

特別研究報告書

条件付き VaR 最適化に対する拡張ラグランジュ法

指導教員 福田エレン秀美 准教授
山下信雄 教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 28 年 4 月入学

川上 篤史

令和 2 年 1 月 29 日提出

摘要

ポートフォリオ最適化問題とは、複数の投資対象が存在するときに、投資家にとって最適な資産配分 (ポートフォリオ) を求める問題である。ポートフォリオの最適性を数理的に評価するにあたって最も大切なことは、リスクのモデル化である。Markowitz は平均・分散モデルにおいてポートフォリオの収益率の分散をリスクとすることを提案した。分散はポートフォリオの凸 2 次関数として表されるため最適化が考えやすい反面、分散をリスクとするポートフォリオ最適化問題は入力の変化に対し敏感であったりしばしば極端で直観に反する結果を解としてもたらすという問題がある。実務家によく使われるバリュー・アット・リスク (Value-at-Risk, VaR) は、その定義が理解しやすいが、凸性やコヒーレント性がなく、数理的に良い性質を持っていない。これらのリスクモデルの欠点を克服するものとして条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional Value-at-Risk, CVaR) がある。CVaR は凸性やコヒーレント性というリスク尺度として好ましい性質をもつ。CVaR はある関数の期待値として定義される。その期待値の計算をサンプリングによって近似した場合、CVaR の最適化は max 関数を含むが、スラック変数を導入することによって線形計画問題として表現できる。一方で CVaR をより正確に計算するためには莫大な数のサンプルを用意する必要がある。線形計画問題の決定変数はサンプル数に比例するため、CVaR の最適化は計算時間を抑えなければならないという課題がある。

本報告書では、より高速に CVaR 最適化問題を解くために拡張ラグランジュ法を用いることを提案する。まず max 関数を含む CVaR 最適化問題に対してある特別な変数を導入した等価な問題を構成する。その等価な問題に対する拡張ラグランジュ関数を定義する。拡張ラグランジュ関数の最小化は微分不可能な max 関数を含むが、導入した変数の最小化を先に行うことによって、微分可能な最適化問題にすることができ、既存のソルバーで解くことができる。また、実データに対して提案手法を用いた数値実験を行い、CVaR 最適化がサンプル数の増加に対し線形計画問題の手法である内点法より高速に解くことができることを示す。