　$(\Delta x^k,\zeta^k,\eta^k)$ は問題 (2) の KKT 条件を満たすとする. このとき, $a\geq\max\{\max_{1\leq i\leq m}|\zeta^k_i|,\ \max_{1\leq j\leq s}\eta^k_{j0}\}$ ならば点 x^k におけるペナルティ関数 P_a の Δx^k 方向微分係数について以下の不等式が成立する.

$$P'_a(x^k;\Delta x^k)\leq -(\Delta x^k)^T M_k\Delta x^k$$

この定理より探索方向 Δx^k が点 x^k においてこの問題の降下方向になっていることがわかる. また命題 3.1 より, $\|\Delta x^k\|$ の値が十分に小さいとき, (x^k,λ^k,μ^k) が問題 (1) の KKT 条件を満たす. SQP 法の仮定より KKT 条件を満たすことが最適解であることの必要十分条件となっているので, このとき x^k は問題 (1) の最適解となる. このことは, 反復法の終了条件として用いられる.

3.2　ステップ幅

ここではステップ幅の選び方について説明する．正確な直線探索を行うのは困難な場合が多いので, ここでは緩和された直線探索法の 1 つであるアルミホ条件 [24] を用いてステップ幅を決定する方法について述べる．

k 回目の反復における x の探索方向を Δx^k, 得られたステップ幅を t_k とする．このとき, $0 < \xi < 1$ であるような定数 ξ に対して,

$$P_a(x^k + t_k\Delta x^k) \le P_a(x^k) + \xi t_k P'_a(x^k; \Delta x^k)^T \Delta x^k \tag{4}$$

が成立する. 定理 3.1 の仮定を満たすようにペナルティパラメータ a を選ぶと (4) 式は,

$$P_a(x^k) - P_a(x^k + t_k\Delta x^k) \ge \xi t_k (\Delta x^k)^T M_k \Delta x^k \tag{5}$$

と書き換えられる．ここで, $t_k = \beta^r \ (\beta \in (0,1))$ とおき (5) 式を満たす最小の正数 r の値を求めてステップ幅 t_k を決定する．

3.3　正定値行列の更新公式とアルゴリズム

ここではラグランジュ関数のヘッセ行列の近似行列 M_k の各反復での更新方法について説明する．1 つ目の更新方法は変形ニュートン公式 (modified Newton formula) である．この方法では行列 M_k を以下の式で更新する．

$$M_k = \begin{cases} I_n & (k=0) \\ \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k) & (k \ge 1,\ \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k) \succ 0) \\ \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k) + (|\sigma_k| + \epsilon) I_n & \text{その他} \end{cases} \tag{6}$$

ここで, σ_k は $\nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ の最小固有値, ϵ は正の定数である．

2 つ目の更新方法は準ニュートン公式 (quasi-Newton formula) である．この方法では以下の漸化式で行列 M_k を更新する．

$$\begin{aligned} M_0 &= I_n \\ M_{k+1} &= M_k - \frac{M_k v^k (v^k)^T M_k}{(v^k)^T M_k v^k} + \frac{u^k (u^k)^T}{(v^k)^T u^k} \\ v^k &= x^{k+1} - x^k \\ w^k &= \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^k, \mu^k) - \nabla_x L(x^k, \lambda^k, \mu^k) \\ u^k &= \theta_k w^k + (1-\theta_k) M_k v^k \\ \theta_k &= \begin{cases} 1 & ((v^k)^T w^k \ge 0.2 (v^k)^T M_k v^k) \\ \frac{0.8 (v^k)^T M_k v^k}{(v^k)^T (M_k v^k - w^k)} & \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

以上の議論をふまえた SQP 法のアルゴリズムを以下に記す.

アルゴリズム 3.1　2 次錐計画問題に対する SQP 法

Step 0　初期点 x^0, パラメータ $a_0 > 0,\ \beta \in (0,1),\ \xi \in (0,1),\ \tau > 0,\ \delta > 0,\ \epsilon > 0$ を選ぶ. $k = 0$ とする.

Step 1　(6) または (7) 式で正定値対称行列 M_k を更新し, 問題 (2) を解く.

Step 2　$\|\Delta x^k\| \leq \delta$ ならば x^k を解として反復を終了. そうでなければ Step 3 に進む.

Step 3　ペナルティパラメータ a_k を以下の式で更新する.

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k & (a_k \geq \rho_k) \\ \rho_k + \tau & \text{その他} \end{cases}$$

ここで, $\rho_k = \max\left\{\max_{1\leq i\leq m} |\zeta_i^k|,\ \max_{1\leq j\leq s} \eta_{j0}^k\right\}$ である.

Step 4　次式を満たす最小の正数 r を求める.

$$P_a(x^k) - P_a(x^k + \beta^r \Delta x^k) \geq \xi \beta^r (\Delta x^k)^T M_k \Delta x^k$$

Step 5　$x^{k+1} = x^k + \beta^r \Delta x^k,\ k = k+1$ として Step 1 に戻る.

3.4　収束性

ここではアルゴリズム 3.1 の収束性について述べる. ここで新たに以下の 2 つを仮定する.

仮定 3.3　各反復において, 部分問題 (2) が KKT 条件を満たす点 $(\Delta x^k, \zeta^k, \eta^k)$ を持つ.

仮定 3.4　点列 $\{(x^k, \zeta^k, \eta^k)\}$ は有界である.

このとき, 次の定理が成立しアルゴリズムの大域的収束性が保証される.

定理 3.2　仮定 3.3, 3.4 が成立するとする. 点列 $\{(x^k, \zeta^k, \eta^k)\}$ はアルゴリズム 3.1 で生成され, (x^*, ζ^*, η^*) は任意の集積点であるとする. また, 以下の不等式を満たす正の数 γ, Γ が存在すると仮定する.

$$\gamma\|z\|^2 \leq \langle M_k z, z\rangle \leq \Gamma\|z\|^2,\ {}^\forall z \in \mathbb{R}^n,\ {}^\forall k \in \{0,1,2,\ldots\}$$

このとき, (x^*, ζ^*, η^*) は問題 (1) の KKT 条件を満たす.

次に, 局所的収束性について述べるために問題の KKT 条件を以下の形で書き換える.

$$0 \in F(y) + \partial\delta_C(y) \tag{8}$$

$$\partial\delta_C(y) := \begin{cases} \emptyset & (y \notin C) \\ \{w \mid w^T(c - y) \leq 0,\ {}^\forall c \in C\} & (y \in C) \end{cases}$$

ここで F はベクトル値関数である.

$$y := \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix},\ F(y) := \begin{bmatrix} \nabla_x L(y) \\ \nabla_\lambda L(y) \\ \nabla_\mu L(y) \end{bmatrix},\ C := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K$$

とすると (8) は問題 (1) の KKT 条件を表す. また問題 (2) の KKT 条件は $M_k := \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ とすると,

$$0 \in F(z^k) + F'(z^k)(z - z^k) + \partial\delta_C(z) \tag{9}$$
$$z^k := \begin{bmatrix} x^k \\ \zeta^k \\ \eta^k \end{bmatrix},\ z := \begin{bmatrix} x^k + \Delta x \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

で表される.

ここで解の正則性 (regular solution) を以下で定義する.

定義 3.1　y^* を (8) の解とし, F は y^* でフレシェ微分可能であるとする. また集合値関数 T を $T(y) := F(y^*) + F'(y^*)(y - y^*) + \partial\delta_C(y)$ で定義する. 零の近傍 U と y^* の近傍 V が存在して関数 $T^{-1} \cap V$ が U 上で一価関数かつリプシッツ連続であるとき, y^* は正則解である.

F のリプシッツ定数を L とし, また $k = 0$ のとき (9) が正則解を持ち $T^{-1} \cap V$ のリプシッツ定数を Λ とする. このとき, z_0 を y^* の十分近くに取ると (9) は各反復において正則解を持ち, 以下の不等式が成立する.

$$\|z^k - y^*\| \leq (2^{n+m+l}\Lambda L)^{-1}(2\Lambda L\|z^0 - z^1\|)^{2^k}$$

これより点列 $\{z^k\}$ は y^* に r-2 次収束する.

また, 局所的最適解 x^* が非退化であれば (x^*, λ^*, μ^*) が問題 (1) の 2 次の十分条件を満たす場合に限り正則解となる. 以上より以下の結果が得られる.

定理 3.3　$M_k = \nabla_x^2(x^k, \lambda^k, \mu^k)$, またある正の定数 $\bar{k}$ が存在して, 任意の $k > \bar{k}$ に対して $t_k = 1$ とする. $k > \bar{k}$ を満たす k に対して (x^k, λ^k, μ^k) が, 仮定 3.1, 3.2 を満たすような問題 (1) の KKT 点 (x^*, λ^*, μ^*) の十分近くであるとき, 点列 (x^k, λ^k, μ^k) は (x^*, λ^*, μ^*) に r-2 次収束する.

4　2 乗スラック変数法

本節では SOCP に対する **2** 乗スラック変数法について説明する. 詳しい内容は [14] を参照.

新しく集合 Λ^l を $\Lambda^l := \{z \circ z |\ z \in \mathbb{R}^l\}$ で定義すると, $K^l = \Lambda^l$ が成立することが知られている [1]. 従って, 変数 $y := (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^l,\ y_i \in \mathbb{R}^{l_i}\ (i = 1, \ldots, s)$ を導入すると, 問題 (1) は,

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) = 0 \\ & h_i(x) - y_i \circ y_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, s) \end{aligned} \tag{10}$$

と変形できる. 変数 y はスラック変数であり, ここでは特に y_i の 2 乗を用いるためこの方法を 2 乗スラック変数法という. この変形した問題 (10) は通常の NLP であるので既存の NLP ソルバーを使って解くことができる.

$x \in \mathbb{R}^n$ が問題 (1) の大域的 (局所的) 最適解であれば (x, y) が問題 (10) の大域的 (局所的) 最適解となるような $y \in \mathbb{R}^m$ が存在し, また $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ が問題 (10) の大域的 (局所的) 最適解であれば x は問題 (1) の大域的 (局所的) 最適解である. 従って, 問題 (1) と問題 (10) は最適解について等価である. 停留点の等価性については明らかではないが, NLP に対する数値計算では停留点を計算するように設計されているので以下では適当な仮定のもとでの停留点に関する等価性について述べる. 問題 (10) は通常の NLP なので KKT 条件はラグランジュ関数 $\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) := f(x) + g(x)^T\lambda - \sum_{i=1}^{s} \langle \mu_i, h_i(x) - y_i \circ y_i \rangle$, ラグランジュ乗数 λ, μ を用いて,

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,y)} \mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) &= 0 \\ g(x) &= 0 \\ h_i(x) - y_i \circ y_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

と表される. ここで, $\nabla_{(x,y)} \mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu)$ はラグランジュ関数の (x, y) に関する勾配を表す. 実際にこの勾配を計算すると, KKT 条件は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + Jg(x)^T\lambda - \sum_{i=1}^{s} Jh_i(x)^T \mu_i &= 0 \\ \mu_i \circ y_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, s) \\ g(x) &= 0 \\ h_i(x) - y_i \circ y_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

4.1　KKT 点について

ここでは元の問題 (1) と書き換えられた問題 (10) の KKT 点の関係性について述べる．ここで, いくつかの添字集合を以下で定義する.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 &:= \{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) = 0\} \\
\mathcal{I}_B &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_I &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{int}(K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{00} &:= \{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) = 0,\ \mu_i = 0\} \\
\mathcal{I}_{0B} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) = 0,\ \mu_i \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{0I} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) = 0,\ \mu_i \in \mathrm{int}(K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{B0} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}),\ \mu_i = 0\right\} \\
\mathcal{I}_{BB} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}),\ \mu_i \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{I0} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{int}(K^{l_i}),\ \mu_i = 0\right\} \\
\mathcal{I}_{0N} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) = 0,\ \mu_i \notin (K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{BN} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{bd}^+(K^{l_i}),\ \mu_i \notin (K^{l_i})\right\} \\
\mathcal{I}_{IN} &:= \left\{i \in \{1,\ldots,s\} |\ h_i(x) \in \mathrm{int}(K^{l_i}),\ \mu_i \notin (K^{l_i})\right\}
\end{aligned}
$$

添字全体の集合を $\mathcal{I} := \{1,\ldots,s\}$ とすると, 集合 $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_B, \mathcal{I}_I$ は集合 $\mathcal{I}$ の分割, つまり $\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_B \cup \mathcal{I}_I = \mathcal{I},\ \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_B \cap \mathcal{I}_I = \emptyset$ が成立する．同様に, $\mathcal{I}_{00}, \mathcal{I}_{0B}, \mathcal{I}_{0I}, \mathcal{I}_{0N}$ は $\mathcal{I}_0$ の分割, $\mathcal{I}_{I0}, \mathcal{I}_{IN}$ は $\mathcal{I}_I$ の分割, $\mathcal{I}_{B0}, \mathcal{I}_{BB}, \mathcal{I}_{BN}$ は $\mathcal{I}_B$ の分割である.

命題 4.1　$(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+l+m}$ を問題 (1) の KKT 点とする．このとき, ある $y \in \mathbb{R}^l$ が存在して (x, y, λ, μ) が問題 (10) の KKT 点となる.

この命題の逆は一般には成立しない．それは問題 (10) の KKT 点のラグランジュ乗数が必ずしも 2 次錐に含まれるとは限らないからである．しかし, 通常の NLP である問題 (10) の 2 次の十分条件 [23] を仮定すればこの逆も成立する.

定義 4.1　$(x, y, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2l+m}$ を問題 (10) の KKT 点とする．このとき, 問題 (10) の 2 次の十分条件は, 零でない任意のベクトル $(v, w) \in \mathcal{C}(x)$ に対して,

$$
\langle \nabla_x^2 L(x, \lambda, \mu) v, v \rangle + 2 \sum_{i=1}^{s} \langle w_i \circ w_i, \mu_i \rangle > 0
$$

が成立することである．ここで, $v = (v_1^T, v_2^T)^T,\ v_1 \in \mathbb{R}^n,\ v_2 \in \mathbb{R}^m$ とすると集合 $\mathcal{C}(x)$ は,

$$\mathcal{C}(x) := \left\{ (v, w) \in \mathbb{R}^{n+m+l} \;\middle|\; \begin{array}{ll} Jg(x)v_1 = 0 & \\ Jh_i(x)v_2 = 0 & (i \in \mathcal{I}_0) \\ Jh_i(x)v_2 - 2y_i \circ w_i = 0 & (i \in \mathcal{I}_I \cup \mathcal{I}_B) \end{array} \right\}$$

で定義される集合である．

命題 4.2　$(x, y, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2l+m}$ は問題 (10) の KKT 点であり, かつ問題 (10) の 2 次の十分条件を満たすとする．このとき, (x, λ, μ) は問題 (1) の KKT 点である．

命題 4.3　$(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+l+m}$ は問題 (1) の KKT 点であり, かつ問題 (1) の 2 次の十分条件を満たすとする．このとき, ある $y \in \mathbb{R}^l$ が存在して (x, y, λ, μ) が問題 (10) の KKT 点となり, かつ問題 (10) の 2 次の十分条件を満たす．

命題 4.3 より, 命題 4.1 の条件に加えて問題 (1) の 2 次の十分条件が成立することを仮定すれば, 他に仮定を課さなくても問題 (10) の KTT 点は問題 (10) の 2 次の十分条件を満たすことがわかる．この逆は成立しないが, 命題 4.2 にさらに仮定を追加すれば問題 (1) の KKT 点は問題 (1) の 2 次の十分条件を満たす．またこの仮定により, 加えて狭義相補性も成立する．

命題 4.4　$(x, y, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2l+m}$ は問題 (10) の KKT 点であり, かつ問題 (10) の 2 次の十分条件, $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$ が成立するとする．このとき, (x, λ, μ) は問題 (1) の KKT 点であり, 2 次の十分条件, 狭義相補性を満たす．

2 次の十分条件を満たす KKT 点が問題の最適解となるためには KKT 条件が最適性の必要条件とならなければならない．KKT 条件が最適性の必要条件になることを保証する制約想定はいくつかあるが, ここでは **1** 次独立制約想定 (linear independence constraint qualification, **LICQ**) について考える．ある点が LICQ を満たすとは, 等式制約と有効な不等式制約の勾配ベクトルが 1 次独立であることである．NLP である問題 (10) の場合, 以下の行列

$$\begin{bmatrix} Jg(x) & 0 & \cdots & 0 \\ Jh_1(x) & -2\mathrm{Arw}(y_1) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ Jh_s(x) & 0 & 0 & -2\mathrm{Arw}(y_s) \end{bmatrix}$$

がフルランクであることと等価である．実際, ある NSOCP が特別に NLP であれば非退化性は LICQ と等価である．

命題 4.5　$(x, y, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2l+m}$ は問題 (10) の KKT 点であり, 問題 (10) の 2 次の十分条件, LICQ を満たすとする．このとき, (x, λ, μ) は問題 (1) の非退化な KKT 点である．

命題 4.2 に加えて LICQ を仮定すれば問題 (1) の KKT 点は非退化性を持つ．逆は問題 (1) が特別に NLP となる場合にのみ成立する．一般の SOCP の場合では成立しないが 2 次の十分条件を仮定すると逆も成立する．

定理 4.1　$(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+l+m}$ は問題 (1) の KKT 点であり, 問題 (1) の 2 次の十分条件, 非退化性を満たすとする．このとき, ある $y \in \mathbb{R}^l$ が存在して (x, y, λ, μ) が問題 (10) の KKT 点となり, 問題 (10) の 2 次の十分条件と LICQ を満たす．さらに, (x, λ, μ) が加えて狭義相補性を満たすとき, $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$ も成立する．

また命題 4.4, 4.5 をまとめると以下の結果が得られる．

定理 4.2　$(x, y, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2l+m}$ は問題 (10) の KKT 点であり, 問題 (10) の 2 次の十分条件, LICQ, $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$ が成立するとする．このとき, (x, λ, μ) は問題 (1) の KKT 点であり, 問題 (1) の 2 次の十分条件, 狭義相補性, 非退化性が成立する．

5　テスト問題

本節では SOCP のテスト問題を列挙する．まず初めに問題の目的関数や制約関数, 各変数の値や最適値, 最適解の性質について紹介し, 最後にすべての問題の参考文献や次元を 1 つの表にまとめたものを記載する．以降, 次元を表す変数であり解くときに自ら決定するものをユーザー変数と呼ぶ．

1. Kanzow, Ferenczi and Fukushima (2009) [16]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_5 - 4 \\ x_3 - x_6 \\ x_1 - x_7 \\ x_2 - x_8 - 4 \\ x_3 - x_9 - 4 \end{pmatrix} = 0 \\ & x \in K^3 \times K^3 \times K^3 \end{aligned}$$

   決定変数は $x \in \mathbb{R}^9$．この問題は線形な SOCP であり, 最適値は $2\sqrt{2}$, 最適解は $x = (2\sqrt{2}, 2, 2, 2\sqrt{2}, -2, 2, 2\sqrt{2}, -2, -2)^T$ である．また, この最適解は狭義相補性を満たさない．

2. Kanzow, Ferenczi and Fukushima (2009) [16]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2-2)^2 - \frac{1}{4}x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & x \in K^3 \end{aligned}$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^3$. この問題は非線形かつ非凸な SOCP であり, 最適値は 1, 最適解は $x = (1, 1, 0)^T$ である. また, この最適解は狭義相補性条件, 2 次の十分条件を満たす.

3. Kanzow, Ferenczi and Fukushima (2009) [16]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \exp(x_1 - x_3) + 3(2x_1 - x_2)^4 + \sqrt{1 + (3x_2 + 5x_3)^2} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in K^2 \\ & x \in K^3 \end{aligned}$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^3$. この問題は非線形かつ凸な SOCP でり, 最適値は 2.598, 最適解は $x = (0.2324, -0.07309, 0.2206)^T$ である.

4. Bai and Wang (2007) [3]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax - b = 0 \\ & x \in K^4 \times K^4 \times K^4 \times K^4 \end{aligned}$$

ただし, $A = [A_1, \cdots, A_4],\ c = [c_1^T, \cdots, c_4^T]^T$ であり,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ c_i &= (2, 1, 0, 0)^T\ (i = 1,\ \ldots,\ 4) \\ b &= (23, 14, 14, 17)^T \end{aligned}$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^{16}$. この問題は線形な SOCP であり, 最適値は 9.9888, 最適解は

$$\begin{aligned} x = (&3.5781, -0.3184, 2.1206, 2.8643, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, \\ &1.6000, -\ 0.0491, 0.5800, 1.4904, 0.0000, -\ 0.0000, 0.0000, 0.0000)^T \end{aligned}$$

である.

5. Bai and Wang (2007) [3]

$$\begin{aligned} \max_{y,s} \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y + s - c = 0 \\ & s \in K^4 \times K^4 \times K^4 \times K^4 \end{aligned}$$

A, b, c に関しては問題 4 を参照.

決定変数は $y \in \mathbb{R}^4, s \in \mathbb{R}^{16}$. この問題は線形な SOCP であり, 問題 4 の双対問題である. またこの問題の最適値は 9.9888, 最適解は

$$\begin{aligned} y &= (0.1989, 0.1415, 0.0712, 0.1433)^T \\ s &= (1.0317, 0.0918, -0.6115, -0.8259, 1.5154, 0.4287, -0.5403, -0.7667, \\ &\quad 0.9769, 0.0299, -0.3542, -0.9100, 0.9186, 0.5755, -0.3979, -0.4855)^T \end{aligned}$$

である.

6. Bai, Wang and Roos (2007) [4]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax - b = 0 \\ & x \in K^4 \times K^4 \times K^4 \times K^4 \end{aligned}$$

ただし, $A = [A_1, \cdots, A_4], c = [c_1^T, \cdots, c_4^T]^T$ であり,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_i = (2, 1, 0, 0)^T \ (i = 1, \ \ldots, \ 4)$$

$$b = (30, 30, 31, 38)^T$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^{16}$. この問題は線形な SOCP であり, 最適解は 10.4262, 最適解は

$$\begin{aligned} x = (&2.5443, -0.3703, 2.1926, 1.2364, 0.7436, -0.2832, 0.3310, 0.6027, \\ &1.9296, -0.3155, 1.5154, 1.1521, 0.4932, -0.0262, 0.4600, 0.1759)^T \end{aligned}$$

である.

7. Bai, Wang and Roos (2007) [4]

$$
\begin{aligned}
\max_{y,s} \quad & b^T y \\
\text{s.t.} \quad & A^T y + s - c = 0 \\
& s \in K^4 \times K^4 \times K^4 \times K^4
\end{aligned}
$$

A, b, c に関しては問題 6 を参照.

決定変数は $y \in \mathbb{R}^4, s \in \mathbb{R}^{16}$. この問題は線形な SOCP であり, また問題 6 の双対問題である. またこの問題の最適値は 10.4262, 最適解は

$$
\begin{aligned}
y &= (0.0563, 0.0536, -0.0313, 0.2131)^T \\
s &= (1.2007, 0.1747, -1.0347, -0.5835, 1.2347, 0.4701, -0.5495, -1.0007, \\
&\quad 0.8830, 0.1444, -0.6935, -0.5272, 1.0461, 0.0556, -0.9757, -0.3731)^T
\end{aligned}
$$

である.

8. Ko, Chen and Yang (2011) [18]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& x \in K^3 \times K^3 \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
b = & (9, 20, 6, 4, 8)^T
\end{aligned}
$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^6$. この問題は線形な SOCP であり, 最適値は 18, 最適解は $x = (3, 1, 2, 5, 3, 4)^T$ である.

9. Burer and Anstreicher (2013) [7]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & x^T Q x + c^T x \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in K^3 \\
& \begin{pmatrix} 1 \\ H^{1/2}(x - h) \end{pmatrix} \in K^3
\end{aligned}
$$

ここで,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c = (2,0)^T,\ h = (2,0)^T$$

とする.

決定変数は $x \in \mathbb{R}^2$. この問題は非線形かつ非凸な SOCP であり, 信頼領域部分問題という非線形最適化に対する信頼領域法において重要となる部分問題であり, その中でも信頼領域に関する制約を 2 つ持つ特別な場合の問題である. またこの問題の最適値は 1, 最適値は $x = (1,0)^T$ である.

10. Burer and Anstreicher (2013) [7]

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in K^3 \\ & \begin{pmatrix} 1 \\ H^{1/2} x \end{pmatrix} \in K^3 \end{aligned}$$

ここで,

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c = (1,1)^T$$

とする.

決定変数は $x \in \mathbb{R}^2$. この問題は非線形かつ目的関数が凹関数である SOCP であり, 問題 9 同様に信頼領域部分問題の特別な場合である. またこの問題の最適値は–4, 最適解は $x = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ である.

11. Canelas, Carrasco and López (2014) [8]

$$\begin{aligned} \min_{w,b} \quad & \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} w^T \mu_1 - b - 1 \\ \kappa_1 S_1^T w \end{pmatrix} \in K^{n+1} \\ & \begin{pmatrix} b - w^T \mu_2 - 1 \\ \kappa_2 S_2^T w \end{pmatrix} \in K^{n+1} \end{aligned}$$

決定変数は $w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. ここで, n はデータセットに含まれる変数, μ_i, Σ_i $(i = 1,2)$ はデータセットから求まるそれぞれのクラスの平均と分散共分散行列であり, $\Sigma_i = S_i S_i^T,\ \eta_i \in (0,1),\ \kappa_i = \sqrt{\frac{1-\eta_i}{\eta_i}}$ $(i = 1,2)$ とする. この問題は非線形かつ凸

な SOCP であり, クラス 1 か 2 に属している訓練データを誤識別の割合がそれぞれ η_1, η_2 を越えず, かつマージンが最大となるような境界を求める問題である. ここでマージンとは各クラスの境界に最も近い点と境界との距離の和である.

12. Kato and Fukushima (2007) [17]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & x^T C x + \sum_{i=1}^{n} (d_i x_i^4 + f_i x_i) \\
\text{s.t.} \quad & Ax + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in K := K^{l_1} \times \cdots \times K^{l_s}
\end{aligned}
$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^n$, ユーザー変数は $n, l_1, \dots, l_s$ (ただし $n = l_1 + \cdots + l_s$). ここで d_i $(i = 1, \dots, n)$ は区間 [0,1] 内の乱数, f_i $(i = 1, \dots, n)$ は区間 [-1,1] 内の乱数, 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の各要素は区間 [0,2] 内の乱数, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は正定値対称行列で行列 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて $C := Z^T Z$ と定義し Z の各要素は区間 [0,1] 内の乱数とする. またベクトル $b_j \in \mathbb{R}^{l_j}$ $(j = 1,\ \dots,\ s)$ は $b_{j0} = 1,\ \bar{b}_j = 0$ とする. この問題は非線形かつ凸な SOCP である.

13. Fukuda and Fukushima (2014) [14]
問題 12 において, 行列 C を不定値対称行列に変更し, 各要素を区間 [0,1] 内の乱数とする. この問題は非線形かつ非凸な SOCP である.

14. Kato and Fukushima (2007) [17]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & x^T C x + \sum_{i=1}^{n} (d_i x_i^4 + g_i x_i^3 + f_i x_i) \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} a_1(e^{x_1} - 1) \\ a_2(e^{x_2} - 1) \\ \vdots \\ a_n(e^{x_n} - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{a}_1 x_1 x_2 \\ \hat{a}_2 x_2 x_3 \\ \vdots \\ \hat{a}_n x_n x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in K := K^{l_1} \times \cdots \times K^{l_s}
\end{aligned}
$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^n$, ユーザー変数は $n, l_1, \dots, l_s$ (ただし $n = l_1 + \cdots + l_s$). ここで $a_i, \hat{a}_i, g_i, f_i$ $(i = 1, \dots, n)$ そして行列 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の各要素は区間 [-1,1] 内の乱数, d_i $(i = 1, \dots, n)$ は区間 [0,1] 内の乱数とする. またベクトル $b_j \in \mathbb{R}^{l_j}$ $(j = 1, \dots, s)$ は $b_{j0} = 1,\ \bar{b}_j = 0$ とする. この問題は非線形かつ非凸な SOCP である.

15. Chen and Pan (2010) [9]

$$
\begin{aligned}
\min_{u,v,w,s_i} \quad & \left(1-\frac{k}{r}\right)\sum_{i=1}^{r} v_i + \frac{k}{r}\sum_{i=1}^{r} w_i + l(u) \\
\text{s.t.} \quad & A_i u + s_i = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \\
& (w_1 - v_1) - (w_j - v_j) = 0 \quad (j = 2, \ldots, r) \\
& u_i \in K^1 \quad (i = 1, \ldots, l) \\
& v_i \in K^1,\ (w_i, s_i) \in K^{m_i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)
\end{aligned}
$$

決定変数は $u \in \mathbb{R}^l, v \in \mathbb{R}^r, w \in \mathbb{R}^r, s_i \in \mathbb{R}^{m_i} (i = 1, \ldots, r)$, ユーザー変数は l, r, k. ここで, $l(u) := \frac{1}{3}\|u\|_3^3$, m_i は区間 $\{2, \ldots, 10\}$ 内の乱数 , $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times l}$ の各要素は区間 [-1,1] 内の乱数, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ の各要素は区間 [-5,5] 内の乱数とする. この問題は非線形かつ凸な SOCP であり, ベクトル $s_1, \ldots, s_r$ の中からユークリッドノルムの大きい順に k $(k \leq r)$ 個取り出しそのノルムの和と凸である正則化項 $l(u)$ を最小化する問題である.

16. Chi and Liu (2009) [11]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax - b = 0,\ x \in K^{100}
\end{aligned}
$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^{100}$ ここで, 行列 $A \in \mathbb{R}^{50 \times 100}$ は列フルランクのランダム行列, また $p \in K^{100},\ q \in K^{100},\ r \in \mathbb{R}^{50}$ をランダムベクトルとし $b = Ap,\ c = A^T r + q$ とする. この問題は線形な SOCP である.

17. Chi and Liu (2009) [11]

$$
\begin{aligned}
\max_{y,s} \quad & b^T y \\
\text{s.t.} \quad & A^T y + s - c = 0,\ s \in K^{100}
\end{aligned}
$$

A, b, c に関しては問題 16 を参照.

決定変数は $y \in \mathbb{R}^{50}, s \in \mathbb{R}^{100}$. この問題は線形な SOCP であり, 問題 16 の双対問題である.

18. Chen and Tseng (2005) [10]

$$
\begin{aligned}
\min_{z,w,s_i} \quad & \sum_{i=1}^{M} z_i + l(w) \\
\text{s.t.} \quad & A_i w + s_i = b_i \\
& (z_i, s_i) \in K^{m_i+1} \quad (i = 1, \ldots, M) \\
& w_i \in K^1 \quad (i = 1, \ldots, l)
\end{aligned}
$$

決定変数は $z \in \mathbb{R}^M, w \in \mathbb{R}^l, s_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i = 1, \ldots, M)$, ユーザー変数は l, r, M. ここで, $c = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^l$ を用いて $l(w)$ は, $l(w) := c^T w$ または $l(w) := c^T w + \frac{1}{3}\|w\|_3^3$, m_i は区間 $\{2, \ldots, r\}$ $(r \geq 2)$ 内の乱数, $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times l}$ の各要素は区間 [-1,1] 内の乱数, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ の各要素は区間 [-5,5] 内の乱数とする. この問題は線形な SOCP であり, $\|A_i w - b_i\|$ の和と凸である正則化項 $l(w)$ を $w \geq 0$ の範囲で最小化する問題である.

19. Fang, He and Hu (2009) [12]

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax - b = 0 \\
& x \in K^n
\end{aligned}
$$

決定変数は $x \in \mathbb{R}^n$, ユーザー変数は n, m. ここで $A = [B, P]$ であり, 行列 $P \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ は各成分が正規分布に従う擬似乱数値である行列, 行列 $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は

$$
B = \begin{pmatrix}
100 & 2 & & & \\
-2 & 100 & 2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -2 & 100 & 2 \\
 & & & -2 & 100
\end{pmatrix}
$$

とする. また, $c = 10e_n + 4q - 2d_n,\ b = 10e_m + 4r - 2d_m$ であり, $q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^m$ は各成分が一様分布に従う擬似乱数値であるベクトル, $d_n \in \mathbb{R}^n, d_m \in \mathbb{R}^m$ は各要素がすべて 1 であるようなベクトル, $e_n \in \mathbb{R}^n, e_m \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれの次元の単位元である. この問題は線形な SOCP である.

またテスト問題についてまとめたのが表 1 であり, 左から順番に問題番号, 参考文献, 決定変数の次元, 等式制約の次元, 2 次錐制約の次元, 目的関数・制約関数の性質を表す. また問題 5 のように決定変数が複数存在する場合はそれぞれの次元をリストを用いて表記する. 等式制約や 2 次錐制約が複数ある場合も同様にリストを用いる. ここで, m_{1-r} は $m_1, \ldots, m_r$, $m_{1-r} + 1$ は $m_1 + 1, \ldots, m_r + 1$, $1 * r$ は 1 を r 個横に並べた $1, 1, \ldots, 1$ を表す.

表 1　テスト問題一覧

問題	参考文献	決定変数	等式制約	2 次錐制約	目的関数	制約関数
1	[16]	9	6	[3,3,3]	線形	線形
2	[16]	3	-	3	二次 · 非凸	線形
3	[16]	3	-	2	非線形 · 凸	線形
4	[3]	16	4	16	線形	線形
5	[3]	[4,16]	16	16	線形	線形
6	[4]	16	4	16	線形	線形
7	[4]	[4,16]	16	16	線形	線形
8	[18]	6	5	[3,3]	線形	線形
9	[7]	2	-	[3,3]	二次 · 非凸	線形
10	[7]	2	-	[3,3]	二次 · 非凸	線形
11	[8]	[n,1]	-	[n+1,n+1]	二次 · 凸	線形
12	[17]	n	-	n	非線形 · 凸	線形
13	[14]	n	-	n	非線形 · 非凸	線形
14	[17]	n	-	n	非線形 · 非凸	非線形 · 非凸
15	[9]	$[l, r, r, m_{1-r}]$	$[m_{1-r}, r*(r-1)]$	$[1*l, 1*r, m_{1-r}+1]$	非線形 · 凸	線形
16	[11]	100	50	100	線形	線形
17	[11]	[50,100]	100	100	線形	線形
18	[10]	$[M, l, m_{1-M}]$	$[m_{1-M}]$	$[m_{1-M}+1, 1*l]$	非線形 · 凸	線形
19	[12]	n	m	n	線形	線形

6　数値実験

本節では, 5 節で紹介したテスト問題の性質や解の存在を確認するため, SQP 法と 2 乗スラック変数法を適用した数値実験結果を示す.

6.1 SQP 法を用いた実験

この実験ではテスト問題に対して SQP 法を適用する．実験は CPU が Intel(R) Core(TM) i7-4650 1.70GHz, メモリが 8.00 GB の計算機上で行い, プログラムの実装には MATLAB (R2013a) を用いた．また部分問題である線形 SOCP を解くためのソルバーとして SeDuMi 1.3 [22] を使用した． 各パラメータの値は [17] や [21] を参考に $a_0 = 1, \beta = 0.5, \xi = 10^{-4}, \tau = 0.01, \delta = 10^{-4}, \epsilon = 0.1$ と設定した．各問題に対する計算結果が表 2 であり, 左から順に問題番号, 外部反復, 内部反復, 実行不可能性, 最適性, 最適値, 結果を表す．ここで, 実行不可能性とはある点が実行可能領域からどれくらい離れているかを表すものである．問題 11 以降の各パラメータについては以下の通りである.

- 問題 11: データセットには Pima Indians Diabetes (DIA) を用い, 誤差率は $(\eta_1, \eta_2) = (0.9, 0.9)$.
  データセットの詳細については [2] を参照.
- 問題 12-14: 2 次錐 K は $K = K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$.
- 問題 15: $(l, r, k) = (50, 10, 5)$.
- 問題 18: $(l, r, M) = (50, 10, 5)$
- 問題 19: $(n, m) = (120, 80)$

SQP 法ではすべて問題で最適解を求めることができた.

次に問題 12 以降の係数に乱数を含んでいる問題についてそれぞれ 10 回ずつ数値実験を行い反復数についてまとめたものが表 3, 4, 5, 6, 7 であり, それぞれ左から問題番号, 場合分け, 外部反復の中央値, 最小値, 最大値, 内部反復の中央値, 最小値, 最大値を表す．2 次錐の取り方や各パラメータについてはそれぞれの表を参考.

6.2 2 乗スラック変数法を用いた実験

この実験ではテスト問題に対して 2 乗スラック変数法を適用する．問題はすべてモデリング言語 AMPL [13] を用いてモデリングし, スラック変数を用いて再定式化された NLP を解くためのソルバーには ALGENCAN [5] という Fortran 内で拡張ラグランジュ法を適用して解くソルバーを使用する．拡張ラグランジュ法では外部反復でペナルティパラメータやラグランジュ乗数を更新し, 内部反復で制約なし, もしくはボックス制約のみの部分問題を解くことになる．この実験は CPU が Intel(R) Core(TM)2Duo 3.00GHz×2, メモリが 3.9GiB, OS が Linux(Ubuntu 14.04) の計算機上で行った．各問題に対する計算結果が表 8 であり, 左から順に問題番号, 外部反復, 内部反復, 実行不可能性, 最適性, 最適値, 結果を表す．問題

表 2　SQP 法を用いた実験結果 (問題 1-19)

問題	外部反復	内部反復	実行不可能性	最適性	最適値	結果
1	14	182	7.994e-15	1.709e-5	2.828e+0	最適解
2	61	726	0.000e+0	3.204e-5	1.000e+0	最適解
3	16	167	0.000e+0	8.712e-5	2.598e+0	最適解
4	11	140	2.398e-13	7.707e-5	9.989e+0	最適解
5	7	88	6.203e-13	3.637e-5	9.989e+0	最適解
6	17	205	1.451e-8	5.623e-5	1.043e+1	最適解
7	2	30	4.222e-11	3.771e-8	1.043e+1	最適解
8	1	19	1.288e-8	1.556e-8	1.800e+1	最適解
9	1	25	1.714e-8	9.259e-5	1.000e+0	最適解
10	2	28	4.378e-9	2.096e-8	-4.000e+0	最適解
11	1370	15684	0.000e+0	8.865e-5	1.083e-2	最適解
12	6	85	0.000e+0	5.593e-5	-2.946e+0	最適解
13	45	556	0.000e+0	7.751e-5	-9.265e+2	最適解
14	473	4855	1.320e-4	9.979e-5	-4.742e+3	最適解
15	67	820	5.450e-9	9.941e-5	2.581e+1	最適解
16	6	78	7.189e-11	1.275e-5	4.838e+2	最適解
17	7	101	1.384e-11	1.711e-5	4.838e+2	最適解
18	13	146	1.344e-5	3.981e-5	2.412	最適解
19	2	33	3.843e-9	1.943e-5	9.121e-1	最適解

11 以降の各パラメータは 6.1 節を参照. 問題 14, 15, 18 以外はすべて最適解を求めることができた. 問題 14 では制約式に指数関数が含まれているため ALGENCAN の反復計算の途中で値を正しく求めることができなくなり正しい結果を得ることができなかった. 問題 15, 18 は ALGENCAN では反復数が増えても最適解に収束することはできなかったが問題の実行可能性を表す関数 $\mathcal{F}(x) := \|g(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{s} \|h_i(x) - y_i \circ y_i\|^2$ の停留点には収束することが確かめられた.

次に, 問題 12 以降の係数に乱数を含んでいる問題の中で ALGENCAN で最適解を求めることができなかった問題 15, 18 を除く 6 つの問題についてそれぞれ 10 回ずつ数値実験を行い反復数についてまとめたものが表 9, 10, 11 であり, それぞれ左から問題番号, 場合分け, 外部反復の中央値, 最小値, 最大値, 内部反復の中央値, 最小値, 最大値を表す. 2 次錐の取り方や各パラメータについてはそれぞれの表を参考. 問題 14 では上記のとおり正しい結果を得ら

表 3　SQP 法を用いた実験結果 (問題 12-14)

問題	K	外部反復 中央値	外部反復 最小値	外部反復 最大値	内部反復 中央値	内部反復 最小値	内部反復 最大値
12	$K^5 \times K^5$	6	5	7	81.5	60	92
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	6	5	8	83	68	101
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	6	5	8	83.5	72	104
13	$K^5 \times K^5$	8.5	6	29	103	72	317
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	29	13	339	342	156	3556
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	43.5	21	200	474.5	243	2168
14	$K^5 \times K^5$	14.5	7	52	139.5	63	484
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	53.5	17	204	618.5	218	2313
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	339	72	491	3733.5	835	6196

表 4　SQP 法を用いた実験結果 (問題 15)

問題	(l, r, k)	外部反復 中央値	外部反復 最小値	外部反復 最大値	内部反復 中央値	内部反復 最小値	内部反復 最大値
15	$(20, 10, 2)$	15	12	20	163	128	260
	$(50, 10, 2)$	19.5	17	29	235.5	196	461
	$(50, 10, 5)$	40	19	287	450	129	2758

表 5　SQP 法を用いた実験結果 (問題 16-17)

問題	外部反復 中央値	外部反復 最小値	外部反復 最大値	内部反復 中央値	内部反復 最小値	内部反復 最大値
16	5	4	6	62.5	47	72
17	7	6	8	81.5	75	89

れない場合があるので正しく結果が得られた 10 回の数値実験データを用いた．またこのエラーの割合は問題の次元が増加にともなって大きくなることを確認した．

表 6　SQP 法を用いた実験結果 (問題 18)

問題	(l, r, M)	外部反復			内部反復		
		中央値	最小値	最大値	中央値	最小値	最大値
18	$(20, 10, 2)$	7	4	64	77.5	50	619
	$(50, 10, 2)$	11	10	15	116	98	162
	$(50, 10, 5)$	13.5	11	18	152.5	122	205

表 7　SQP 法を用いた実験結果 (問題 19)

問題	$(n,\ m)$	外部反復			内部反復		
		中央値	最小値	最大値	中央値	最小値	最大値
19	(20, 20)	1	1	1	12	11	13
	(100, 50)	2	2	2	27	24	31
	(120, 80)	2.5	2	11	33	28	118

表 8　2 乗スラック変数法を用いた実験結果 (問題 1-19)

問題	外部反復	内部反復	実行不可能性	最適性	最適値	結果
1	11	40	4.435e-9	6.447e-9	2.828e+0	最適解
2	10	22	5.193e-9	3.097e-9	1.000e+0	最適解
3	11	39	8.840e-10	2.283e-9	2.598e+0	最適解
4	12	180	1.373e-9	2.666e-9	9.989e+0	最適解
5	8	62	9.024e-10	2.393e-9	9.989e+0	最適解
6	7	50	6.875e-11	4.597e-9	1.043e+1	最適解
7	7	32	6.545e-9	3.516e-9	1.043e+1	最適解
8	7	25	7.096e-9	7.022e-10	1.800e+1	最適解
9	13	31	2.686e-9	2.054e-9	1.000e+0	最適解
10	10	98	2.719e-9	2.955e-12	-4.000e+0	最適解
11	14	82	4.517e-9	3.367e-9	1.083e-2	最適解
12	5	88	2.913e-10	5.220e-9	-2.947e+0	最適解
13	6	79	1.473e-9	2.070e-9	-9.265e+2	最適解
14						エラー
15	24	13536	1.638e-9	1.028e+4	-1.277e+8	$\mathcal{F}$ の停留点
16	14	43	5.675e-9	9.724e-9	4.838e+2	最適解
17	6	32	7.413e-9	2.161e-9	4.838e+2	最適解
18	18	894	4.807e-10	3.973e+8	-3.964e+16	$\mathcal{F}$ の停留点
19	22	79	8.562e-9	2.852e-9	9.121e-1	最適解

表 9　2 乗スラック変数法を用いて最適解を得られた問題の実験結果 (問題 12-14)

問題	K	外部反復			内部反復		
		中央値	最小値	最大値	中央値	最小値	最大値
12	$K^5 \times K^5$	6	4	12	63	29	6021
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	6	4	7	84.5	47	1073
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	6	5	7	154.5	68	1273
13	$K^5 \times K^5$	6	4	8	46.5	31	146
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	6	5	7	84.5	56	286
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	6	5	14	187.5	54	10486
14	$K^5 \times K^5$	8.5	6	19	42	22	84
	$K^5 \times K^5 \times K^{20}$	7.5	5	14	70	39	111
	$K^5 \times K^5 \times K^{20} \times K^{20}$	8	6	12	119	82	374

表 10　2 乗スラック変数法を用いて最適解が得られた問題の実験結果 (問題 16-17)

問題	外部反復			内部反復		
	中央値	最小値	最大値	中央値	最小値	最大値
16	14.5	13	17	44.5	32	60
17	12.5	11	14	36.5	28	47

表 11　2 乗スラック変数法を用いて最適解が得られた問題の実験結果 (問題 19)

問題	$(n,\ m)$	外部反復			内部反復		
		中央値	最小値	最大値	中央値	最小値	最大値
19	(20, 20)	8	6	10	28.5	21	33
	(100, 50)	15	13	19	45.5	39	55
	(120, 80)	18	15	28	53	42	81

7　結論と今後の課題

本報告書では, NSOCP についてのテスト問題とそれに対する解法として SQP 法と 2 乗スラック変数法の 2 つの手法を紹介し, 実際に数値実験を行うことによってテスト問題の性質や最適解の存在についてを確認した.

今回紹介したテスト問題には線形 SOCP の問題が多くなっており, また NSOCP の場合でも人工的に作られた問題が多く問題 11 のように応用問題に由来するテスト問題はあまり紹介することができなかった. 今後の課題としては数値実験のために作られた人工的な問題だけでなくロバスト最適化など様々な応用問題に関するテスト問題を紹介していくことが挙げられる.

謝辞

日頃からご教授下さり, 本報告書の作成に当たっては細部に至るまで様々なご指摘や適切なご指導を賜った福田秀美助教に深く感謝の意を表します. また, 日頃からお世話になっている山下信雄教授, 最適化研究室の皆様に厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb. Second-order cone programming. *Mathematical Programming*, 95(1):3–51, 2003.

[2] A. Asunction and D.J. Newman. UCI machine learning repository. http://archive.ics.uci.edu/ml/, 2007.

[3] Y.Q. Bai and G.Q. Wang. Primal-dual interior-point algorithm for second-order cone optimization based on a new parametric kernel function. *Acta Mathematica, Sinica, English Series*, 23(11):2027–2042, 2007.

[4] Y.Q. Bai, G.Q. Wang, and C. Roos. Primal-dual interior-point algorithm for second-order cone optimization based on kernel functions. *Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications*, 70(10):3584–3602, 2009.

[5] E.G. Birgin and J.M. Martínez. *Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization.* SIAM, Philadelphia, 2014.

[6] J.F. Bonnans and C. Ramírez. Perturbation analysis of second-order cone programming. *Mathematical Programming*, 104(2-3):205–227, 2005.

[7] S. Burer and K.M. Anstreicher. Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1):432–451, 2013.

[8] A. Canelas, M. Carrasco, and J López. A feasible direction algorithm for nonlinear second-order cone optimization problems. 投稿中, 2014.

[9] J.-S. Chen and S. Pan. A one-parametric class of merit functions for the second-order cone complementarity problem. *Computational Optimization and Applications*, 45(3):581–606, 2010.

[10] J.-S. Chen and P. Tseng. An unconstrained smooth minimization reformulation of the second-order cone complementarity problem. *Mathematical Programming*, 104(2-3):293–327, 2005.

[11] X. Chi and S. Liu. A one-step smoothing Newton method for second-order cone programming. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(1):114–123, 2009.

[12] L. Fang, G. He, and Y. Hu. A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 215(3):1020–1029, 2009.

[13] R. Fourer, N. Gould, and B.W Kernighan. A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, 36(5):519–554, 1990.

[14] E.H. Fukuda and M. Fukushima. The use of squared slack variables in nonlinear second-order cone programming. 投稿中, 2014.

[15] E.H. Fukuda, P.J.-S. Silva, and M. Fukushima. Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs. *SIAM Journal on Optimization*, 22(4):1607–1633, 2012.

[16] C. Kanzow, I. Ferenczi, and M. Fukushima. On the local convergence of semismooth Newton method for linear and nonlinear second-order cone programs without strict complementarity. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1):297–320, 2009.

[17] H. Kato and M. Fukushima. An SQP-type algorithm for nonlinear second-order cone programs. *Optimization Letters*, 1(2):129–144, 2007.

[18] C.-K. Ko, J.-S. Chen, and C.-Y. Yang. Recurrent neural networks for solving second-order cone programs. *Neurocomputing*, 74(17):3646–3653, 2011.

[19] Y.-Z. Liu and L.-W. Zhang. Convergence analysis of the augmented Lagrangian method for nonlinear second-order cone optimization problems. *Nonlinear Anal*, 67:1359–1373, 2007.

[20] Y.-Z. Liu and L.-W. Zhang. Convergence of the augmented Lagrangian method for

nonlinear optimization problems over second-order cones. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 139(3):557–575, 2008.

[21] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2000.

[22] J.F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. 2008.

[23] 福島雅夫. 非線形最適化の基礎. 朝倉書店, 2011.

[24] 矢部博. 工学基礎 最適化とその応用. 数理工学社, 2006.