

特別研究報告書

L1-L2 最適化問題に対する双対法

指導教員 山下信雄 教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 21 年 4 月入学

杉本 顕彦

平成 28 年 1 月 29 日提出

摘要

本報告書で扱う L1-L2 最適化問題は、目的関数が線形方程式 $Ax = b$ の二乗和である L2 項と最適解の疎性を与える L1 項の和で表された制約なし最小化問題である。この L1-L2 最適化問題は、機械学習や圧縮センシングなどに現れ、最近では制御や信号処理にも応用されている重要な問題である。この問題に対してよく用いられる解法に、近接勾配法を高速化した Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA) がある。FISTA の 1 回の反復時間は $O(mn)$ である。ここで、 m と n は行列 A のサイズを表す数である。FISTA によって近似的な解を効率的に求めることができるが、有限回の反復で厳密解が求まるわけではない。

本報告書では、この L1-L2 最適化問題を厳密に解くために凸 2 次計画問題に対する双対法を使うことを考える。そのために、まず L1-L2 最適化問題の Fenchel 双対問題を導出する。この双対問題は目的関数のヘッセ行列が単位行列となる凸 2 次計画問題となる。この性質を利用した双対法の 1 回の反復の計算量は FISTA と同じ $O(mn)$ となる。また、双対法で求まる最適解の非ゼロ成分は高々 m となる。一般に L1-L2 最適化問題の最適解は唯一ではないので、この性質は応用上望ましいものである。さらに、FISTA と比較した数値実験結果を行った。その結果、FISTA よりも高速に疎な最適解が求められることがわかった。