

# リアルタイムプロセス最適化技術の高度化に関する研究

江本 源一



# 目次

第1章	序論	5
1.1	研究の背景と目的	5
1.2	本論文の構成	8
第2章	時系列最適化問題に対する逐次2次計画 分解法の適用	11
2.1	はじめに	11
2.2	時系列最適化問題の定式化	12
2.3	逐次2次計画分解法アルゴリズム	16
2.4	計算実験	20
2.5	おわりに	23
第3章	時系列最適化問題に対する主双対内点法の適用	25
3.1	はじめに	25
3.2	複数装置の多期間計画問題	26
3.3	主双対内点法	28
3.4	適用事例	36
3.4.1	対象プロセス	36
3.4.2	モデリング	38
3.4.3	計算実験	42
3.4.4	システムの実装	42
3.5	おわりに	46
第4章	発電プラントにおけるタービン負荷配分の大域的最適化	47
4.1	はじめに	47
4.2	タービンのモデリング	48
4.3	タービン負荷配分最適化の定式化	50
4.4	リップシツ最適化	52
4.5	例題への適用	57

4.6	現実問題への適用 . . . . .	63
4.7	おわりに . . . . .	65
<b>第 5 章 モデル誤差を考慮した最適化システムの</b>		
	<b>効果予測手法</b>	<b>67</b>
5.1	はじめに . . . . .	67
5.2	最適コストの評価モデル . . . . .	68
5.2.1	2 レベル数理計画問題への定式化 . . . . .	68
5.2.2	等価な MPCC とその解法 . . . . .	70
5.3	モデル誤差の定式化 . . . . .	73
5.3.1	重回帰分析による区間推定 . . . . .	73
5.3.2	モデル誤差の許容範囲を規定する不等式 . . . . .	75
5.4	発電設備の運転最適化システムへの適用 . . . . .	77
5.4.1	定式化 . . . . .	77
5.4.2	変数スケーリング . . . . .	82
5.4.3	計算実験 . . . . .	84
5.5	おわりに . . . . .	86
<b>第 6 章 結論</b>		<b>87</b>

# 第1章 序論

## 1.1 研究の背景と目的

多大なエネルギーを消費する化学、石油精製、鉄鋼、紙パルプなどのプロセス産業において省エネルギーを追求していくことはコスト競争力の維持、CO<sub>2</sub>削減の観点から最重要な課題の一つである。省エネルギー実現の手段としてプロセスの最適化は鍵となる技術であり、プラントの設計、運転、生産計画などの局面で線形計画法(LP)、混合整数計画法(MIP)、非線形計画法(NLP)などの数理計画手法が従来から多大な貢献をしてきた[19, 49]。特にプラントの運転においては1990年代からリアルタイム最適化の適用が計算機の急速な能力向上や商用パッケージの開発と相俟って、エチレンプラントなどの大規模石油化学プラントや石油精製プラントを中心に急速に進んできた[16, 53, 62, 25, 59, 65, 20, 28, 37, 13, 58]。リアルタイム最適化は定常状態においてプロセスを物理化学モデル(一般に非線形な代数方程式群として表現される)にもとづいて定式化し、さらにコスト最小化もしくは利益最大化を達成するような目標関数に対して逐次2次計画法などの非線形最適化手法を用いて最適な運転条件を求めることにより、それを運転員を介さずに下位の制御システムの目標値として自動的に設定するものである。

下位の制御システムとしては蒸留塔や反応器などのユニットをカバーする多変数モデル予測制御[17, 16]が用いられ、多変数制御システム自体が線形な最適化機能を有している場合も多い[88]ので上位の非線形最適化との協調をうまくとることが必要である[27]。

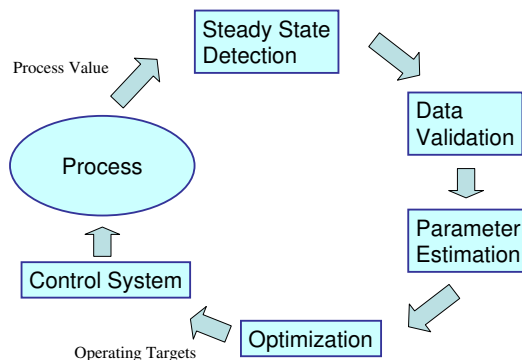


図 1.1: CLRTO cycle

リアルタイム最適化は図 1.1 に示すような CLRTO ( Closed Loop Real Time Optimization) サイクルと呼ばれるデータ収集, データチェック ( データリコンシレーション ), パラメータ計算, 最適化計算, 最適化計算結果の制御システムへのダウンロード, アイドリング, といった手順の繰り返しによって実現され [25], 最適化問題は一般に以下のように定義される [76].

$$\begin{aligned} \max \quad & J(x, p) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x, p) = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & g_j(x, p) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで  $p$  は熱交換器の総括伝熱係数や触媒の活性など運転時間の経過によって変化するパラメータを示し最適化問題 (1.1) を解くたびに, 事前に温度や圧力などのプロセスの状態量から求めておく.  $f$  はプロセスモデルを示し, 非線形な代数方程式群として表現される. たとえば熱交換器をモデルリング対象とした場合,  $f$  は以下のように記述される.

$$f_1 = x_q - x_{fcold} C_{pcold} (x_{cout} - x_{cin}) = 0 \quad (1.2)$$

$$f_2 = x_q - x_{fhot} C_{phot} (x_{hin} - x_{hout}) = 0 \quad (1.3)$$

$$f_2 = x_q - P_u A x_{lmtd} = 0 \quad (1.4)$$

$$f_3 = x_{lmtd} = \frac{(x_{hin} - x_{cout}) - (x_{hout} - x_{cin})}{\ln\{(x_{hin} - x_{cout}) / (x_{hout} - x_{cin})\}} = 0 \quad (1.5)$$

ここで,  $x_{fcold}$  は低温流体流量,  $x_{fhot}$  は高温流体流量,  $x_{cin}$  は低温流体入口温度,  $x_{cout}$  は低温流体出口温度,  $x_{hin}$  は高温流体入口温度,  $x_{hout}$  は高温流体出口温度,  $x_q$  は熱交換器の熱負荷,  $x_{lmtd}$  は対数平均温度,  $P_u$  は総括伝熱係数,  $A$  は伝熱面積,  $C_{pcold}$  は低温流体比熱,  $C_{phot}$  は高温流体比熱である. ここで  $x$  は変数であり, その温度もしくは流量の一部は計測されているものとする. 総括伝熱係数は熱交換器の汚れにより, 運転時間の経過とともに変化していくのでパラメータとして扱われる. 比熱や伝熱面積は定数である. 仮に  $x_{cout}$  以外の温度, 流量が計測されているとすれば, CLRTO サイクルのパラメータ計算のフェイズでは  $x_{cout}$ ,  $x_q$ ,  $x_{lmtd}$ ,  $P_u$  を変数とした (1.2) 式 ~ (1.5) 式の連立方程式を解くことによって  $P_u$  が求まり, 最適化計算のフェイズでは  $P_u$  を固定して適当な温度もしくは流量に自由度を与えて最適化問題を解くことになる. このようにプロセスモデルを等式制約として表現し, 最適化問題として定式化するアプローチは“ Equation based modeling ”[77] と呼ばれ, ほとんどのリアルタイム最適化の商用パッケージ; Aspen Custom Modeler (Aspen Technology 1998), ASCEND(Weterberg 1998), RT-OPT(Aspen Technology), ROMEO(Simulation Sciences 1999) などはこの方式を採用している [19]. 一般にリアルタイム最適化における変数  $x$  の次数は  $10^3 \sim 10^5$  であり, 最適化の自由度は 10 ~ 100 程度と言われている [76]. たとえば Lowely ら [62] によるとビスフェ

ノール A プラントのリアルタイム最適化では最適化問題は 41,147 変数,37,641 のモデルを表現する方程式, 212 の制約条件を表す不等式から構成され, SQP 法によって解かれている。

現在のリアルタイム最適化はあるクラスの問題を解く上では, ほぼ成熟していると考えられるが, 未だに適用範囲は大規模な石油精製プラント, 石油化学プラント, 発電プラントなどにとどまり, 中小規模のプラントやバッチプラントへのリアルタイム最適化の適用は進んでいない。その原因としてプラントの物理化学法則にもとづいて厳密モデルを積み上げていくモデルの開発とその維持に多大なマンパワーを要すること, 最適化結果の検証が困難であることなど様々な原因が考えられ, 技術的に未だ発展途上であることも示唆されている [93, 76, 11, 26]。その課題を列挙すれば以下のとおりである。

### 1. 最適化結果の検証

最適化の効果は運転条件の変動などによって目に見えない場合, その効果を証明することが必要となる。また, 最適化の動きが直感的にわかりづらい場合, 何故そのような動きをするのか説明を求められる場合がある。いずれの課題に対しても対応はケース・バイ・ケースであるが, 前者の課題に対しては最適化効果を検証するテストを実機を用いて十分施しておくことなどが考えられる。後者の課題に対してはオフラインの解析を通じて目的関数に対するモデルの感度を解析することなどが考えられる。

### 2. モデルの保守, トラブルシューティング

最適化技術を用いてプラントの運転を行う場合, プロセス改造の都度, 最適化モデルを記述したプログラムを書き換える必要がある。また, 最適化計算の過程では, 数値的悪条件に起因する収束異常の発生を完全に回避することは困難である。したがって, リアルタイム最適化システムの開発では, 異常値の排除やスケールと共にモデル式の修正や収束異常の解析が容易に行える仕組みの設計が重要である。システムを保全するエンジニアには, 最適化手法の特性をよく理解して, 収束異常などの現象を解析して適切な処置をとる能力が求められる。

### 3. 経時的に特性の変化するプロセスの最適化

化学プロセスには経時的に触媒活性が劣化する反応器やスケールの堆積する晶析槽など, 時間と共に特性の変化するプロセスが少なくない。そのようなプロセスに対して, その時点のみを考えて最適化を行っても, 却ってその最適化が触媒の活性劣化を速めたり, スケールの堆積を促進することもありうる。したがって, そのようなプロセスに対しては経時的なプロセス変化の特性をモデル化した上で, 運転初期から運転末期までの全運転期間を考慮した最適化が必要となる。

#### 4. 局所的最適解から大域的最適解へ

化学プロセスは基本的に非線形性が著しいため、ソルバーとして非線形最適化手法を用いることが多い。しかし、逐次2次計画法(SQP法)や主双対内点法などの一般的な手法で得られる解は大域的最適解であるという保証はなく、非凸性の著しいプロセスに対しては局所的最適解では不十分な場合が多い。それに対して外部近似法や分枝限定法の適用による大域的最適化の研究が盛んに行われており、産業界への適用が期待される。

現在、実現されているリアルタイム最適化は前にあげた商用パッケージを適用したものがほとんどであり、これらのほとんどが最適化ソルバーとしてSQP法を用いている。しかしながら、問題の特徴に応じて最適化手法は使い分けられ、またカスタマイズされることが好ましい[10]。また、近年の最適化技術の急速な進歩を考えると、主双対内点法に代表されるような大規模な非線形最適化問題を高速に解く技術や分枝限定法を用いた大域的最適化を得る技術など盛り込むことにより、上に述べた課題のいくつかは解決の糸口が掴めると期待される。上に挙げたようモデリングやエンジニアリングの効率化などの様々な側面でリアルタイム最適化には課題があるが、本論文ではこれらの課題をふまえ、リアルタイム最適化技術においてコアとなる最適化技術の高度化に関する研究を行う。

## 1.2 本論文の構成

本論文では、以上で挙げた課題のうち、特に最後の二つの課題に対する取り組みについて述べる。以下に各章の内容を要約する。

2章: 触媒の活性劣化などにより、時間と共に特性が変化するプロセスを最適化するには将来の運転状態を予測して全運転期間のコストが最小化されるような最適化が望まれる。そのような時系列最適化問題は問題規模が巨大化し、計算負荷の増大が懸念される。2章ではQP部分問題を問題の時系列構造を考慮して各時刻単位の問題に分割して解く新しいSQP法を提案する。

3章: 複数装置から成るプラントの時系列最適化問題に主双対内点法を適用し、制約条件が主 block-angular の入れ子構造をもつことを利用して、これを並列化することを試みる。3章で提案する方法では、探索方向を求めるための連立1次方程式が複数の独立な連立1次方程式群ともう一つの連立1次方程式に分解されるが、後者の連立1次方程式も運転期間全体にまたがる制約条件が階段型の構造をもつことを利用して効率よく解ける。計算実験によって提案した方法は大規模な複数装置の多期間計画問題に非常に有効であることを確かめた。さらに、ここで提案した方法を現実の化学プラントに適用したので、実装手段、成果についても述べる。



4章: 自家発電プラントにおけるタービン負荷配分最適化は、弁点と呼ばれる極めて非凸なタービン効率の特徴から、厳密な最適化、大域的な最適化は困難であった。4章では弁点を考慮した厳密なモデルをもとに、リップシツ最適化と逐次2次計画法を組み合わせることにより、大域的最適点を実時間で求めるアルゴリズムを提案する。また、計算実験によりその有効性を検証する。

5章: 最適化システム開発の事前検討(概念設計)においては、重回帰分析などの統計的手法に基づいて定式化したプロセスモデルを用いて、システム導入による費用削減効果を見積もることが少ない。5章では、目的変量の区間推定の考え方を用いて、モデル式に含まれる誤差の許容範囲を規定する連立非線形不等式を構築するとともに、これらの不等式を上位レベル問題の制約条件にもつ2レベル数理計画問題を解くことによって、モデル誤差に起因する最悪の状況における最適コストを予測する方法を提案する。また、提案した方法を発電設備の運転最適化システムに適用し、その有効性を確認する。

最後に6章で本論文のまとめを行う。



## 第2章 時系列最適化問題に対する逐次2次計画 分解法の適用

### 2.1 はじめに

近年、プロセス産業において実用化が進んでいるリアルタイム最適化は定常状態のみを考慮したスナップショットでの最適化である。しかしながら、実際のプロセスにおいては触媒の劣化、熱交換器における汚れの堆積など経時変化を伴う系が多く存在し、そのような系に対して現時点のみを考慮したリアルタイム最適化を適用しただけでは真の最適化は実現できないばかりか、プラントを誤った方向に導いてしまう可能性がある。そのような問題に対して、少ないながらも今までいくつかの試みがなされてきている。たとえば、Brownら [14] はエチレンプラントのアセチレン水添反応器において触媒劣化を時系列でのモデルとして表現し、全運転期間でエチレン収率が最大化されるような最適運転プロファイルを導いた。また、Pedersonら [75] は石油精製工場のリフォーマープラントにおいて触媒劣化のモデル化を行った上で、全運転期間で生産量が最大化されるような閉ループのリアルタイム最適化を実現した。また、Bergenら [8] は運転時間の経過と共に反応管にコークが生成するナフサ分解炉に対して、運転末期においてもコイル表面温度上限などの制約を維持した上で全運転期間において生産量が最大化されるような閉ループのリアルタイム最適化を実現した。しかしながら、これらのアプローチは個々の対象に特化したアドホックなものであり、経時的に特性が変化するプロセスに対する最適化の統一的な手法は確立されていない。

時系列でのプロセス最適化を実現する際に大きな障害になると考えられるのは、問題規模の巨大化と時変プロセスを適切にモデル化することの困難さである。一般にリアルタイム最適化における変数の規模は  $10^3 \sim 10^5$  に及ぶとされている。一方、プロセスの連続運転時間は数十日～1、2年に及ぶ。たとえば連続運転時間を1年として1日単位で時系列最適化問題を解くことを考えると、問題の規模は  $(10^3 \sim 10^5) \times 365$  となり、解くこと自体が困難になり得る。その対策として簡易モデルを用いることなども考えられるが、最適化のアルゴリズムという観点からも工夫が必要である。

本章では、大規模最適化問題に逐次2次計画法 (SQP法) [45, 46] を直接適用することを試みる。特にSQP法の各反復で解かれる2次計画問題が時系列構造を内包する凸計画問題になることに着目して、その双対問題 [34] を考えることにより、各時刻単位の部分問題に分割する方法を提案する。さらにボイラーの最適運転計画問題に対する計算実験より、提案手法の有効性を検証する [21]。

## 2.2 時系列最適化問題の定式化

時系列プロセス最適化の例としてボイラーの最適運転問題を考える．石油精製工場や石油化学工場において，電力と蒸気を供給する自家発電プラントの運転は，刻々と変化するデマンドや，昼夜で異なる電力単価など考慮すべき事項が多く，高度な意思決定が必要とされる [6]．その中でも重要な意思決定の一つは複数のボイラーへの負荷配分問題である．さらにボイラーへの排ガスからもたらされるスケールの付着によるボイラー効率の低下がこの問題を一層複雑にしている．一般的なボイラーの例として単管ボイラー (Sulzer Boiler) の概略プロセスを図 2.1 に示す．図 2.1 のボイラープラントに

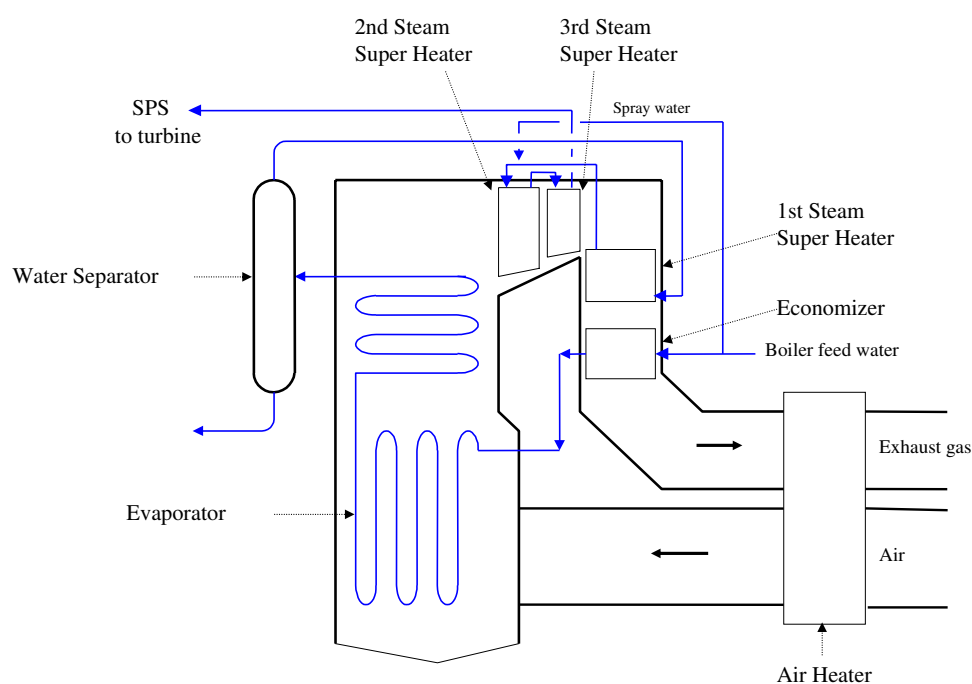


図 2.1: Sulzer boiler

において，給水ポンプから供給される水（ボイラー給水）は節炭器でボイラー排ガスによって予熱され，蒸発器においてバーナーからの火焰により飽和蒸気となる．飽和蒸気は汽水分離器においてその一部がドレン水として取り除かれた後，過熱器を経て超高压蒸気（主蒸気）となりタービンへ供給される．主蒸気はスプレー水と呼ばれるボイラー給水の一部を用いて一定の温度に制御される．ボイラーを物理現象にもとづいて厳密に表現すれば，熱交換器モデル，火炉燃烧モデル，火炉輻射伝熱モデル

などから構成される複雑で大規模なモデルとなる。ボイラーの性能は熱交換器モデルとして表現される節炭器と過熱器の性能に大きく左右される。さらに熱交換器の性能は総括伝熱係数の値によってその性能が左右されるが [8]，スケールの付着などにより，汚れが堆積してくる（汚れ係数が上昇する）と総括伝熱係数は低下し，ひいてはボイラーの効率を低下させ，運転末期には経済的な運転が困難になるばかりでなく，種々の機械的制約の維持も困難になることがある。図 2.2 に実際のボイラープラントにおける汚れ係数の時系列的な推移を示す。データは 1 年に 1 回行われる定期修理直後から次の

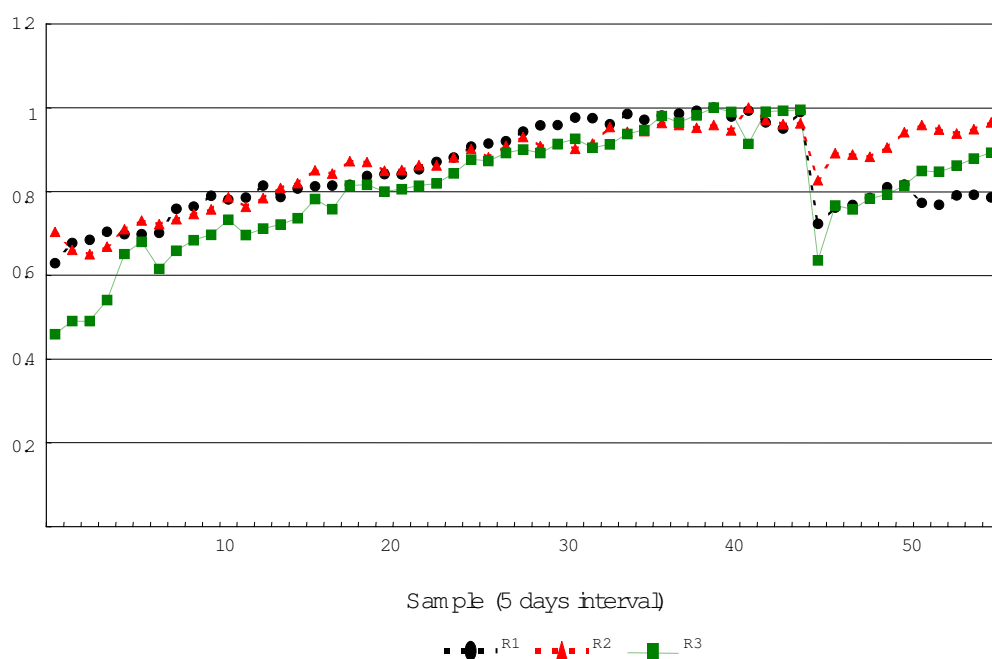


図 2.2: Transition of fouling factor

定期修理に入るまでのものであり，サンプル間隔は 5 日である。R1 は節炭器の汚れ係数，R2 は 1 次過熱器の汚れ係数，R3 は 2 次過熱器と 3 次過熱器の平均汚れ係数を示す。ただし，汚れ係数の値は規準化されている。46 サンプルあたりで汚れ係数が急落しているのは，ボイラーの緊急停止によるサーマルショックによってスケールがはがれ落ちたためと思われる。汚れの進行は排ガスから発生するスケールの付着によるものであり，その汚れ係数の進行速度は下式のようなボイラー負荷（蒸気発生量）の関数として表される。

$$\frac{dR}{dT} = Rv_{steam} \quad (2.1)$$

ここで  $a$  は適当な係数， $v_{steam}$  は蒸気発生量， $R$  はボイラーの汚れ係数である．さらに統計的な解析により，排ガス中の残酸素濃度などの運転因子を説明変数とすることにより，その予測精度は向上する可能性がある [24]．ここで図 2.3 に示されるような一つの主蒸気ヘッダーに複数のボイラーが繋がっている系における負荷配分最適化問題を考える．図 2.3 において， $B_1 \sim B_3$  はボイラー， $T_1$

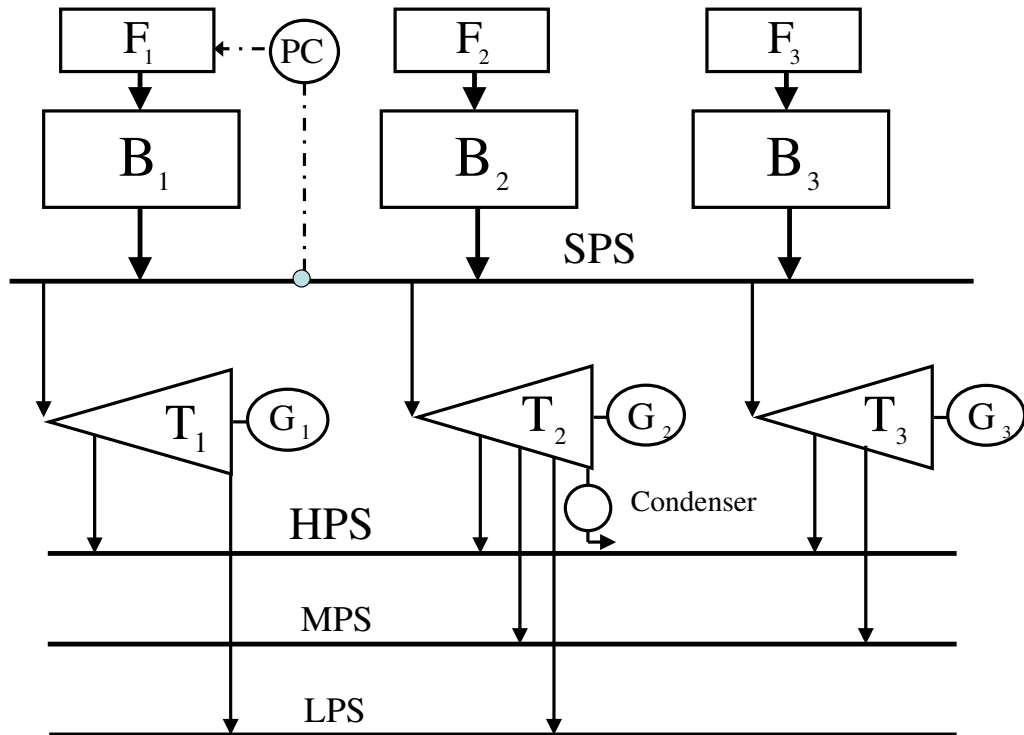


図 2.3: Simplified process diagram of a power plant with multiple boilers

$T_1 \sim T_3$  はタービン， $G_1 \sim G_3$  は発電機， $PC$  は圧力制御器， $F_1 \sim F_3$  は燃料を示す．このような系において各ボイラーが主蒸気圧力制御を行えば干渉が発生するので，主蒸気圧力制御を行うボイラーは1缶に限られる．その他のボイラーでは，直接燃料の量を変化させると，蒸発管出口のしめり度を一定に保つ制御システムがボイラー給水量を調整し，その結果としてボイラーの負荷が変化する．すなわち，複数のボイラーが存在する系においてボイラー負荷配分を左右する独立変数は主蒸気圧力制御を行っていないボイラーへの燃料供給量であり，図 2.3 のボイラー系列においては負荷配分を決定する独立変数は  $F_2, F_3$  となる．また，ボイラー負荷配分には影響しないが各ボイラーの運転条件を左右する独立変数として蒸発管出口モイスチャー，排ガス中残酸素濃度，副生燃料の混入率などがある．

このようなボイラー系列の運転最適化問題を考える際に物理モデルを用いる場合もあるが、実際にはボイラープラント運転を左右する因子を独立変数とした非線形回帰式がしばしば用いられる。ボイラー系列のモデルは一般につきのような非線形代数方程式の集合体として表現できる。

$$g_j(z, \mathbf{R}) = 0 \quad j = 1, \dots, M \quad (2.2)$$

ただし、燃料流量は1種類と仮定し、 $z = \{z_{li}(t)\}, l = 1, \dots, L, i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$ とする。ここで、 $t$ は時刻、 $l$ はボイラー番号、 $i$ はプロセス変数番号、特に $i = 1$ は燃料流量、 $i = 2$ は蒸気発生流量を示す。また、 $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L)$   $\mathbf{R}_l = (R_l(1), \dots, R_l(T))$ であり、 $R_l(t)$ はボイラー $l$ の時刻 $t$ における汚れ係数を示す。実際には、汚れ係数はボイラー単体においても節炭器、過熱器など熱交換設備ごとに個別に計算されるが、ここでは簡単のために一つにまとめて表現する。

(2.2)式にもとづく一般的なボイラープラントの時系列での運転最適化問題は、各時刻における制約および時系列に関する制約(プロセス特性の時間に伴う変化)を満たした上で、全運転期間での燃料消費量の積算値を最小化する問題であり、以下のように定式化される。ここではボイラーが $L$ 缶、各ボイラーの等式制約(プロセスモデル)が $M$ 個、燃料流量を含む各ボイラーの独立変数が $N$ 個存在するものとし、考慮すべき全運転期間は $T$ 時刻先までと仮定する。さらに、各時刻で満足すべき蒸気デマンドを $D(t)$ とする。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{R}} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^L z_{l1}(t) \\ \text{subject to} \quad & \\ & \sum_{l=1}^L z_{l2}(t) = D(t) \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$g_j(z_l(t), R_l(t)) = 0, j = 1, \dots, M, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$P_l z_l(t) \leq r_l, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

$$R_{l\_min} \leq R_l(t) \leq R_{l\_max}, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

$$R_l(t) = \mathbf{a}_l^T z_l(t) + b_l \sum_{\tau=1}^t z_{l2}(\tau) + c_l, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

ここで $z_l(t) = (z_{l1}(t), \dots, z_{lN}(t))$   $l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T$ であり、 $P_l, r_l, R_{l\_min}, R_{l\_max}, a_l, b_l, c_l$ は適当な定数(行列、ベクトル)である。上記の問題において、蒸気デマンドに関する等式制約条件(2.3)、プロセスモデル $g_j$ に関する等式制約条件(2.4)、変数に関する不等式制約(2.5)(2.6)は各時刻において全く同じ構造をもって出現する。これらを以下では同時刻制約と呼ぶ。一方 $R_l$ に関する制約条件(2.7)は経時変化を表すモデルであり、これを以下では時系列制約と呼ぶ。この問題はより一般的には次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
(\text{P}) \quad & \min_x \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}(t)) \\
& \text{subject to} \\
& \sum_{t=1}^T \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)) = 0 \quad \text{時系列制約} \\
& \mathbf{x}(t) \in X(t) \quad t = 1, 2, \dots, T \quad \text{同時刻制約}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (z_1(t), \dots, z_L(t), R_1(t), \dots, R_L(t)) \\
f_t(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{l=1}^L z_{l1}(t) \\
\mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)) &= (c_{t11}(\mathbf{x}(t)), \dots, c_{tL1}(\mathbf{x}(t)), \dots, c_{t1T}(\mathbf{x}(t)), \dots, c_{tLT}(\mathbf{x}(t)))
\end{aligned}$$

$$c_{t\ell\tau}(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} 0, & l = 1, \dots, L, \tau = 1, \dots, t-1 \\ R_l(t) - \mathbf{a}_l^T z_l(t) - b_l z_{l2}(t) - c_l, & l = 1, \dots, L, \tau = t \\ -b_l z_{l2}(t), & l = 1, \dots, L, \tau = t+1, \dots, T \end{cases}$$

である．さらに (2.5) (2.6) 式をあわせた制約条件を  $V_l \mathbf{x}_l(t) \leq \mathbf{w}_l$  と表し,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= \left\{ \mathbf{x}(t) \mid \sum_{l=1}^L z_{l2}(t) - D(t) = 0, g_j(z_l(t), R_l(t)) = 0, \right. \\
& \quad j = 1, \dots, M, l = 1, \dots, L, \\
& \quad \left. V_l \mathbf{x}_l(t) \leq \mathbf{w}_l, l = 1, \dots, L \right\}
\end{aligned}$$

とする．以下,

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{x}(t)) = \left( \sum_{l=1}^L z_{l2}(t) - D(t), g_1(z_1(t), R_1(t)), \dots, g_M(z_L(t), R_L(t)) \right)$$

と表す．

## 2.3 逐次2次計画分解法アルゴリズム

時系列最適化問題 P を SQP 法を用いて解くことを考える．そのために問題 P に対するペナルティ関数  $F_r(\mathbf{x})$  とその  $(\mathbf{x})$  における1次近似  $\bar{F}_r(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  を次式により定義する．



$$\begin{aligned}
F_r(\mathbf{x}) &= \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}(t)) + r \left\| \sum_{t=1}^T \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)) \right\|_1 \\
\bar{F}_r(\mathbf{x}, \mathbf{d}) &= \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}(t)) + \sum_{t=1}^T \nabla f_t(\mathbf{x}(t))^T \mathbf{d}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{d}(t)^T \mathbf{B}_t \mathbf{d}(t) \\
&\quad + r \left\| \sum_{t=1}^T (\mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)) + \nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}(t))^T \mathbf{d}(t)) \right\|_1
\end{aligned}$$

ここで  $r > 0$  はペナルティパラメータ,  $\mathbf{B}_t, t = 1, \dots, T$  は正定値対称行列であり,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(1)^T, \dots, \mathbf{x}(T)^T)^T$ ,  $\mathbf{d} = (\mathbf{d}(1)^T, \dots, \mathbf{d}(T)^T)^T$ ,  $\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{j=1}^L |z_j|$  である. SQP 法のアルゴリズムは一般的に以下のように記述される [45, 46].

### 【SQP アルゴリズム】

ステップ 1 初期値  $\mathbf{x}(t)^{(0)}, t = 1, \dots, T$  を選び,  $\mathbf{B}_t^{(0)} = I$  (単位行列),  $t = 1, \dots, T$  とおく.

ペナルティパラメータ  $r > 0$  を設定する. 定数  $\rho > 0, \beta \in (0, 1), \gamma \in (0, 1), \epsilon > 0$  を選ぶ.  $k := 0$  とする.

ステップ 2 QP 部分問題を解いて最適解  $\mathbf{d}^{(k)} = (\mathbf{d}(1)^{(k)}, \dots, \mathbf{d}(T)^{(k)})$  と Lagrange 乗数  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  を求める.

ステップ 3 ペナルティパラメータ  $r$  を以下の手順で更新する.

$$r := \begin{cases} \max\{|u_i^{(k+1)}| : i = 1, \dots, M\} + \rho, \\ \quad \text{if } r < \max\{|u_i^{(k+1)}| : i = 1, \dots, M\} \\ r, \text{ else} \end{cases}$$

ステップ 4 以下の手続きにより直線探索を行いステップ幅  $\alpha^{(k)} > 0$  を求め,  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$  とおく.

1)  $\alpha := 1$  とおく.

2)  $F_r(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) < F_r(\mathbf{x}^{(k)}) + \beta \alpha [\bar{F}_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}) - F_r(\mathbf{x}^{(k)})]$  が成立していれば  $\alpha^{(k)} := \alpha$  として終了.

3)  $\alpha := \gamma \alpha$  として 2) へ戻る.

ステップ 5 つぎの修正 BFGS 公式を用いて近似ヘッセ行列  $\mathbf{B}_t^{(k)}, t = 1, \dots, T$  を更新する.

$$\mathbf{B}_t^{(k+1)} = \mathbf{B}_t^{(k)} + \frac{\tilde{\mathbf{y}}(t)^{(k)} (\tilde{\mathbf{y}}(t)^{(k)})^T}{(\tilde{\mathbf{y}}(t)^{(k)})^T \mathbf{s}(t)^{(k)}} - \frac{\mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{s}(t)^{(k)} (\mathbf{s}(t)^{(k)})^T \mathbf{B}_t^{(k)}}{(\mathbf{s}(t)^{(k)})^T \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{s}(t)^{(k)}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(t)^{(k)} &= \mathbf{x}(t)^{(k+1)} - \mathbf{x}(t)^{(k)} \\
\mathbf{y}(t)^{(k)} &= \nabla_x L_t(\mathbf{x}(t)^{(k+1)}, \mathbf{u}^{(k+1)}) - \nabla_x L_t(\mathbf{x}(t)^{(k)}, \mathbf{u}^{(k+1)}) \\
\theta_t &= \begin{cases} 1, & \text{if } (\mathbf{s}(t)^{(k)})^\top \mathbf{y}(t)^{(k)} > 0.2(\mathbf{s}(t)^{(k)})^\top \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{s}(t)^{(k)} \\ \frac{0.8(\mathbf{s}(t)^{(k)})^\top \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{s}(t)^{(k)}}{\{(\mathbf{s}(t)^{(k)})^\top \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{s}(t)^{(k)} - (\mathbf{s}(t)^{(k)})^\top \mathbf{y}(t)^{(k)}\}} & \end{cases}
\end{aligned}$$

ただし,  $\nabla_x L_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}) = \nabla f_t(\mathbf{x}(t)) - \sum_{i=1}^M u_i \nabla c_{it}(\mathbf{x}(t))$ ,  $t = 1, \dots, T$  である.

### ステップ6 収束判定条件

$\|\mathbf{x}(t)^{(k+1)} - \mathbf{x}(t)^{(k)}\| < \varepsilon(1 + \|\mathbf{x}(t)^{(k)}\|)$ ,  $t = 1, \dots, T$  が満たされるならば終了. そうでなければ  $k := k + 1$  として ステップ2 へ戻る.

SQP アルゴリズムの ステップ2 において QP 部分問題を解く際に, 時系列問題特有の構造を活かして効率良く解くことを考える. SQP アルゴリズムの  $k$  回目の反復における QP 部分問題は下記のように表される.

$$\begin{aligned}
(\text{QP}^{(k)}) \quad & \min_{\mathbf{d}} \sum_{t=1}^T \left\{ \nabla f_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})^\top \mathbf{d}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{d}(t)^\top \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{d}(t) \right\} \\
& \text{subject to } \sum_{t=1}^T \left\{ \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)}) + \nabla \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})^\top \mathbf{d}(t) \right\} = 0 \\
& \mathbf{d}(t) \in \hat{X}(t)^{(k)} \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)}) &= [c_{1t}(\mathbf{x}(t)^{(k)}), \dots, c_{Lt}(\mathbf{x}(t)^{(k)})]^\top, \\
\nabla \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)}) &= [\nabla c_{1t}(\mathbf{x}(t)^{(k)}), \dots, \nabla c_{Lt}(\mathbf{x}(t)^{(k)})]^\top, \\
\hat{X}(t)^{(k)} &= \left\{ \mathbf{d}(t) \mid \mathbf{h}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)}) + \nabla \mathbf{h}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})^\top \mathbf{d}(t) = 0, V_l \mathbf{x}_l(t)^{(k)} - \mathbf{w}_l + V_l \mathbf{d}(t) \leq 0 \quad l = 1, \dots, L \right\}
\end{aligned}$$

である. 以下では簡単のため  $\mathbf{g}_t^{(k)} = \nabla f_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})$ ,  $\mathbf{c}_t^{(k)} = \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})$ ,  $\mathbf{A}_t^{(k)} = \nabla \mathbf{c}_t(\mathbf{x}(t)^{(k)})^\top$  と表す.

SQP アルゴリズムの ステップ5 における行列  $\mathbf{B}^{(k)}$  の更新方法は, 行列  $\mathbf{B}^{(k)}$  の正定値性が常に保たれるように BFGS 公式を修正したものである. したがって, 元の問題 P が非凸であっても, QP 部分問題は必ず凸になるので, 双対定理が成立する [34]. このことに着目して, QP<sup>(k)</sup> を解く代わりに, その双対問題を解くことを考える. L 次元の Lagrange 乗数ベクトル  $\mathbf{u}$  を用いて Lagrange 関数を次式で定義する.

$$L^{(k)}(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = \sum_{t=1}^T \left( \mathbf{g}_t^{(k)\top} \mathbf{d}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{d}(t)^\top \mathbf{B}_t^{(k)} \mathbf{d}(t) - \mathbf{u}^\top (\mathbf{c}_t^{(k)} + \mathbf{A}_t^{(k)} \mathbf{d}(t)) \right) \quad (2.8)$$

そのとき，QP<sup>(k)</sup> の Lagrange 緩和問題 QP<sup>(k)</sup>( $\mathbf{u}$ ) は次のように表される．

$$\begin{aligned} (\text{QP}^{(k)}(\mathbf{u})) \quad & \min_{\mathbf{d}} L^{(k)}(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ & \text{subject to } \mathbf{d}(t) \in \hat{X}^{(k)} \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

$\hat{X}^{(k)} = \hat{X}(1)^{(k)} \times \dots \times \hat{X}(T)^{(k)}$  と表し，Lagrange 緩和問題 QP<sup>(k)</sup> の最小値を用いて関数  $\phi^{(k)}(\mathbf{u})$  を

$$\phi^{(k)}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{d} \in \hat{X}^{(k)}} L^{(k)}(\mathbf{d}, \mathbf{u})$$

によって定義する．さらに QP<sup>(k)</sup> の双対問題を次式によって定義する．

$$(\text{DQP}^{(k)}) \quad \max_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u})$$

以下では便宜上，双対問題 DQP<sup>(k)</sup> を等価な最小化問題に置き換え，表記を簡単にするため，添字 ( $k$ ) を省略する．

$$(\text{DQP}) \quad \min_{\mathbf{u}} \psi(\mathbf{u})$$

ただし， $\psi(\mathbf{u}) = -\phi^{(k)}(\mathbf{u})$  である．ここで不等式制約条件も含むすべての制約条件を Lagrange 関数に取り入れて双対問題を構成する方法も考えられるが，期間数が大きくなるにつれて不等式制約の数も増えるため，双対問題の次元が著しく増大すること，および双対問題が変数の非負条件を含む制約つき問題となることを考慮し，本章ではその方法は採用しなかった．

上記の Lagrange 緩和問題 QP<sup>(k)</sup>( $\mathbf{u}$ ) と双対問題 DQP は以下の性質を持つ [34] ．

性質 (1)  $\mathbf{u}$  を固定したとき， $L(\mathbf{d}, \mathbf{u})$  は  $\mathbf{d}$  に関して狭義凸 2 次関数であるから  $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{d} \in \hat{X}^{(k)}} L(\mathbf{d}, \mathbf{u})$  は常に唯一存在する．

性質 (2)  $\psi(\mathbf{u})$  は連続的微分可能な凸関数であり，その勾配は次式で与えられる．

$$\nabla \psi(\mathbf{u}) = -\nabla_{\mathbf{u}} L(\mathbf{d}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \quad (2.9)$$

性質 (1),(2) より双対問題 DQP は連続的微分可能な凸関数  $\psi(\mathbf{u})$  の制約なし最小化問題となるので準ニュートン法を適用することができる．準ニュートン法において  $\mathbf{u}$  を更新する際には，関数  $\psi(\mathbf{u})$  の値と勾配  $\nabla \psi(\mathbf{u})$  を求める必要があるが，Lagrange 関数の定義 (2.8) 式と (2.9) 式より，これらは Lagrange 緩和問題 QP( $\mathbf{u}$ ) を解き，得られた  $\mathbf{d}(\mathbf{u})$  を用いて次のように計算できる．

$$\psi(\mathbf{u}) = -L(\mathbf{d}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

$$\nabla \psi(\mathbf{u}) = \sum_{t=1}^T (\mathbf{c}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{d}_t(\mathbf{u})) \quad (2.11)$$

とくに，双対問題 DQP の最適解  $u^*$  が得られたとき，その  $u$  に対する  $d(u^*)$  が部分問題 QP の最適解となる．また，Lagrange 緩和問題  $QP(u^{(j)})$  は各時刻  $t$  に対応する  $T$  個の独立な部分問題

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \mathbf{g}_t^\top \mathbf{d}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{d}(t)^\top \mathbf{B}_t \mathbf{d}(t) - \mathbf{u}^{(j)\top} (\mathbf{c}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{d}(t)) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{d}(t) \in \hat{X}(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

に分割して並列に解くことが可能である．以上をまとめると，部分問題 QP を解くための準ニュートン法のアルゴリズムは以下のように記述できる．なお，アルゴリズム中に現れる  $H^{(j)}$  はヘッセ行列  $\nabla^2 \psi(\mathbf{u}^{(j)})$  の逆行列に対する近似行列である [45, 46]．

### 【アルゴリズム QPSOLVE】

ステップ 1 適当な初期値  $\mathbf{u}^{(0)}$  と正定値対称行列  $H^{(0)}$  を選ぶ．十分小さい正数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  を選ぶ． $j := 0$  とおく．

ステップ 2  $T$  個の 2 次計画問題 (2.12) を解いて，Lagrange 緩和問題  $QP(u^{(j)})$  の最適解  $d(u^{(j)})$  を求める．探索方向ベクトル  $\mathbf{p}^{(j)}$  を次式によって定める．

$$\mathbf{p}^{(j)} = -H^{(j)} \nabla \psi(\mathbf{u}^{(j)}) = -H^{(j)} \sum_{t=1}^T (\mathbf{c}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{d}_t(\mathbf{u}^{(j)})) \quad (2.13)$$

ステップ 3 適当な直線探索アルゴリズムを用いてステップサイズ  $\alpha^{(j)} > 0$  を定め， $\mathbf{u}^{(j+1)} = \mathbf{u}^{(j)} + \alpha^{(j)} \mathbf{p}^{(j)}$  とおく．

ステップ 4 収束判定条件  $\|\nabla \psi(\mathbf{u}^{(j)})\| < \varepsilon_1$ ， $\psi(\mathbf{u}^{(j)}) - \psi(\mathbf{u}^{(j+1)}) < \varepsilon_2 (1 + |\psi(\mathbf{u}^{(j)})|)$  がともに成立すれば計算を終了する．そうでない場合は BFGS 公式を用いて  $H^{(j)}$  を更新し， $j := j + 1$  において ステップ 2 へ戻る．

## 2.4 計算実験

同時刻制約に現れるプロセスモデルを簡略表現したボイラーの時系列運転最適化問題に対して，本章で提案したアルゴリズムを適用した．ここでは，同じ燃料を用い，同じ構造を有するが効率のやや異なる 2 基のボイラーに対して，全運転期間にわたる使用燃料の総量を最小化する問題を考える．

$$\min_z \sum_{t=1}^T (z_{A1}(t) + z_{B1}(t))$$

subject to

$$\frac{z_{A1}(t)}{z_{A2}(t)} = a_A z_{A2}(t) + b_A R_A(t) + c_A \quad t = 1, \dots, T \quad (2.14)$$

$$\frac{z_{B1}(t)}{z_{B2}(t)} = a_B z_{B2}(t) + b_B R_B(t) + c_B \quad t = 1, \dots, T \quad (2.15)$$

$$R_A(t) - R_A(t-1) = d_A(z_{A2}(t) - z_{A2}(t-1)) + e_A z_{A2}(t) \quad t = 2, \dots, T \quad (2.16)$$

$$R_B(t) - R_B(t-1) = d_B(z_{B2}(t) - z_{B2}(t-1)) + e_B z_{B2}(t) \quad t = 2, \dots, T \quad (2.17)$$

$$z_{A2}(t) + z_{B2}(t) = D(t) \quad t = 1, \dots, T \quad (2.18)$$

$$LOW_A \leq z_{A2} \leq HIGH_A \quad t = 1, \dots, T \quad (2.19)$$

$$LOW_B \leq z_{B2} \leq HIGH_B \quad t = 1, \dots, T \quad (2.20)$$

$$R_A(1) - R_{A0} = 0 \quad (2.21)$$

$$R_B(1) - R_{B0} = 0 \quad (2.22)$$

ここで  $t = 1, \dots, T$  はサンプル時刻であり,  $z_{A1}$  はボイラー A における所要燃料カロリー,  $z_{A2}$  はボイラー A における発生蒸気量,  $R_A$  はボイラー A の汚れ係数,  $z_{B1}$  はボイラー B における所要燃料カロリー,  $z_{B2}$  はボイラー B における発生蒸気量,  $R_B$  はボイラー B の汚れ係数,  $LOW_A$  はボイラー A 発生蒸気量の下限値,  $HIGH_A$  はボイラー A 発生蒸気量の上限値,  $HIGH_B$  はボイラー B 発生蒸気量の上限値,  $R_{A0}$  はボイラー A 汚れ係数の初期値,  $R_{B0}$  はボイラー B 汚れ係数の初期値,  $D(t)$  は時刻  $t$  における蒸気デマンド, (2.14), (2.15) 式は過去の運転データから得られたボイラー効率を表現する式, (2.14), (2.15) 式は過去の運転データから得られた汚れ係数の進行を表す経験式,  $a, b, c, d, e$  は  $t$  に依存しない定数, (2.18) 式は各時刻における蒸気デマンドに関する制約, (2.19), (2.20) 式は各ボイラー発生蒸気量に関する制約, (2.21), (2.22) 式はボイラー汚れ係数の初期条件を表す.

上記の問題においては制約条件 (2.16) 式と (2.17) 式が時系列制約, それ以外の制約条件が同時刻制約になっている. たとえば  $T = 4$  の場合, 制約条件 (2.16) 式と (2.17) 式はつぎのように表現される.

$$\begin{pmatrix} 0 & d_A & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_B & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_A & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_B & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_A & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_B & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

ただし,  $f_A = -(d_A + e_A)$ ,  $f_B = -(d_B + e_B)$ ,  $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  とする.

表 2.1: Comparison of computaiotn time

Time Horizon		5	10	15	20
Case1	Comp.Time (sec)	38.28	156.54	286.11	620.71
	Ideal Comp. Time* (sec)	16.76	70.45	91.84	214.79
	No. of iterations	12	25	29	34
Case2	Comp.Time (sec)	23.23	123.53	305.72	1074.4
	No. of iterations	11	16	18	35

左辺の係数行列は各制約条件 (2.16) (2.17) 式にただか二つの時刻に関する変数しか含まれないので時系列制約  $T$  が増加するに従ってますます疎になる．このような零要素の構造を利用することにより，Lagrange 緩和問題  $QP(u^{(j)})$  を (2.12) 式のように分解して解く際に，計算の効率化を図ることができる．

上記のボイラー運転最適化問題に対して，本章で提案した時系列単位の小規模部分問題に分解して，QP 部分問題を解く SQP 法を適用した場合 (Case1) と QP 部分問題を分解せず直接解く通常の SQP 法を適用した場合 (Case2) の 2 ケースについて計算を行い，計算時間の差異を比較した．その結果を表 2.1 に示す．

表 2.1 における "Ideal Comp. Time" とはアルゴリズム QPSOLVE において完全な並列計算が実現できると想定した場合の推定計算時間を示す．ここでいう完全な並列計算とはプロセッサ間のデータ通信や同期のオーバーヘッドが無く，各時刻単位に分割される部分問題数に等しいプロセッサが使えることを想定している．表 2.1 の結果より Time Horizon が長くなるにともない，ここで提案した分解法が有利になることがわかる．なお，計算実験では MATLAB<sup>1</sup> を用いてプログラムを作成し，特に QP 部分問題に対しては MATLAB Optimization Toolbox の QP サブルーチン QUADPROG を用いた．

さらに時系列問題特有の構造，性質を利用して下記の工夫を施すことによって計算時間の効率化が図れる．たとえば  $T=15$  の場合は (1) の工夫を適用することによって計算時間が 35% 削減された．(2) の効果はこの例題では顕著な効果は出なかったが，問題の規模，構造によっては有効であると考えられる．

- (1) SQP アルゴリズムの各反復において，アルゴリズム QPSOLVE を用いて新しい QP 部分問題を解く際の初期行列  $H^{(0)}$  として，SQP アルゴリズムの前の反復におけるアルゴリズム QPSOLVE によって最後に得られた  $H^{(j)}$  を用いる．

<sup>1</sup>MATLAB は Mathworks 社の登録商標です．

(2) アルゴリズム QPSOLVE のステップ 2 において QP 部分問題 (2.12) を解く際に、制約条件の行列が (2.23) 式のように疎構造を有することを考慮して計算量を軽減する。

## 2.5 おわりに

時系列プロセス最適化問題に対して時系列問題構造の特徴を有効に利用した SQP 法のアルゴリズムを提案した。ここで提案した方法を適用することにより、特に運転期間が長期にわたる問題に対して計算時間の効率化が可能となることが示された。現在、全運転期間が 30 日から 40 日、サンプリング間隔が 6~12 時間程度の触媒劣化を伴う反応器に対して時系列最適化を実現しようとしているが、本章で提案した最適化手法を用いれば計算時間が 30 分以内に収まり十分実時間制御に耐えうる。さらに並列計算機を用いて計算を行えば計算時間の大幅な低減が期待される。また、ここでは考慮しなかったが、時系列プロセスの最適化を運用していく上でモデルと実プロセス間の誤差が問題となる場合がありうる。そのような場合には、モデルに実プロセスとのずれを補償するバイアスを持たせ、最適化実行の周期ごとにモデルを更新し、最適化の精度を上げることが必要と考えられる。これは今後の重要な研究課題である。





## 第3章 時系列最適化問題に対する主双対内点法の適用

### 3.1 はじめに

プロセス産業では、触媒の劣化や熱交換器の汚れの堆積などにより、装置の効率（特性）が経時的に変化していくプロセスが少なくないため、2章で述べたような時系列最適化が必要である。2章では非線形計画問題に対する実用的な解法である逐次2次計画法 [45, 46] を適用することを考え、問題構造の特徴を利用して生産効率の変化を表す制約式（時系列制約）に Lagrange 乗数をかけて目的関数に加えることにより、部分問題を各時刻について独立な複数の2次計画問題に分解して解く方法を示した。また、逐次2次計画問題の部分問題に主双対内点法を適用し、内点法の探索方向を求めるための連立1次方程式を、もとの問題の構造を利用して並列的に解く方法も提案されている [1, 9, 96, 29]。

一方、非線形計画問題に主双対内点法を直接適用することも試みられている [94]。主双対内点法は、もともと線形計画問題に対する高速解法として提案されたが、最近では2次計画問題や非線形計画問題、半正定値計画問題にも拡張されている [57]。また、確率計画問題、多品種流問題などの特徴的な構造をもつ問題に対しては、探索方向を効率よく計算する方法が提案されている [15, 44, 50, 84]。とくに、主 block-angular 構造をもつ線形計画問題や2次計画問題に対しては、主双対内点法の主要な計算を並列的に実行できることも知られている [64, 99, 97]。

本章は、まず3.2節において、この問題が全体として主 block-angular の入れ子構造をもつとともに、運転期間全体にまたがる制約条件が階段型の構造をもつことを示す。3.3節では、主双対内点法で最も計算負荷がかかる探索方向の計算を、主 block-angular の入れ子構造を利用して並列化する方法を示す。さらに、全期間にまたがる制約条件の階段型構造を利用することにより、対応する Lagrange 乗数に対する探索方向が効率的に計算できることを示す。3.4節では3.3節にもとづき実装された化学プラントにおける反応器運転最適化システムの概要、計算速度の評価、実装にあたっての工夫などについてのべる [98]。

### 3.2 複数装置の多期間計画問題

装置数を  $\bar{q}$  , 運転期間を  $\bar{t}$  とするとき , プラントの最適な運転条件を求める問題はつぎのように定式化できる .

$$\text{目的関数 : } \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} f_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) \rightarrow \text{最小} \quad (3.1-a)$$

$$\text{制約条件 : } \mathbf{g}_{q0} + \sum_{t \in T} \mathbf{g}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (q \in Q) \quad (3.1-b)$$

$$\mathbf{h}_{0t} + \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (t \in T) \quad (3.1-c)$$

$$\mathbf{c}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.1-d)$$

$$\mathbf{x}_{qt} \geq \mathbf{0} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.1-e)$$

ただし ,  $Q = \{1, \dots, \bar{q}\}$  ,  $T = \{1, \dots, \bar{t}\}$  であり ,  $\mathbf{x}_{qt} \in \mathcal{R}^{n_{qt}}$  は装置  $q$  の時刻  $t$  における原料使用量 , 製品生産量などを表す変数である . また ,  $\mathbf{g}_{q0} \in \mathcal{R}^{m_{q0}}$  ,  $\mathbf{h}_{0t} \in \mathcal{R}^{m_{0t}}$  は定数であり , 関数  $f_{qt} : \mathcal{R}^{n_{qt}} \rightarrow \mathcal{R}$  ,  $\mathbf{g}_{qt} : \mathcal{R}^{n_{qt}} \rightarrow \mathcal{R}^{m_{q0}}$  ,  $\mathbf{h}_{qt} : \mathcal{R}^{n_{qt}} \rightarrow \mathcal{R}^{m_{0t}}$  ,  $\mathbf{c}_{qt} : \mathcal{R}^{n_{qt}} \rightarrow \mathcal{R}^{m_{qt}}$  は連続的の微分可能とする . 制約条件 (3.1-b) は , 装置  $q$  の特性が時間の経過とともに変化する様子を表している . 制約条件 (3.1-c) は , 時刻  $t$  におけるプラント全体の原料使用量や製品生産量を規定する . さらに , 制約条件 (3.1-d) は , 時刻  $t$  における装置  $q$  内のプロセスを表している . なお , 不等式制約はスラック変数を用いて等式制約に直し , 各変数は単位を適当に選んで非負条件 (3.1-e) を課せるように変換しておく .

実際のモデルでは , 関数  $\mathbf{c}_{qt}$  に物理法則や化学法則に基づく複雑な非線形式が現れる . また , 制約条件 (3.1-d) を用いて適当な中間変数を定義すれば , 関数  $f_{qt}$  ,  $\mathbf{g}_{qt}$  ,  $\mathbf{h}_{qt}$  は簡単な 1 次関数で表現できることが多い . 一方 ,

$$\begin{aligned} n_t &= \sum_{q \in Q} n_{qt}, & m_t &= m_{0t} + \sum_{q \in Q} m_{qt} \quad (t \in T) \\ m_0 &= \sum_{q \in Q} m_{q0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

とおくと , 問題 (3.1) の変数の数  $n$  と等式制約の数  $m$  は

$$n = \sum_{t \in T} n_t, \quad m = m_0 + \sum_{t \in T} m_t \quad (3.3)$$

となる . 現実の問題では , 装置数  $\bar{q}$  は 1 ~ 20 程度であるが , 運転期間  $\bar{t}$  は数百 ~ 数千に達する . また ,  $n_{qt}$  や  $m_{qt}$  は , 簡易モデルでは数個程度であるが , 精緻なモデルでは数千を越えることもある . なお ,  $m_{q0}$  は  $\bar{t}$  またはその数倍 ,  $m_{0t}$  は 1 ~ 数十程度である . したがって , 問題 (3.1) は , 数千またはそれをはるかに上回る変数と制約条件をもつ大規模な非線形計画問題となる .

問題 (3.1) の構造を図 3.1 に示す . 図 3.1 は , 等式制約を構成する各関数が , 黒く塗られた部分に対応する変数だけを含むことを示している . 図 3.1 より , 問題 (3.1) は主 block-angular の入れ子構

造をもつことがわかる．現実の問題では，制約条件 (3.1-b) も特徴的な構造をもつことがある．たとえば，触媒の劣化度合いは製品生産量の累計値の関数となり，つぎのように定式化できる．

$$\theta_{qt}(w_{qt}, s_{qt}) = 0, \quad \sum_{\tau=1}^t r_{q\tau} - s_{qt} = 0 \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.4)$$

ただし， $w_{qt}, r_{qt}, s_{qt}$  はそれぞれ装置  $q$  の時刻  $t$  における触媒の劣化度合い，製品生産量およびその累計値である (3.4) の第 1 式は問題 (3.1) の制約条件 (3.1-d) と同じタイプであるが，第 2 式はつぎのように書き換えられる．

$$\begin{aligned} r_{q1} - s_{q1} &= 0 \quad (q \in Q) \\ s_{q1} + r_{q2} - s_{q2} &= 0 \quad (q \in Q) \\ s_{q2} + r_{q3} - s_{q3} &= 0 \quad (q \in Q) \\ &\vdots \\ s_{q, \bar{t}-1} + r_{q\bar{t}} - s_{q\bar{t}} &= 0 \quad (q \in Q) \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.5) 式は制約条件 (3.1-b) と同じタイプであり，階段型の構造をもつことがわかる．

	$x_{11}$ $\dots$ $x_{1\bar{t}}$	$\dots$	$x_{\bar{q}1}$ $\dots$ $x_{\bar{q}\bar{t}}$
$g_{1\cdot}$	■		
$\vdots$		$\ddots$	
$g_{\bar{q}\cdot}$			■
$h_{\cdot 1}$	■		■
$\vdots$		$\ddots$	
$h_{\cdot \bar{t}}$		■	■
$c_{11}$	■		
$\vdots$		$\ddots$	
$c_{1\bar{t}}$		■	
$\vdots$			$\ddots$
$c_{\bar{q}1}$			■
$\vdots$			
$c_{\bar{q}\bar{t}}$			■

図 3.1: Structure of problem (3.1)

### 3.3 主双対内点法

主双対内点法の計算負荷の大部分は，探索方向の計算に費やされる．そこで，問題 (3.1) が主 block-angular の入れ子構造をもつことを利用して，探索方向を並列的に計算することを考える．制約条件 (3.1-b)，(3.1-c) に対する Lagrange 乗数をそれぞれ  $\mathbf{y}_{q0} \in \mathfrak{R}^{m_{q0}}$  ( $q \in Q$ )， $\mathbf{y}_{0t} \in \mathfrak{R}^{m_{0t}}$  ( $t \in T$ )，制約条件 (3.1-d)，(3.1-e) に対する Lagrange 乗数をそれぞれ  $\mathbf{y}_{qt} \in \mathfrak{R}^{m_{qt}}$ ， $\mathbf{z}_{qt} \in \mathfrak{R}^{n_{qt}}$  ( $q \in Q; t \in T$ ) とする．また，表記を簡単にするために， $t \in T$  のそれぞれに対して  $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_{1t}^T, \dots, \mathbf{x}_{\bar{t}t}^T)^T$ ， $\mathbf{y}_t = (\mathbf{y}_{0t}^T, \mathbf{y}_{1t}^T, \dots, \mathbf{y}_{\bar{t}t}^T)^T$ ， $\mathbf{z}_t = (\mathbf{z}_{1t}^T, \dots, \mathbf{z}_{\bar{t}t}^T)^T$  とおき， $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_{\bar{t}}^T)^T$ ， $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{y}_{10}^T, \dots, \mathbf{y}_{\bar{q}0}^T)^T$ ， $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_0^T, \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_{\bar{t}}^T)^T$ ， $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \dots, \mathbf{z}_{\bar{t}}^T)^T$  とする．そのとき，

$$\begin{aligned} \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt}) &= f_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) + \mathbf{y}_{q0}^T \mathbf{g}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) \\ &\quad + \mathbf{y}_{0t}^T \mathbf{h}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) + \mathbf{y}_{qt}^T \mathbf{c}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) - \mathbf{z}_{qt}^T \mathbf{x}_{qt} \\ &\quad (q \in Q; t \in T) \end{aligned}$$

とおけば，問題 (3.1) に対する Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt}) \\ &\quad + \sum_{q \in Q} \mathbf{y}_{q0}^T \mathbf{g}_{q0} + \sum_{t \in T} \mathbf{y}_{0t}^T \mathbf{h}_{0t} \end{aligned}$$

である．以下では，関数  $\ell$  の変数  $\mathbf{x}$  に関する勾配ベクトルとヘッセ行列をそれぞれ  $\nabla \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  および  $\nabla^2 \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  と書き，関数  $\ell_{qt}$  の変数  $\mathbf{x}_{qt}$  に関する勾配ベクトルとヘッセ行列をそれぞれ  $\nabla \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt})$  および  $\nabla^2 \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt})$  と書く．そのとき， $\nabla \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  は  $\nabla \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt})$  ( $q \in Q; t \in T$ ) を部分ベクトルとする  $n$  次元ベクトル， $\nabla^2 \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  は  $\nabla^2 \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt})$  ( $q \in Q; t \in T$ ) を対角要素とする  $n \times n$  ブロック対角行列となる．

問題 (3.1) に対する主双対内点法は，中心化 KKT 条件

$$\nabla \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{y}_{q0}, \mathbf{y}_{0t}, \mathbf{y}_{qt}, \mathbf{z}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.6-a)$$

$$\mathbf{g}_{q0} + \sum_{t \in T} \mathbf{g}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (q \in Q) \quad (3.6-b)$$

$$\mathbf{h}_{0t} + \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (t \in T) \quad (3.6-c)$$

$$\mathbf{c}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}) = \mathbf{0} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.6-d)$$

$$X_{qt} Z_{qt} \mathbf{1} - \mu \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.6-e)$$

を近似的に満たす  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ， $\mathbf{y}$ ， $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  を求め，障壁パラメータ  $\mu > 0$  をより小さな値に更新するという手続きを繰返して，問題 (3.1) とその双対問題の解の組に収束する点列を生成する反復法である

[57, 94] . ただし ,  $X_{qt}, Z_{qt}$  はそれぞれベクトル  $\mathbf{x}_{qt}, \mathbf{z}_{qt}$  の各成分を対角要素とする対角行列 ,  $\mathbf{1}$  は全成分が 1 のベクトルである .

(3.6) 式の近似解は , 準 Newton 法に基づく反復法で計算する . 点  $\mathbf{x}^{(k)} > \mathbf{0}, \mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)} > \mathbf{0}$  が与えられたとき , 探索方向  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}, \Delta \mathbf{y}^{(k)}, \Delta \mathbf{z}^{(k)}$  は , 連立 1 次方程式

$$B_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{x}_{qt} + \mathcal{G}_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{y}_{q0} + \mathcal{H}_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{y}_{0t} + \mathcal{C}_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{y}_{qt} - \Delta \mathbf{z}_{qt} = -\nabla \ell_{qt}^{(k)} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.7-a)$$

$$\sum_{t \in T} (\mathcal{G}_{qt}^{(k)})^T \Delta \mathbf{x}_{qt} = -\mathbf{g}_{q0} - \sum_{t \in T} \mathbf{g}_{qt}^{(k)} \quad (q \in Q) \quad (3.7-b)$$

$$\sum_{q \in Q} (\mathcal{H}_{qt}^{(k)})^T \Delta \mathbf{x}_{qt} = -\mathbf{h}_{0t} - \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_{qt}^{(k)} \quad (t \in T) \quad (3.7-c)$$

$$(\mathcal{C}_{qt}^{(k)})^T \Delta \mathbf{x}_{qt} = -\mathbf{c}_{qt}^{(k)} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.7-d)$$

$$Z_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{x}_{qt} + X_{qt}^{(k)} \Delta \mathbf{z}_{qt} = \mu^{(k)} \mathbf{1} - X_{qt}^{(k)} Z_{qt}^{(k)} \mathbf{1} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.7-e)$$

の解として求められる . ただし ,  $B_{qt}^{(k)}$  は  $\nabla^2 \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)}, \mathbf{y}_{q0}^{(k)}, \mathbf{y}_{0t}^{(k)}, \mathbf{y}_{qt}^{(k)}, \mathbf{z}_{qt}^{(k)})$  を近似する正定値対称行列である . また , 表記を簡単にするために  $\mathcal{G}_{qt}^{(k)} = \nabla \mathbf{g}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$ ,  $\mathcal{H}_{qt}^{(k)} = \nabla \mathbf{h}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$ ,  $\mathcal{C}_{qt}^{(k)} = \nabla \mathbf{c}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$  とおき ,  $\nabla \ell_{qt}^{(k)} = \nabla \ell_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)}, \mathbf{y}_{q0}^{(k)}, \mathbf{y}_{0t}^{(k)}, \mathbf{y}_{qt}^{(k)}, \mathbf{z}_{qt}^{(k)})$ ,  $\mathbf{g}_{qt}^{(k)} = \mathbf{g}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$ ,  $\mathbf{h}_{qt}^{(k)} = \mathbf{h}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$ ,  $\mathbf{c}_{qt}^{(k)} = \mathbf{c}_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$  としている (3.6-e) 式より ,  $\Delta \mathbf{z}_{qt}$  は次式で計算できる .

$$\Delta \mathbf{z}_{qt} = (X_{qt}^{(k)})^{-1} \left\{ \mu^{(k)} \mathbf{1} - Z_{qt}^{(k)} (\mathbf{x}_{qt}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}_{qt}) \right\} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.8)$$

(3.7) 式を (3.6-a) 式に代入して整理すると ,  $\Delta \mathbf{x}_{qt}$  に関する連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} & \left\{ B_{qt}^{(k)} + (X_{qt}^{(k)})^{-1} Z_{qt}^{(k)} \right\} \Delta \mathbf{x}_{qt} \\ & = \mu^{(k)} (X_{qt}^{(k)})^{-1} \mathbf{1} - \nabla f_{qt}^{(k)} - \mathcal{G}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{q0} \\ & \quad - \mathcal{H}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{0t} - \mathcal{C}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{qt} \quad (q \in Q; t \in T) \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る . ただし ,  $\nabla f_{qt}^{(k)} = \nabla f_{qt}(\mathbf{x}_{qt}^{(k)})$  であり ,

$$\tilde{\mathbf{y}}_{q0} = \mathbf{y}_{q0}^{(k)} + \Delta \mathbf{y}_{q0} \quad (q \in Q)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{0t} = \mathbf{y}_{0t}^{(k)} + \Delta \mathbf{y}_{0t} \quad (t \in T)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{qt} = \mathbf{y}_{qt}^{(k)} + \Delta \mathbf{y}_{qt} \quad (q \in Q; t \in T)$$

とする . 行列  $B_{qt}^{(k)}$  の正定値対称性と  $\mathbf{x}^{(k)} > \mathbf{0}, \mathbf{z}^{(k)} > \mathbf{0}$  より (3.7) 式左辺の係数行列も正定値対称である . そこで ,

$$\Psi_{qt}^{(k)} = \left\{ B_{qt}^{(k)} + (X_{qt}^{(k)})^{-1} Z_{qt}^{(k)} \right\}^{-1} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.10)$$

$$\lambda_{qt}^{(k)} = \Psi_{qt}^{(k)} \left\{ \mu^{(k)} (X_{qt}^{(k)})^{-1} \mathbf{1} - \nabla f_{qt}^{(k)} \right\} \quad (q \in Q; t \in T)$$

とおくと (3.9) 式より  $\Delta x_{qt}$  は次式で計算できる .

$$\Delta x_{qt} = \lambda_{qt}^{(k)} - \Psi_{qt}^{(k)} \left\{ \mathcal{G}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{q0} + \mathcal{H}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{0t} + \mathcal{C}_{qt}^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_{qt} \right\} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.11)$$

以下では, 表記を簡単にするために,  $\tilde{\mathbf{y}}_0 = (\tilde{\mathbf{y}}_{10}^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{\bar{q}0}^T)^T$  とおき,  $\tilde{\mathbf{y}}_t = (\tilde{\mathbf{y}}_{0t}^T, \tilde{\mathbf{y}}_{1t}^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{\bar{q}t}^T)^T$  ( $t \in T$ ) とする . そのとき (3.11) を (3.7-c), (3.7-d) 式に代入して整理すると,  $\tilde{\mathbf{y}}_t$  に関する連立 1 次方程式

$$(\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{c}_t^{(k)} + (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \left\{ \lambda_t^{(k)} - \Psi_t^{(k)} \mathcal{G}_t^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_0 \right\} \quad (t \in T) \quad (3.12)$$

を得る . ただし, 行列  $\Psi_t^{(k)}$ ,  $\mathcal{G}_t^{(k)}$ ,  $\mathcal{C}_t^{(k)}$  は

$$\Psi_t^{(k)} = \text{diag} \left\{ \Psi_{1t}^{(k)}, \dots, \Psi_{\bar{q}t}^{(k)} \right\} \quad (t \in T) \quad (3.13)$$

$$\mathcal{G}_t^{(k)} = \text{diag} \left\{ \mathcal{G}_{1t}^{(k)}, \dots, \mathcal{G}_{\bar{q}t}^{(k)} \right\} \quad (t \in T) \quad (3.14)$$

$$\mathcal{C}_t^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{1t}^{(k)} & \mathcal{C}_{1t}^{(k)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathcal{H}_{\bar{q}t}^{(k)} & 0 & & \mathcal{C}_{\bar{q}t}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (t \in T) \quad (3.15)$$

で定義され, ベクトル  $\lambda_t^{(k)}$ ,  $\mathbf{c}_t^{(k)}$  は次式で定義される .

$$\lambda_t^{(k)} = \left( (\lambda_{1t}^{(k)})^T, \dots, (\lambda_{\bar{q}t}^{(k)})^T \right)^T \quad (t \in T)$$

$$\mathbf{c}_t^{(k)} = \left( \left( \mathbf{h}_{0t} + \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_{qt}^{(k)} \right) \mathbf{c}_{1t}^{(k)}, \dots, (\mathbf{c}_{\bar{q}t}^{(k)})^T \right)^T \quad (t \in T)$$

行列  $\mathcal{C}_t^{(k)}$  がフルランクと仮定すると,  $\Psi_t^{(k)}$  の正定値性より (3.12) 式左辺の係数行列も正定値である . そこで,

$$\Phi_t^{(k)} = \left\{ (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \right\}^{-1} \quad (t \in T) \quad (3.16)$$

とおくと (3.12) 式より  $\tilde{\mathbf{y}}_t$  は次式で計算できる .

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \Phi_t^{(k)} \left[ \mathbf{c}_t^{(k)} + (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \left\{ \lambda_t^{(k)} - \Psi_t^{(k)} \mathcal{G}_t^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_0 \right\} \right] \quad (t \in T) \quad (3.17)$$

(3.17) 式を (3.11) 式に代入し, これをさらに (3.7-b) 式に代入して整理すると,  $\tilde{\mathbf{y}}_0$  に関する連立 1 次方程式

$$\Upsilon^{(k)} \tilde{\mathbf{y}}_0 = \boldsymbol{\eta}^{(k)} \quad (3.18)$$

を得る．ただし， $\Upsilon^{(k)}$  は  $m_0 \times m_0$  行列， $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$  は  $m_0$  次元ベクトルであり，

$$\begin{aligned}\Upsilon_t^{(k)} &= (\mathcal{G}_t^{(k)})^T \left[ \Psi_t^{(k)} - \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \Phi_t^{(k)} (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \right] \mathcal{G}_t^{(k)} \\ &\quad (t \in T) \\ \boldsymbol{\nu}_t^{(k)} &= (\mathcal{G}_t^{(k)})^T \left[ \boldsymbol{\lambda}_t^{(k)} - \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \Phi_t^{(k)} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \mathbf{c}_t^{(k)} + (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \boldsymbol{\lambda}_t^{(k)} \right\} \right] \quad (t \in T)\end{aligned}\tag{3.19}$$

および

$$\begin{aligned}(t \in T) \quad \mathbf{g}_0 &= (\mathbf{g}_{10}^T, \dots, \mathbf{g}_{q0}^T)^T \\ \mathbf{g}_t^{(k)} &= ((\mathbf{g}_{1t}^{(k)})^T, \dots, (\mathbf{g}_{qt}^{(k)})^T)^T \quad (t \in T)\end{aligned}$$

を用いて

$$\Upsilon^{(k)} = \sum_{t \in T} \Upsilon_t^{(k)}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(k)} = \mathbf{g}_0 + \sum_{t \in T} \mathbf{g}_t^{(k)} + \sum_{t \in T} \boldsymbol{\nu}_t^{(k)}\tag{3.20}$$

で定義される．ここで，

$$\Xi_t^{(k)} = \Psi_t^{(k)} - \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \Phi_t^{(k)} (\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \quad (t \in T)\tag{3.21}$$

とおくと (3.19) 式より

$$\Upsilon_t^{(k)} = (\mathcal{G}_t^{(k)})^T \Xi_t^{(k)} \mathcal{G}_t^{(k)} \quad (t \in T)\tag{3.22}$$

である．行列  $\Psi_t^{(k)}$  は正定値対称であるから，

$$\Psi_t^{(k)} = (\Omega_t^{(k)})^T \Omega_t^{(k)} \quad (t \in T)$$

を満たす正則行列  $\Omega_t^{(k)}$  ( $t \in T$ ) が存在する．ここで， $I_t$  を  $n_t \times n_t$  単位行列として

$$P_t^{(k)} = I_t - \Omega_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} \Phi_t^{(k)} (\mathcal{C}_t^{(k)})^T (\Omega_t^{(k)})^T \quad (t \in T)$$

とおくと，

$$P_t^{(k)} = (P_t^{(k)})^T P_t^{(k)} \quad (t \in T)$$

であり (3.21) 式より

$$\Xi_t^{(k)} = (\Omega_t^{(k)})^T P_t^{(k)} \Omega_t^{(k)} \quad (t \in T)$$

となるから  $\Xi_t^{(k)}$  も正定値対称行列である．よって (3.22) 式より  $\mathcal{G}_t^{(k)}$  がフルランクならば  $\Upsilon_t^{(k)}$  は正定値対称行列となり，連立 1 次方程式 (3.15) は唯一の解をもつ．

問題 (3.1) に対する主双対内点法の各反復において探索方向を定める手続きは，つぎのようにまとめられる．

【 手続き 1 】

ステップ 1 (3.10) 式より  $\Psi_{qt}^{(k)}$  ( $q \in Q; t \in T$ ) を計算する .

ステップ 2 (3.16) 式より  $\Phi_t^{(k)}$  ( $t \in T$ ) を計算する .

ステップ 3 連立 1 次方程式 (3.18) を解き  $\tilde{y}_0$  を求める .

ステップ 4 (3.17) 式より  $\tilde{y}_t$  ( $t \in T$ ) を計算する .

ステップ 5 (3.11) 式より  $\Delta x_{qt}$  ( $q \in Q; t \in T$ ) を計算する .

ステップ 6 (3.8) 式より  $\Delta z_{qt}$  ( $q \in Q; t \in T$ ) を計算する .

手続き 1 のステップ 1, 5, 6 は ,  $q \in Q$  と  $t \in T$  のそれぞれについて並列的に実行でき , ステップ 2, 4 は  $t \in T$  のそれぞれについて並列的に実行できる . また , ステップ 3 で解く連立 1 次方程式 (3.18) の係数行列  $\Upsilon^{(k)}$  を構成する行列  $\Upsilon_t^{(k)}$  も ,  $t \in T$  のそれぞれについて独立に計算できる . よって , 問題 (3.1) に対する主双対内点法は , 並列計算機を用いて効率良く実行できると期待される .

手続き 1 のステップ 4, 5, 6 は単純な線形計算であるが , ステップ 1, 2, 3 は計算負荷が過大とならないよう計算方法を工夫する必要がある . ステップ 1 において , 行列  $\Psi_{qt}^{(k)}$  は  $B_{qt}^{(k)} + (X_{qt}^{(k)})^{-1} Z_{qt}^{(k)}$  の修正 Cholesky 分解

$$B_{qt}^{(k)} + (X_{qt}^{(k)})^{-1} Z_{qt}^{(k)} = L_{qt}^{(k)} (D_{qt}^{(k)}) (L_{qt}^{(k)})^T \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.23)$$

より求められる . ただし ,  $L_{qt}^{(k)}$  は対角要素が 1 の下三角行列 ,  $D_{qt}^{(k)}$  は正定値対角行列である (3.10) , (3.23) 式より

$$(L_{qt}^{(k)})^T \Psi_{qt}^{(k)} = (D_{qt}^{(k)})^{-1} (L_{qt}^{(k)})^{-1} \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.24)$$

を得る . 行列  $\Psi_{qt}^{(k)}$  は対称で ,  $(L_{qt}^{(k)})^{-1}$  は対角要素が 1 の下三角行列であるから (3.24) 式両辺の上三角要素を比較すれば ,  $(L_{qt}^{(k)})^{-1}$  を具体的に計算することなく  $\Psi_{qt}^{(k)}$  の各要素を簡単な代入演算だけで求めることができる .

つぎにステップ 2 について考える (3.13) (3.15) 式より

$$(\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)} = \begin{pmatrix} M_{00t}^{(k)} & M_{01t}^{(k)} & \cdots & M_{0\bar{q}t}^{(k)} \\ M_{10t}^{(k)} & M_{11t}^{(k)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{\bar{q}0t}^{(k)} & 0 & & M_{\bar{q}\bar{q}t}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (t \in T)$$

であり ,  $(\mathcal{C}_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} \mathcal{C}_t^{(k)}$  も特徴的な構造をもつ . ただし ,

$$\begin{aligned} M_{00t}^{(k)} &= \sum_{q \in Q} (\mathcal{H}_{qt}^{(k)})^T \Psi_{qt}^{(k)} \mathcal{H}_{qt}^{(k)} \quad (t \in T) \\ M_{q0t}^{(k)} &= (\mathcal{C}_{qt}^{(k)})^T \Psi_{qt}^{(k)} \mathcal{H}_{qt}^{(k)} \\ &= (M_{0q}^{(k)})^T \quad (q \in Q; t \in T) \\ M_{q\bar{q}t}^{(k)} &= (\mathcal{C}_{qt}^{(k)})^T \Psi_{qt}^{(k)} \mathcal{C}_{qt}^{(k)} \quad (q \in Q; t \in T) \end{aligned} \quad (3.25)$$



である．行列  $(C_t^{(k)})^T \Psi_t^{(k)} C_t^{(k)}$  に対応して，行列  $\Phi_t^{(k)}$  を

$$\Phi_t^{(k)} = \begin{pmatrix} \Phi_{00t}^{(k)} & \Phi_{01t}^{(k)} & \cdots & \Phi_{0\bar{q}t}^{(k)} \\ \Phi_{10t}^{(k)} & \Phi_{11t}^{(k)} & \cdots & \Phi_{1\bar{q}t}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{\bar{q}0t}^{(k)} & \Phi_{\bar{q}1t}^{(k)} & \cdots & \Phi_{\bar{q}\bar{q}t}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (t \in T)$$

とブロック分割すると (3.16) 式より

$$\Phi_{00t}^{(k)} = \left\{ M_{00t}^{(k)} - \sum_{q \in Q} M_{0qt}^{(k)} (M_{qqt}^{(k)})^{-1} M_{q0t}^{(k)} \right\}^{-1} \quad (t \in T) \quad (3.26-a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{q0t}^{(k)} &= -(M_{qqt}^{(k)})^{-1} M_{q0t}^{(k)} \Phi_{00t}^{(k)} \\ &= (\Phi_{0qt}^{(k)})^T \quad (q \in Q; t \in T) \end{aligned} \quad (3.26-b)$$

$$\Phi_{qqt}^{(k)} = (M_{qqt}^{(k)})^{-1} (I_{qt} - M_{q0t}^{(k)} \Phi_{0qt}^{(k)}) \quad (q \in Q; t \in T) \quad (3.26-c)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{q'q't}^{(k)} &= -(M_{qqt}^{(k)})^{-1} M_{q'q't}^{(k)} \Phi_{0q't}^{(k)} \\ &= (\Phi_{q'qt}^{(k)})^T \quad (q, q' \in Q, q' > q; t \in T) \end{aligned} \quad (3.26-d)$$

を得る．ただし， $I_{qt}$  は  $m_{qt} \times m_{qt}$  単位行列である．よって， $t \in T$  のそれぞれに対して，つぎのような計算を並列的に実行すればよい．まず，修正 Cholesky 分解を用いて  $(M_{qqt}^{(k)})^{-1}$  ( $q \in Q$ ) を計算したあと (3.26-a) 式により  $\Phi_{00t}^{(k)}$  を計算する．つぎに (3.26-b) 式により  $\Phi_{q0t}^{(k)} = (\Phi_{0qt}^{(k)})^T$  ( $q \in Q$ ) を計算したあと (3.26-c) (3.26-d) 式を用いて  $\Phi_{q'q't}^{(k)} = (\Phi_{q'qt}^{(k)})^T$  ( $q, q' \in Q$ ) を計算する．

最後に，ステップ 3 について考える．ステップ 3 の連立 1 次方程式 (3.18) 式は逐次的に解かざるを得ないが，問題 (3.1) の運転期間全体にまたがる制約条件が階段型の構造をもつときは，適当なオーダリングを施すことによって効率よく解くことができる (3.14) 式に示される行列  $\mathcal{G}_t^{(k)}$  のブロック構造に対応して (3.21) (3.22) 式で定義される行列  $\Xi_t^{(k)}$  と  $\Upsilon_t^{(k)}$  をそれぞれ

$$\Xi_t^{(k)} = \begin{pmatrix} \Xi_{11t}^{(k)} & \cdots & \Xi_{1\bar{q}t}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Xi_{\bar{q}1t}^{(k)} & \cdots & \Xi_{\bar{q}\bar{q}t}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_t^{(k)} = \begin{pmatrix} \Upsilon_{11t}^{(k)} & \cdots & \Upsilon_{1\bar{q}t}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Upsilon_{\bar{q}1t}^{(k)} & \cdots & \Upsilon_{\bar{q}\bar{q}t}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (t \in T) \quad (3.27)$$

のようにブロック分割すると，

$$\Upsilon_{q'q't}^{(k)} = (\mathcal{G}_{qt}^{(k)})^T \Xi_{q'q't}^{(k)} \mathcal{G}_{q't}^{(k)} \quad (q, q' \in Q; t \in T)$$

を得る．問題 (3.1) の制約条件 (3.1-b) が (3.5) 式に示すような階段型の構造をもつとき， $m_{q0} = \bar{t}$  ( $q \in Q$ ) であり，次式に示すように  $n_{qt} \times \bar{t}$  行列  $\mathcal{G}_{qt}^{(k)}$  は  $t$  列と  $t+1$  列の 2 列 ( $t = \bar{t}$  のときは  $\bar{t}$

列の 1 列) のみに非零要素を含む .

$$g_{qt}^{(k)} = \begin{cases} (\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \nabla g_{q\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \nabla g_{q\bar{t},t+1}^{(k)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}) & (\bar{t} \neq t \in T) \\ (\mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \nabla g_{q\bar{t}\bar{t}}^{(k)}) & (t = \bar{t}) \end{cases} \quad (q \in Q)$$

ただし,  $q \in Q$  と  $t \in T$  のそれぞれに対して,  $\nabla g_{q\tau}^{(k)}$  ( $\tau = t, t+1$ ) はベクトル値関数  $g_{qt}$  の  $\tau$  行目を構成する関数の  $x_{qt}^{(k)}$  における勾配ベクトルである . したがって,  $\Upsilon_{qq't}^{(k)}$  は  $\bar{t} \times \bar{t}$  行列であり, 次式に示すように非零要素は  $t$  行  $t$  列,  $t$  行  $t+1$  列,  $t+1$  行  $t$  列,  $t+1$  行  $t+1$  列の 4 要素 ( $t = \bar{t}$  のときは  $\bar{t}$  行  $\bar{t}$  列の 1 要素) のみである .

$$\Upsilon_{qq't}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{tt} & (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{t,t+1} & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{t+1,t} & (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{t+1,t+1} & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \quad (q, q' \in Q; \bar{t} \neq t \in T)$$

$$\Upsilon_{qq't}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\Upsilon_{qq'\bar{t}}^{(k)})_{\bar{t}\bar{t}} \end{pmatrix} \quad (q, q' \in Q; t = \bar{t})$$

ただし,  $(\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{\tau\tau'}$  はつぎのようなスカラー値である .

$$(\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{\tau\tau'} = (\nabla g_{q\tau}^{(k)})^T \Xi_{qq't}^{(k)} \nabla g_{q'\tau'}^{(k)} \quad (q, q' \in Q; t \in T; \tau, \tau' \in \{t, t+1\})$$

よって、連立 1 次方程式 (3.18) の係数行列  $\Upsilon^{(k)}$  は  $\bar{q}\bar{t} \times \bar{q}\bar{t}$  行列であり、要素を用いて

$$\Upsilon^{(k)} = \begin{pmatrix} v_{1111}^{(k)} \cdots v_{111\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}11}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}1\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{11\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{11\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{\bar{q}111}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}11\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}11}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}1\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{\bar{q}1\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}1\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

と書くと (3.20) (3.27) 式より各要素の値は

$$v_{qq'\tau\tau'}^{(k)} = \begin{cases} (\Upsilon_{qq'1}^{(k)})_{11} & (\tau = \tau' = t; \quad t = 1) \\ (\Upsilon_{qq',t-1}^{(k)})_{t-1,t-1} + (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{tt} & (\tau = \tau' = t; \quad 1 \neq t \in T) \\ (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{t+1,t} & (\tau = t+1, \tau' = t; \quad \bar{t} \neq t \in T) \\ (\Upsilon_{qq't}^{(k)})_{t,t+1} & (\tau = t, \tau' = t+1; \quad \bar{t} \neq t \in T) \\ 0 & (|\tau - \tau'| > 1, \quad \tau, \tau' \in T) \end{cases} \quad (q, q' \in Q) \quad (3.29)$$

となる (3.28) (3.29) 式より、 $\Upsilon^{(k)}$  は  $\bar{t} \times \bar{t}$  三重対角行列を縦に  $\bar{q}$  個、横に  $\bar{q}$  個集めた構造であることがわかる。

(3.28) 式より、 $\Upsilon^{(k)}$  は要素  $v_{qq'\tau\tau'}^{(k)}$  を行方向については添字  $q, \tau$  の昇順に、列方向については添字  $q', \tau'$  の昇順に並べたものである。ソートキーの順序を入換えて、要素  $v_{qq'\tau\tau'}^{(k)}$  を行方向については添字  $\tau, q$  の昇順に、列方向については添字  $\tau', q'$  の昇順に並べると、

$$\hat{\Upsilon}^{(k)} = \begin{pmatrix} v_{1111}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}11}^{(k)} \cdots v_{111\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}1\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{\bar{q}111}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}11}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}11\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}1\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{11\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{11\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{1\bar{q}\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \\ \vdots \\ v_{\bar{q}1\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}\bar{t}1}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}1\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \cdots v_{\bar{q}\bar{q}\bar{t}\bar{t}}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

を得る (3.29) (3.30) 式より、 $\hat{\Upsilon}^{(k)}$  はブロック三重対角行列であり、半帯幅  $2\bar{q} - 1$  の帯行列と見なすことができる。また、ベクトル  $\tilde{y}_0$  と  $\eta^{(k)}$  を成分を用いて

$$\tilde{y}_0 = ( \tilde{y}_{101}^T, \dots, \tilde{y}_{10\bar{t}}^T, \dots, \tilde{y}_{\bar{q}01}^T, \dots, \tilde{y}_{\bar{q}0\bar{t}}^T )^T$$

$$\eta^{(k)} = \left( (\eta_{101}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{10\bar{t}}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{\bar{q}01}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{\bar{q}0\bar{t}}^{(k)})^T \right)^T$$

と書き，これらを同様に並べかえて得られるベクトルを

$$\hat{\mathbf{y}}_0 = ( \tilde{y}_{101}^T, \dots, \tilde{y}_{\bar{q}01}^T, \dots, \tilde{y}_{10\bar{t}}^T, \dots, \tilde{y}_{\bar{q}0\bar{t}}^T )^T$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(k)} = \left( (\eta_{101}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{\bar{q}01}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{10\bar{t}}^{(k)})^T, \dots, (\eta_{\bar{q}0\bar{t}}^{(k)})^T \right)^T$$

とするとき，連立 1 次方程式 (3.18) は次式と等価である．

$$\hat{\mathbf{Y}}^{(k)} \hat{\mathbf{y}}_0 = \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(k)} \quad (3.31)$$

帯行列  $\hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$  を修正 Cholesky 分解して得られる下三角行列も， $\hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$  と同じ半帯幅をもつ．現実の問題では，運転期間  $\bar{t}$  が数百～数千にも達するため，半帯幅  $2\bar{q} - 1$  は行列のサイズ  $\bar{q}\bar{t}$  よりはるかに小さい．よって，連立 1 次方程式 (3.31) を修正 Cholesky 分解を用いて解くことにより， $\tilde{\mathbf{y}}_0$  を効率よく計算することができる．

## 3.4 適用事例

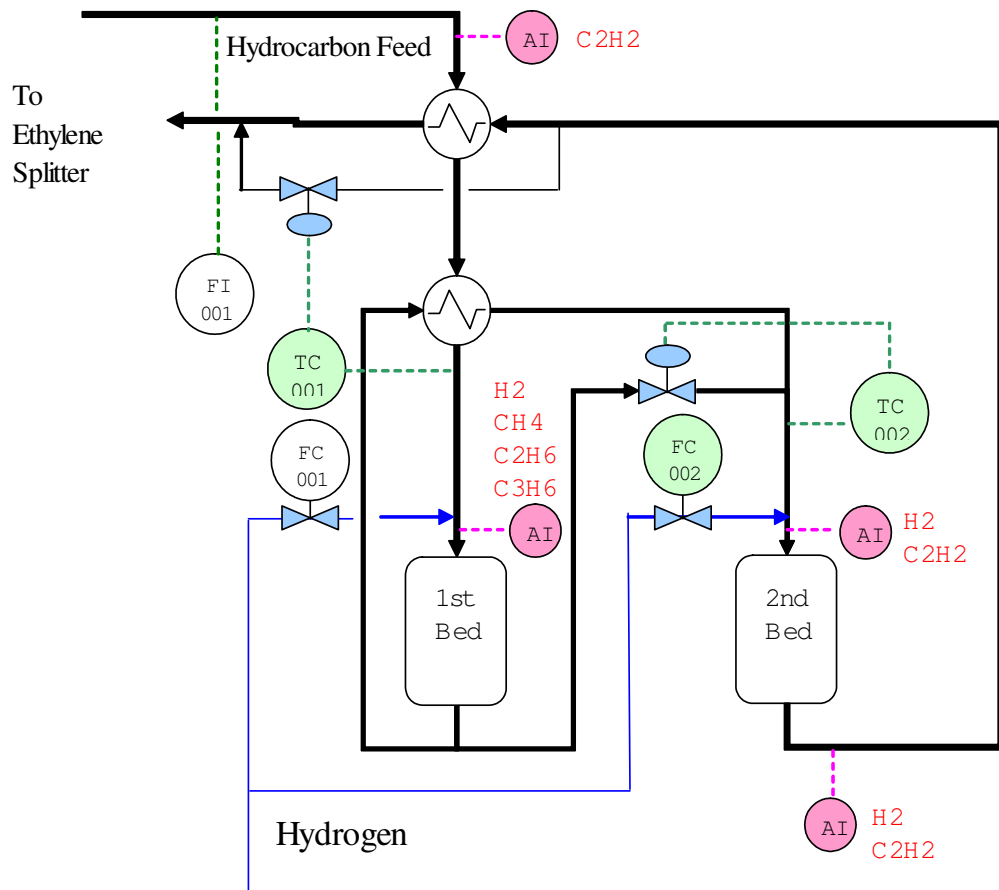
### 3.4.1 対象プロセス

前節までに述べた主双対内点法を用いた時系列プロセス最適化問題をアセチレン水添反応器の最適化制御システムに適用したのでその概要を紹介する．アセチレン水添反応器はエチレンプラント（ナフサを原料としてエチレンやプロピレンなどを生産する石油化学の基幹プロセス）において最終製品であるエチレンを精製するエチレン精製塔の前に位置し，フィードされる粗エチレン中に含まれるアセチレンをエチレンに水添除去する固定床の触媒反応器であり，その反応は以下のように記述される [12, 14] ．



上記の反応において，主反応は (3.32) であり，それ以外は副反応である (3.33) の反応は製品となるエチレンを価値の低いエタンに水添するのでなるべく抑えたい (3.34) の反応ではアセチレンが低重合してグリーンオイルと呼ばれるオリゴマーを生成する反応で  $n$  の数は 4 から 22 の幅で分布することが知られている [80] ．グリーンオイルは触媒表面に付着して触媒の活性を落とすことが知られているので [4, 31] ，なるべく生成を抑えることが好ましい．

対象としたアセチレン水添反応器は 2 筒からなる反応器であり，そのプロセスフローを図 3.2 に示す．脱エタン塔からフィードされる炭化水素 (Hydrocarbon) ガスは 1 筒に水素と共にフィードされる．その際に水素とアセチレンのモル比が一定となるように水素量 (FC001) が調整される．1 筒を出



☒ 3.2: Simplified process diagram of acetylene converter

てきたガスは再び水素 (FC002) と混合され、2 筒入口のアセチレンとのモル比が一定となるように調整されて 2 筒にフィードされる。一方、1 筒入口温度 (TC001) は 2 筒出口ガスを熱媒とした熱交換の負荷によって制御され、2 筒入口温度 (TC002) は冷却器を通過しないホットバイパスの流量によって制御される。2 筒出口ガス中のアセチレンは不純物として扱われ、1ppm 以下になるように管理される。また、触媒活性の劣化がある程度進むと、待機していた反応器に切替え、今まで運転していた反応器では触媒を再生する処置をとる。アセチレン水添器の運転目標は 2 筒出口アセチレン濃度上限などの制約条件を維持した上でエチレン収率もしくは選択率を最大化することであり、それは適切な反応器入口温度やモル比の設定によって決定されるが、制約条件を維持するために反応器入口温度やモル比を上げる操作が触媒劣化を促進するため全運転期間を通じての最も経済的な運転を達成することが困難であった。その因果関係を図 3.3 に示す。従来の運転員による運転では触媒の活性劣化により、2 筒出口アセチレン濃度が上昇してくるため、入口温度もしくはモル比を上げる調整を行う。その場合、温度とモル比のいずれを優先して調整するか、また、1 筒と 2 筒の配分をどうするかは運転員の経験にもとづく判断に委ねられていた。更にこれらの操作は結果としてグリーンオイルの生成量を増加させ、触媒の劣化を加速させる要因ともなっていた。アセチレン水添器の運転最適化はその重要性から、これまでもいくつかの試み [72, 14] がなされてきているが、実装され、閉ループのリアルタイム最適化として運用されているという報告は未だ無い。

### 3.4.2 モデリング

(3.32) ~ (3.34) 式の反応速度を Langmuir-Hinshelwood 型の反応速度式にて表現すると以下のように記述される [14]。

$$r_1 = \Theta_1 \frac{k_1 x_{H_2} x_{C_2H_2}}{(1 + K_{11} x_{H_2} + K_{12} x_{C_2H_2})^2} \quad (3.35-a)$$

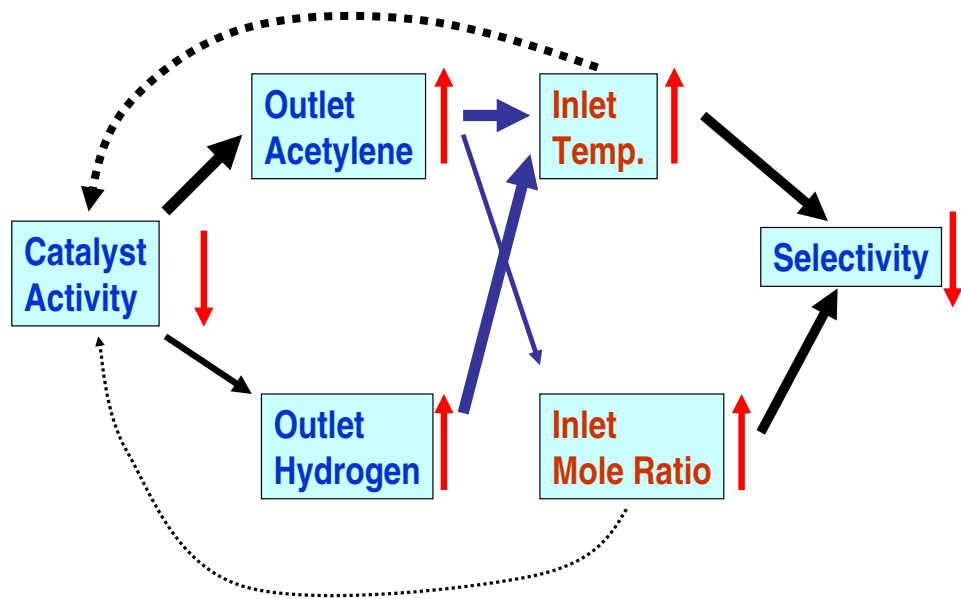
$$k_1 = k_{10} \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right) \quad (3.35-b)$$

$$r_2 = \Theta_2 \frac{k_2 x_{H_2} x_{C_2H_4}}{(1 + K_{21} x_{H_2} + K_{22} x_{C_2H_4})^2} \quad (3.35-c)$$

$$k_2 = k_{20} \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right) \quad (3.35-d)$$

$$r_3 = \Theta_3 k_3 x_{H_2} x_{C_2H_2} \quad (3.35-e)$$

$$k_3 = k_{30} \exp\left(-\frac{E_3}{RT}\right) \quad (3.35-f)$$



☒ 3.3: Causality of acetylene converter operation

ここで,  $r_1, r_2, r_3$  はそれぞれ (3.32) (3.33) (3.33) の反応速度,  $x_{H_2}$  は水素,  $x_{C_2H_2}$  はアセチレン,  $x_{C_2H_4}$  はエチレンのモル濃度である.  $T$  は温度,  $E$  は活性化エネルギー,  $R$  はガス定数,  $K$  および  $k$  はパラメータ,  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  はそれぞれ (3.32) (3.33), (3.34) 式の反応における触媒活性劣化度を示すパラメータであり, その定義は下式で与えられる [14].

$$\Theta(t) = \frac{\text{present conversion rate of the reactants}}{\text{conversion rate of the reactants wite fresh catalyst}}. \quad 0 \leq \Theta(t) \leq 1.$$

また, アセチレン水添反応器は断熱プラグフロー型の反応モデル (3.36) にて表現できる.

$$\frac{dx_{C_2H_2}}{dz} = -\frac{A_R \rho_b}{NV_R} (r_1 + nr_3) - \frac{x_{C_2H_2}}{N} \frac{dN}{dz} \quad (3.36-a)$$

$$\frac{dx_{H_2}}{dz} = -\frac{A_R \rho_b}{NV_R} (r_1 + r_2 + \frac{n}{2} r_3) - \frac{x_{H_2}}{N} \frac{dN}{dz} \quad (3.36-b)$$

$$\frac{dx_{C_2H_4}}{dz} = -\frac{A_R \rho_b}{NV_R} (-r_1 + r_2) - \frac{x_{C_2H_4}}{N} \frac{dN}{dz} \quad (3.36-c)$$

$$\frac{dx_{C_2H_6}}{dz} = -\frac{A_R \rho_b}{NV_R} (-r_2) - \frac{x_{C_2H_6}}{N} \frac{dN}{dz} \quad (3.36-d)$$

$$\frac{dx_{C_8H_{12}}}{dz} = -\frac{A_R \rho_b}{NV_R} (-r_3) - \frac{x_{C_8H_{12}}}{N} \frac{dN}{dz} \quad (3.36-e)$$

ここで  $A_R$  は反応器断面積,  $\rho_b$  は触媒層の密度,  $V_R$  は反応器の容積,  $N$  は全モル流量,  $z$  は反応器入口から出口に到る距離を示す. Froment らは固定床反応器における触媒劣化の進行は運転時間よりも触媒へのカーボン付着量により決まり, それは (3.37) 式の形で表現できることを提案している [31]. アセチレン水添反応におけるカーボン付着量はグリーンオイル生成量に他ならないので (3.37) におけるカーボン付着量はグリーンオイル生成量としている. また,  $\Theta(t)$  の劣化は副反応 ((3.33), (3.34)) にはほとんど見られないことが知られている [66, 70].

$$\Theta_1(t) = \frac{1}{1 + K_E \sum_{i=1}^t \mathcal{G}(t)} \quad (3.37)$$

ここで  $\mathcal{G}$  は (3.34) 式において生成するグリーンオイルの量,  $K_E$  はパラメータである. 実際のプラントにおけるグリーンオイルの生成量は微量であり, 一般にその量は計測されていなかったのでプロセスシミュレータにてグリーンオイル生成量を推算し, 多変量解析にて温度や流量などのプロセス変数との相関を確認したところ, グリーンオイルは反応器入口温度, 原料フィード量などと強い相関があり, 下式のようにそれらの線形結合で表現されることがわかった [24].

$$\mathcal{G} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d \quad (3.38)$$



ここで  $x_1$  は原料フィード量,  $x_2$  は反応器入口温度,  $x_3$  は反応器入口アセチレン濃度,  $a, b, c, d$  はパラメータである. 以上から (3.35, 3.36) 式は時系列最適化問題 (3.1) における同時刻制約 (3.1-d) 式に (3.37, 3.38) 式は時系列制約 (3.1-c) 式にあてはめ, 時系列最適化問題に定式化することができる. 目的関数は (3.39) 式で定義される運転開始時点から現時点 ( $t$ ) までの積算選択率 ( $S(t)$ ) の最大化である.

$$S(t) = \sum_{i=1}^t \frac{r_1(i)}{r_1(i) + r_2(i) + r_3(i)} \quad (3.39)$$

なお, 実装に際してはモデル (3.35 ~ 3.38) 式は代数式にて簡易化して表現しており, そのパラメータは運転データからフィッティングして求めている.

図 3.4 に最適化に用いているモデルの一部 (1 筒アセチレン消費量モデル) についてのフィッティング結果とバリデーション結果を示す. ここでは 3 番目の RUN のデータをトレーニングデータとしてパラメータのフィッティングを行い, 他の RUN (1, 2, 4 ~ 6) のデータに対してバリデーションを行っている. 一部の RUN に対してはモデルと実績の間でバイアスが生じているが挙動はほぼ一致している.

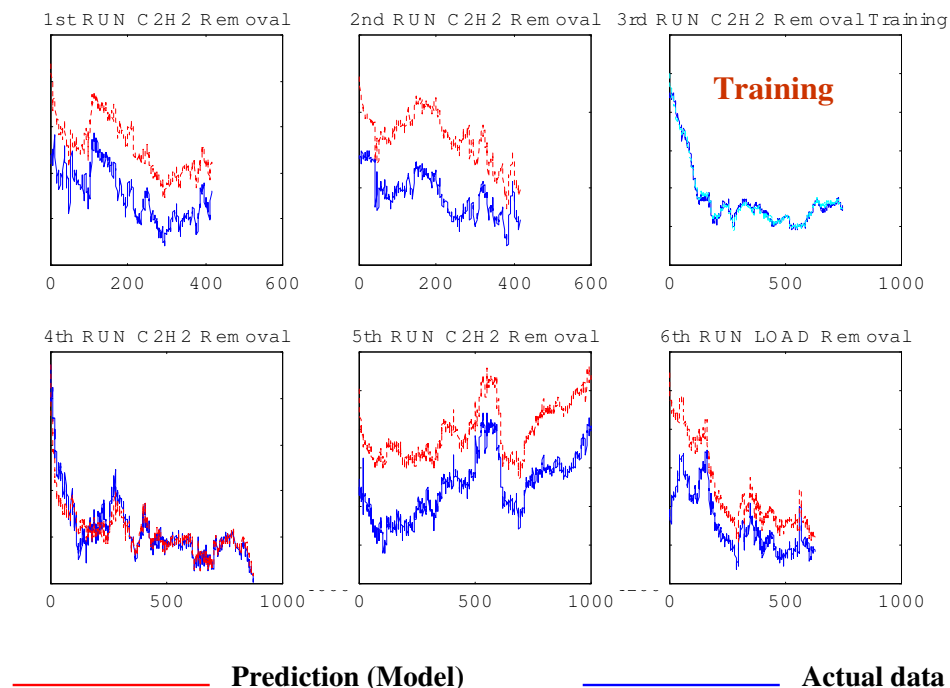


図 3.4: Example of model validation

表 3.1: Computation time of actual problems

Time Horizon (Day)	Comp. Time for Data1 (sec)	Comp. Time for Data2 (sec)
30	0.200	0.150
60	0.671	0.761
90	1.863	0.831

### 3.4.3 計算実験

前節で述べたアセチレン水添反応器時系列最適化問題は (3.1) 式の形に定式化すると,  $n_{qt} = 28, m_{q0} = \bar{t}, m_{0t} = 1, m_{qt} = 22$  であり, (3.2), (3.3) 式より変数の数  $n$  と等式制約条件の数  $m$  はそれぞれ  $n = 28\bar{q}t, m = (23\bar{q} + 1)\bar{t}$  となる. 表 3.1 に異なる初期値 (Data1, Data2) に対して Time Horizon ( $\bar{t}$ ) を 30 日, 60 日, 90 日と変えて最適化計算を行い, その計算時間を測定した結果をまとめた. Data1, Data2 とともに運転開始から 20 日目のデータである. ここで対象としているアセチレン水添器の運転日数は 3ヶ月程度なので, 90 日の Time Horizon で計算時間が数秒未満であれば, 性能としては十分である. 表 3.1 を見れば初期値によって計算時間は異なるが, 長くても 2 秒以下であるので満足な性能であるといえる.

また, 主双対内点法の反復は, 条件

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} \|\nabla \ell_{qt}^{(k+1)}\|_1 \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} \|\nabla f_{qt}^{(k+1)}\|_1 \right) \\
 & \frac{1}{m} \left\{ \sum_{q \in Q} \left\| \mathbf{g}_{q0} + \sum_{t \in T} \mathbf{g}_{qt}^{(k+1)} \right\|_1 \right. \\
 & \quad + \sum_{t \in T} \left\| \mathbf{h}_{0t} + \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_{qt}^{(k+1)} \right\|_1 \\
 & \quad \left. + \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} \left\| \mathbf{c}_{qt}^{(k+1)} \right\|_1 \right\} \leq \varepsilon \\
 & \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} \sum_{t \in T} \left\| Z_{qt}^{(k+1)} \mathbf{x}_{qt}^{(k+1)} \right\|_1 \leq \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

がすべて成り立ったときに停止するようにした. ただし, 許容誤差の値は  $\varepsilon = 10^{-6}$  としている.

計算実験は Pentium 1.7GHz, メモリ 512MB の PC で行った. また, アルゴリズムのコーディングには FORTRAN 言語を用い, すべての演算は倍精度で行った.

### 3.4.4 システムの実装

アセチレン水添器の最適化システムは図 3.5 に示すように多変数制御システムと時系列最適化システムの階層的システムによって実現した. 多変数制御はモデル予測制御の代表的な商用パッケージで

ある DMCplus[17, 88] を採用しており，操作変数は 1 筒入口温度・水素フィード量，2 筒入口温度・水素フィード量であり，制御変数は 1 筒モル比，2 筒モル比，1 筒反応負荷，2 筒出口アセチレン濃度，2 筒触媒層温度差などである．2 筒出口アセチレン濃度や 2 筒触媒層温度差の上限は運転員が設定するが，モル比，1 筒反応負荷などの目標値は上位の時系列最適化システムから与えられる．多変数制御システムの実行周期は 2 分，時系列最適化システムの実行周期は 8 時間である．また，モデルとプロセスが次第にずれてくるのが考えられるので，最適化計算実行のたびにモデルのバイアスをプロセスにあうように修正している．

一般に非線形最適化計算のプログラムを作成する場合，対象となる問題のモデルや目的関数を

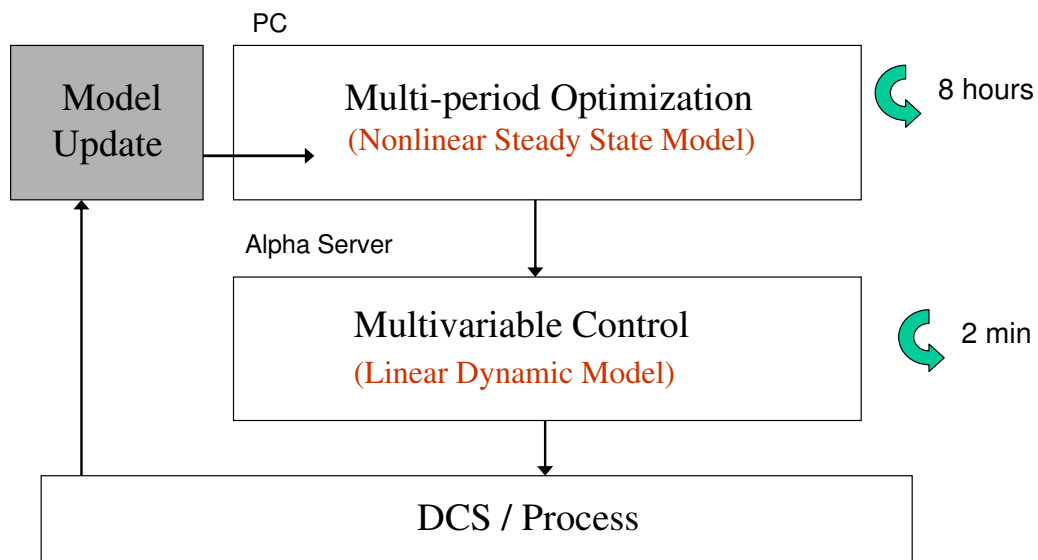
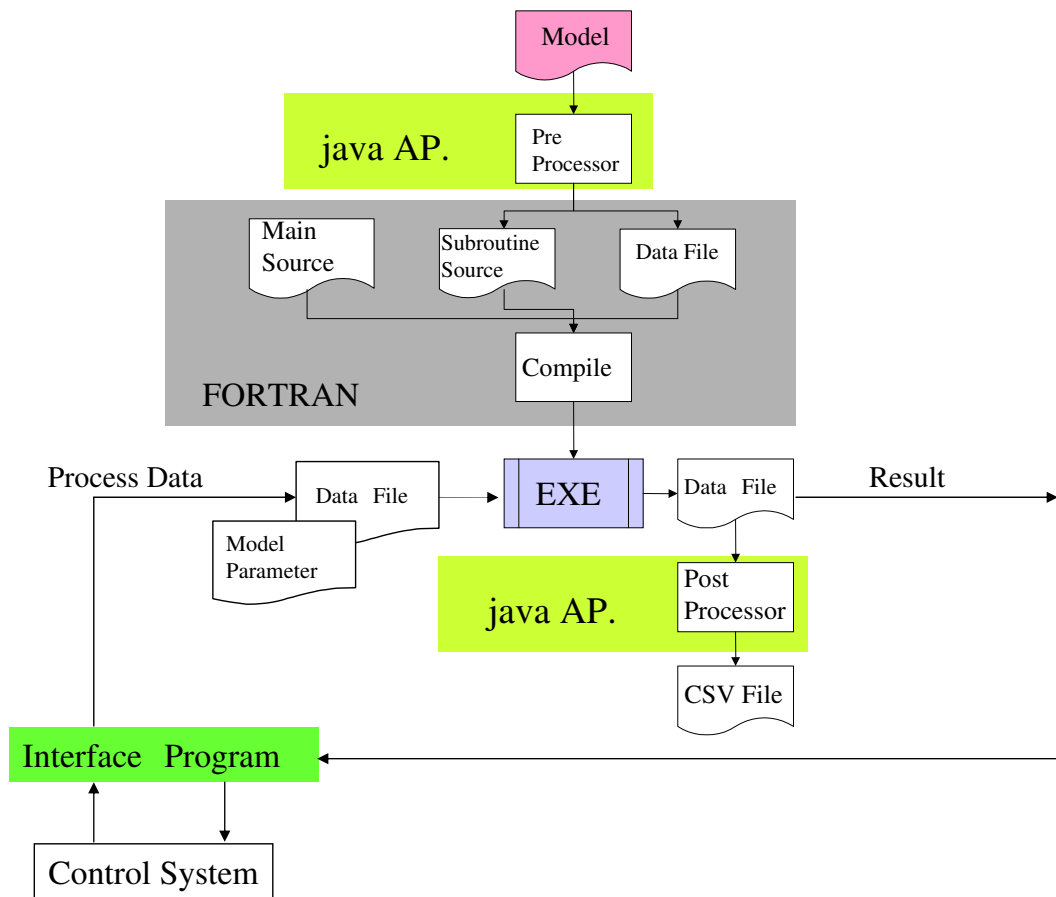


図 3.5: Acetylene converter optimization system

FORTTRAN などのプログラミング言語を用いてサブルーチンなどのソースファイルとして記述してプログラムに組み込む必要があり，その作業は専門家でないと困難である．しかしながら，システムの保守を考えた場合，モデル等の変更は容易に実施できるようにしなければならない．そこで，テキストファイルにて簡単にモデルを記述することによって関連するソースファイルを自動生成するプリ・プロセッサおよび最適化計算結果の解析が容易となるようなポストプロセッサを開発した [2, 3]．プリ・プロセッサは，テキスト形式に記載された数理計画モデルを，ソルバーが要求する構造をもつ時系列



☒ 3.6: System overview

**objective(type = maximize)**

$$\text{sum}_t(y_1(t) + y_2(t))$$

**concurrent constraints**

$$\log y_1(t) = a_1 \log y_{10}(t) + a_2 \log y_{11}(t) + a_3 x_1(t) + a_4 \log z_1(t) + a_5 \log x_2(t) + a_6 + a_7 \log z_2(t)$$

$$\log y_3(t) = b_1 \log y_{10}(t) + b_2 \log y_{11}(t) + b_3 x_1(t) + b_4 \log z_1(t) + b_5 \log x_2(t) + b_6 \log z_2(t) + b_7$$

$$\log y_4(t) = c_1 \log y_{10}(t) + c_2 \log y_{11}(t) + c_3 x_1(t) + c_4 \log z_1(t) + c_5 \log x_2(t) + c_6 \log z_2(t) + c_7$$

$$y_5(t) = y_3(t) / z_2(t) / 10000$$

$$y_4(t) = z_4(t) z_2(t) x_2(t) / 100 + y_9(t) / z_7(t) - z_6(t) y_7(t) / 1000000$$

...

$$Lx_1 \leq x_1(t) \leq Ux_1$$

$$Lx_2 \leq x_2(t) \leq Ux_2$$

$$y_7(t) \leq Uy_7$$

...

**time series constraints**

$$y_{10}(t) = y_{10}(t-1) + K x_1(t-1)$$

$$y_{11}(t) = y_{11}(t-1) + K z_1(t-1)$$

☒ 3.7: Modeling language

最適化問題に変換し、目的関数および制約条件を構成する各関数の値を計算するモジュール「関数値計算プログラム」と、それらの勾配ベクトルの値を計算するモジュール「勾配ベクトル計算プログラム」を出力する機能を持つ。ポストプロセッサは最適化計算結果をわかりやすく csv ファイルに整理し、最適化計算が異常終了した場合の原因の特定が容易にできるような情報を出力する。プリ・ポストプロセッサの構成を図 3.6 に示す。プリ・ポストプロセッサは java によって作成され、最適化ソルバー（実行モジュール）は FORTRAN のソースから生成される。このシステムによってモデル構造の修正などが必要となった場合、担当者は図 3.7 に示すようなモデルを定義するファイル（MODEL.dat と呼ばれるテキストファイル）を修正し、プリプロセッサを実行すれば、新しい FORTRAN のソースを得ることができる。MODEL.dat では objective は目的関数（3.1-a）、concurrent constraints は同時刻制約（3.1-c, 3.1-d）、time series constraints は時系列制約（3.1-b）に対応している。

また、主双対内点法の安定性を高めるために、ソルバーには式スケーリング機能を組み込んだ。具体的には、目的関数および各制約条件を構成する関数をそれぞれ適当な定数で割り、最適解における Lagrange 乗数の大きさがほぼ 1 にそろうようにしている。さらに、問題（3.1）が実行不可能であるとき、主双対内点法の反復は Lagrange 乗数の値が発散するなどの異常現象を呈する。そこで、このような異常を検知したときは制約条件  $c_{qt}(x_{qt}) = 0$  にスラック変数  $\xi, \zeta$  を導入し、

$$c_{qt}(x_{qt}) + \xi_t - \zeta_t = 0, \quad \xi_t \geq 0, \zeta_t \geq 0 \quad (3.41)$$

と緩和した問題に対して Big-M 法を用いて改めて内点法を適用し、もとの問題の実行可能性を判定できるようにしている。

### 3.5 おわりに

本章では複数装置を想定した時系列最適化問題向けの主双対内点法を提案した。この問題は、装置と時刻の双方について主 block-angular 構造をもつため、探索方向を求めるための連立 1 次方程式が装置と時刻の双方および時刻のみについて独立な複数の連立 1 次方程式と係数行列が時刻に関する総和演算で求められるもう一つの連立 1 次方程式に分解される。したがって時刻について独立な処理を複数のプロセッサに分配して並列的に実行すれば非常に効率的に解ける [98]。また、本提案にもとづき開発した最適化ソルバーは 3.4 節で示したように化学プラントの最適化制御システムに組み込まれて運用されており [22]、大きな経済的効果を上げている。

## 第4章 発電プラントにおけるタービン負荷配分の 大域的最適化

### 4.1 はじめに

多大なエネルギーを消費する化学、石油精製、鉄鋼、紙パルプなどのプロセス産業において省エネルギーを追求していくことはコスト競争力の維持、CO<sub>2</sub>削減の観点から最重要な課題の一つである。なかでも、蒸気・電力を工場に供給し、コンビナートの中核に位置する自家発電プラントにおける省エネルギーの意義は大きく、様々な取り組みがなされてきた [47, 54, 55, 28, 6, 74]。自家発電プラントの省エネルギーへの取り組みは、大きく分けて、設備改造によるものと運転の改善によるものに大きく分けられる。設備改造は老朽設備を効率の良い最新の設備に更新する事例が最も代表的であり、確実な効果が得られる代わりにその投資が非常に大きい [47]。一方運転による改善とは、従来の運転方法を見直してより効率の良い運転を実現することであり、その代表的な例が最適化制御システムの導入によるプラントの運転最適化であり、発電プラントの最適化を行う際に、最も効果的な項目の一つがタービンへの最適負荷配分である。通常、自家発電プラントでは数台のタービンを有しており、効率の良いタービンになるべく負荷をかけることによってタービン群としての発電効率を最大化することができる。しかしながらタービンは一般に非凸で微分不可能な効率特性 [55] を持つことから、その取扱いが難しい。従来はタービン特性を簡易化した線形なモデルで表現して線形計画法を適用する例 [74, 71] や、厳密で非線形なモデルを用いても逐次2次計画法 (SQP法) などの従来の最適化手法を適用する例 [54, 55, 28] がほとんどであり、これらのアプローチでは局所的な最適解が得られるにすぎない。また、自家発電プラントでは時々刻々と蒸気・電力デマンドが変化していくため、運転データをオンラインで収集し、リアルタイムで最適化計算を行い、その計算結果を下位の制御システムに制御目標値として設定するリアルタイム最適化システム [28] が必要とされる。したがって計算時間の短縮も重要な課題の一つである。

本章では、タービン負荷配分最適化のための一般的なタービン発電モデルを示し、それを大域的最適化手法の一つであるリプシッツ最適化法に問題の特徴にもとづいて改良を加えた有効で現実的なアルゴリズムを提案する [23]。

## 4.2 タービンのモデリング

蒸気タービンにおいて蒸気が可逆的断熱（等エントロピ）膨張をすると考えたときの理論仕事から内部損失を差引いた残りを内部仕事といい，内部仕事と理論仕事との比を内部効率という．内部仕事から機械の摩擦などによる外部損失を差引いた仕事は，有効に外部に伝えられる仕事で，自家発電プラントでは，この仕事が発電機に伝えられ電力に変換される．この有効仕事と理論仕事との比を有効効率  $\eta_e \in (0, 1)$  という．これは一般に負荷に応じて高くなるという性質を持ち [91]，

$$\eta_e = \frac{H_{in} - H_{out}}{H_{in} - I_{out}} \quad (4.1)$$

で定義される．ここで， $H_{in}$ ,  $H_{out}$  は各々タービン入口蒸気，出口蒸気のエンタルピー，であり， $I_{out}$  はタービン入口から出口まで等エントロピ膨張をした場合のタービン出口のエンタルピーである．図 4.1 に示される背圧タービンでは，通過蒸気流量（以降，負荷と呼ぶ）を  $x$ [t/h]，発電量を  $y$ [MW] とした場合，発電量は

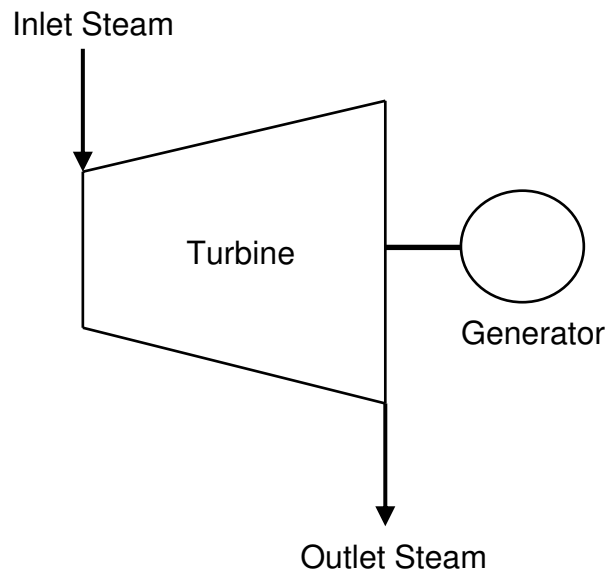


図 4.1: Extraction turbine

$$y = Khx\eta_e\eta_g \quad (4.2)$$

で計算される．ここで， $\eta_g \in (0, 1)$  は発電機効率であり，負荷 ( $x$ ) に関わらず，ほぼ一定の値をとるものと見なせるので本章では以降，定数として扱う． $K$  は単位換算係数である． $h$  はタービン入口か



ら出口までの等エントロピー膨張した場合の理想熱落差 [kJ/kg] , すなわち  $h = H_{in} - I_{out}$  である . 以降では  $\eta = \eta_e \eta_g$  とおき ,  $\eta$  をタービン効率と呼ぶことにする . 実際のタービンでは入口に設置された複数の絞り弁の開閉状態によって生じる差圧の影響を受けて , 負荷 ( $x$ ) と発電量 ( $y$ ) は図 4.2 のように多峰性の特性を示すことが知られている [55] . 図 4.2 において効率特性が変化する点  $b_1, b_2, b_3$  は弁点と呼ばれる . 以下ではこの圧損の影響はタービン効率に含まれる , すなわち  $\eta$  が多峰性の特性

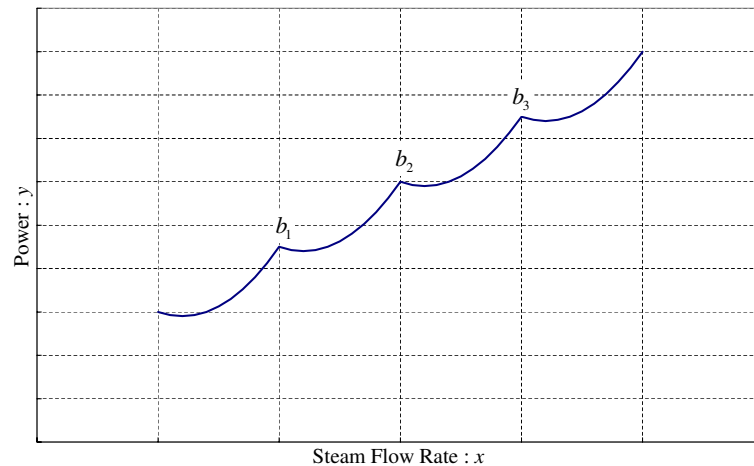


図 4.2: Example of turbine efficiency

を示すものとして取り扱う . タービン効率は計測された蒸気の温度・圧力から (4.1) 式より求められるが , その値は

$$\eta = F(x) \quad (4.3)$$

のように負荷 ( $x$ ) の関数として表現できる . ここで関数  $F$  は一般に  $x$  の多項式として運転データにもとづいた重回帰分析によって求められる . これを以下ではタービン効率モデルと呼び , 最適化計算に用いる .

最適化計算を行う際タービン入口蒸気の温度 ( $t_{in}$ ) , 圧力 ( $p_{in}$ ) , および出口の圧力 ( $p_{out}$ ) は一定と考える . したがって負荷 ( $x$ ) を与えると , 図 4.1 における発電量 ( $y$ ) は以下の手順から求められる . まず , タービン入口のエントロピー ( $s_{in}$ ) を

$$s_{in} = \theta_S(p_{in}, t_{in}) \quad (4.4)$$

で求め , タービン入口から出口までの理想熱落差 ( $h$ ) を

$$h = \theta_H(p_{in}, t_{in}) - \theta_I(s_{in}, p_{out}) \quad (4.5)$$

で求める．ここで， $\theta_S$  は蒸気のエントロピー， $\theta_H$  は蒸気のエントルピーであり，それぞれ温度 ( $t$ ) と圧力 ( $p$ ) の関数として表される [73]．また， $\theta_I$  はタービン入口から出口まで等エントロピー膨張した場合の出口蒸気のエントルピーであり，入口蒸気のエントロピー ( $s_{in}$ ) と出口の圧力 ( $p_{out}$ ) の関数である [73]．最後に以上から得られた  $h$ ,  $\eta$  を用いて発電量 ( $y$ ) は

$$y = Khx\eta \quad (4.6)$$

として計算される．現実のタービンは多段の場合が多く，次段の計算のためにタービン出口の温度 ( $t_{out}$ ) まで求めておく必要がある．そのためには，タービン効率の定義

$$\eta = \eta_g \frac{\theta_H(p_{in}, t_{in}) - \theta_H(p_{out}, t_{out})}{h} \quad (4.7)$$

にモデル (4.3) で求められたタービン効率  $\eta$  を代入して ( $t_{out}$ ) を求めれば良い．実際の自家発電プラントは，工場内での蒸気デマンド，電力デマンドの量，蒸気と電力の比率，負荷変動の大きさなどからタービンの構成，すなわち抽気・背気・復水タービンの組み合わせは様々なパターンがとられている．ただし，タービンの台数は一つのプラントで十数台を超える例は稀であり，蒸気ヘッダーの圧力レベルも3つ (高圧, 中圧, 低圧) が最も一般的であることを考えると，タービン負荷配分を最適化問題として捉えた場合，最適化の変数の次元はたかだか数十のオーダーである．

### 4.3 タービン負荷配分最適化の定式化

この節では一般的なタービン負荷配分最適化問題を定式化する．図 4.3 に示すような  $N$  台の抽気/背気タービンがあり，各タービンの最大段数が  $M$  段の自家発電プラントを考える．

タービン  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) の第  $j$  段 ( $j = 1, \dots, M$ ) の抽気 (背気) 量を  $x_{i,j}$  とする．ここでは簡単のため各タービンの段数はすべて等しいと仮定する．実際にはタービンごとに段数が異なるのがふつうであるが，以下の議論をそのような場合に拡張するのは容易である．

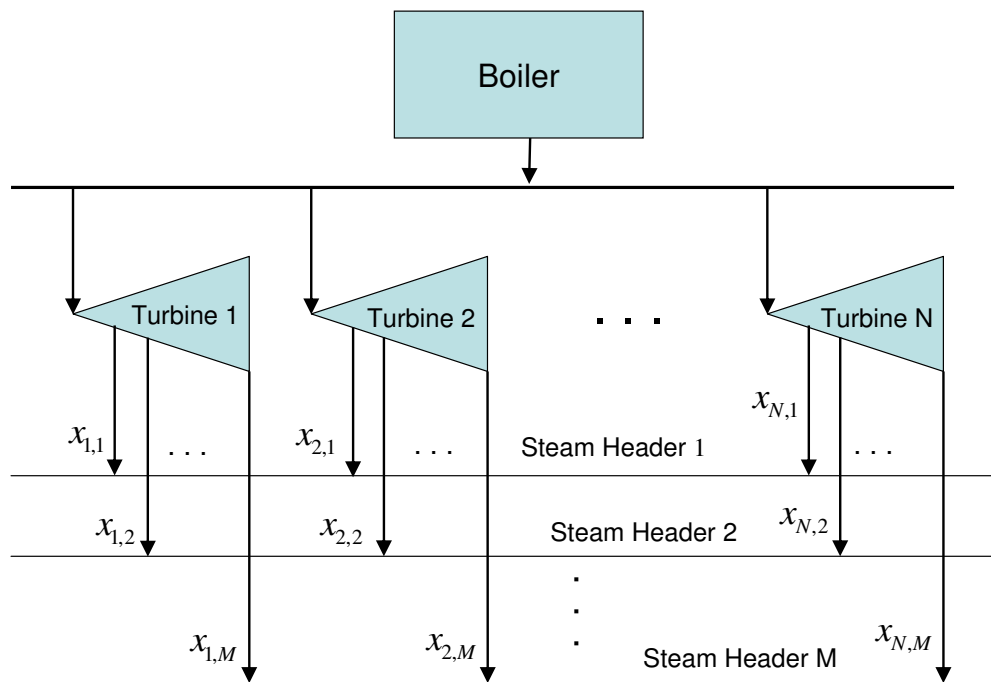
抽気 (背気) 量  $x_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ) が与えられたとき，タービン効率および発電量は以下の (4.8) ~ (4.12) 式を各タービンについて  $j = 1$  から  $M$  まで，順次解いていくことによって得られる．ここで表記を簡単にするため  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{J} = \{1, \dots, M\}$  と表している．

$$\eta_{i,j} = F_{i,j} \left( \sum_{k=j}^M x_{i,k} \right) \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.8)$$

$$s_{i,j-1} = \theta_S(p_{i,j-1}, t_{i,j-1}) \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.9)$$

$$h_{i,j} = \theta_H(p_{i,j-1}, t_{i,j-1}) - \theta_I(s_{i,j-1}, p_{i,j}) \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.10)$$

$$y_{i,j} = Kh_{i,j}\eta_{i,j} \sum_{k=j}^M x_{i,k} \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.11)$$



☒ 4.3: General power plant

具体的にいえば，入口蒸気の条件  $(p_{i,j-1}, t_{i,j-1})$  がわかっているとすれば，モデル (4.8) からタービン効率  $(\eta_{i,j})$  が求められる（第 1 段では入口蒸気の圧力  $(p_{i,0})$  と温度  $(t_{i,0})$  は所与である）一方 (4.9) 式から入口蒸気のエントロピー  $(s_{i,j-1})$  が求められ， $s_{i,j-1}, p_{i,j-1}, t_{i,j-1}, p_{i,j}$  から理想熱落差  $(h_{i,j})$  が (4.10) 式より求められる．最後に以上から計算された  $h_{i,j}, \eta_{i,j}$  を用いて (4.11) 式より発電量  $(y_{i,j})$  が求まる．なお，すべての圧力  $(p_{i,j} \ i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J})$  と発電機効率  $(\eta_g)$  は固定とする．

さらに，次段の計算をするにあたって  $t_{i,j}$  を求めておく必要があるので，前に得られた  $h_{i,j}, \eta_{i,j}$  を

$$\begin{aligned} \eta_{i,j} &= \left( \frac{\eta_g}{h_{i,j}} \right) \theta_H(p_{i,j-1}, t_{i,j-1}) \\ &\quad - \left( \frac{\eta_g}{h_{i,j}} \right) \theta_H(p_{i,j}, t_{i,j}) \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

に代入しておく  $t_{i,j}$  を得ておく．

ここで (4.8) 式に現れる  $F_{i,j}$  は通過蒸気量の区分的多項式関数であることに注意する（図 4.2 参照）．ボイラーから発生する蒸気量と蒸気デマンドはいずれも一定であると仮定する．そのとき発電量最大化を目的とする複数のタービンへの負荷配分最適化問題は以下のように記述される．

$$\max \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{i,j} \quad (4.13-a)$$

$$\text{s.t.} \quad a_{i,j} \leq x_{i,j} \leq b_{i,j} \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.13-b)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{i,j} = D_j \quad (j \in \mathcal{J}) \quad (4.13-c)$$

$$A_{i,j} \leq \sum_{k=j}^M x_{i,k} \leq B_{i,j} \quad (i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}) \quad (4.13-d)$$

ここで，(4.13-b) は各抽気・背気量の上下制限約，(4.13-c) は蒸気ヘッダーごとの蒸気デマンドに関する制約条件，(4.13-d) は各タービン内での各段蒸気通過量の上下制限約である．さらに，各段での発電量  $y_{i,j}$  は (4.8) と (4.11) より  $\mathbf{x} = (x_{i,j})_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}}$  の微分不可能な非線形関数として表されることに注意する．

## 4.4 リブシッツ最適化

プロセス最適化では，一般にプロセス特性が非線形であることから，SQP 法などの非線形計画法が用いられることが多いが，これらの方法で得られる最適解は一般に局所的最適解である．非線形性の著しいタービン負荷配分最適化には複数の局所的最適解が存在することが予想されることから，複数の局所的最適解の中から真の最適解（大域的最適解）を得る手法として大域的最適化が近年注目されている [38, 43, 30, 95]．一般に大域的最適解を得ることは困難であるが，問題の特徴を利用するこ

とによって効率的に大域的最適解もしくはその近似解を得ることは可能である．実時間で最適解を得る必要があることから，本章では分枝限定法の考え方に基づく大域的最適化手法であるリプシッツ最適化 [43, 69, 40, 41] を用いて近似最適解を求め，さらに得られた解を出発点とする SQP 法 [46] に切り替えるハイブリッドアルゴリズムを提案する．説明を簡単にするため，まず次の区間制約（箱型制約）をもつ問題に対するリプシッツ最適化アルゴリズム [43] を述べる．

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & a \leq x \leq b \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで， $x \in \mathbb{R}^n$ ， $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ ， $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ， $a < b$  であり， $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  はリプシッツ関数，すなわち，ある定数  $L > 0$  に対して  $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  を満たすものとする．特に，このアルゴリズムは関数  $f$  の微分可能性を必要としないため本章で扱う問題に適している．

## 【リプシッツ最適化アルゴリズム】

### ステップ 0: 初期化

$$\begin{aligned} R &\leftarrow \{x : a \leq x \leq b\}; \\ x_R &\leftarrow (a + b)/2, \quad Q \leftarrow \{a, b, x_R\}; \\ v &\leftarrow \operatorname{argmax}\{f(x) : x \in Q\}, \quad \gamma \leftarrow f(v); \\ \mu(R) &\leftarrow \min\{\min\{f(a), f(b)\} + L\|b - a\|, \\ &\quad f(x_R) + L\|b - a\|/2\}; \\ \mu &\leftarrow \mu(R); \quad \mathcal{M} \leftarrow \{R\}. \end{aligned}$$

### ステップ 1: 大域的最適解近傍への到達度判定

$|\gamma - \mu| < \epsilon$  ならば終了; そうでなければステップ 2 へ.  
ただし,  $\epsilon$  は適当なパラメータとする

### ステップ 2: 領域の 2 分割

$$\begin{aligned} b_j - a_j &= \max\{b_i - a_i : i = 1, \dots, n\} \text{ となる } j \text{ をえらぶ;} \\ a^1 &\leftarrow a, \quad b^1 \leftarrow (b_1, \dots, (b_j + a_j)/2, b_{j+1}, \dots, b_n)^T; \\ a^2 &\leftarrow (a_1, \dots, (b_j + a_j)/2, a_{j+1}, \dots, a_n)^T, \quad b^2 \leftarrow b; \\ R_1 &\leftarrow \{x : a^1 \leq x \leq b^1\}, \quad R_2 \leftarrow \{x : a^2 \leq x \leq b^2\}; \\ x_{R_1} &\leftarrow (a^1 + b^1)/2, \quad x_{R_2} \leftarrow (a^2 + b^2)/2. \end{aligned}$$

### ステップ3：上界値の更新

$$\begin{aligned}\mu(R_1) &\leftarrow \min\{\mu(R), \min\{f(a^1), f(b^1)\} + L\|b^1 - a^1\|, \\ &\quad f(x_{R_1}) + L\|b^1 - a^1\|/2\}; \\ \mu(R_2) &\leftarrow \min\{\mu(R), \min\{f(a^2), f(b^2)\} + L\|b^2 - a^2\|, \\ &\quad f(x_{R_2}) + L\|b^2 - a^2\|/2\}.\end{aligned}$$

### ステップ4：下界値の更新

$$\begin{aligned}Q &\leftarrow \{v, b^1, x_{R_1}, a^2, x_{R_2}\}; \\ v &\leftarrow \operatorname{argmax}\{f(x) : x \in Q\}, \gamma \leftarrow f(v).\end{aligned}$$

### ステップ5：分枝限定操作

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\leftarrow (\mathcal{M} \setminus \{R\}) \cup \{R_1, R_2\}; \\ \mathcal{R} &\leftarrow \{R \in \mathcal{M} : \mu(R) > \gamma\}; \\ \mu &\leftarrow \max\{\mu(R) : R \in \mathcal{R}\}; \\ \mu(R) = \mu &\text{を満たす } R \in \mathcal{R} \text{ を選び, 集合 } R \text{ の上下限} \\ &\text{を新たに } a, b \text{ とおき, ステップ1 に戻る.}\end{aligned}$$

このアルゴリズムにおいて、 $\mu$  と  $\gamma$  はそれぞれ問題 (4.14) の最大値の上界値と下界値を表す。さらに  $\mathcal{M}$  は分割された直方体の集合、 $\mathcal{R}$  はそれらのなかでまだ終端されていない直方体の集合、すなわち活性部分問題の集合を表す。

一般にリブシッツ定数 ( $L$ ) は未知であるので、リブシッツ最適化では、いかにして  $L$  を推定するかが鍵になる。タービン負荷配分の最適化はリアルタイム性が要求されるため、簡易的に  $L$  を推定し、短時間で計算を終了させる工夫が必要である。本章では、計算の各段階において、その時点で対象となっている直方体  $R$  の中心から各頂点までの傾きの最大値にパラメータ  $k \geq 1$  をかけたものを  $L$  の推定値とした。すなわち、

$$L = k \max_i \left( \frac{|f(c) - f(d_i)|}{\|c - d_i\|} \right) \quad (4.15)$$

ただし、 $c = (a + b)/2$ 、 $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) は直方体  $R$  の頂点の集合であり、 $d_i \in \{a \cup b\}$  である。また、分枝限定法において、部分問題の実行可能領域が小さくなっていった時、 $L$  はそれに応じて小さくなっていくよう、子問題に対する  $L$  の推定値が親問題のそれよりも小さくなった場合のみ、リブシッツ定数の推定値を更新する処理を付け加えて計算効率の向上を図った。

次に，区間制約に加えて，一般的な制約条件が加わった最適化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & a \leq x \leq b \\ & g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.16)$$

を考える．この問題に対しては，下の (4.17) 式のようにペナルティ関数を導入して区間制約の問題に変換することによってリプシッツ最適化法が適用可能となる．

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) - P \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} \\ \text{s.t.} \quad & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.17)$$

ただし， $P > 0$  はペナルティパラメータである．問題 (4.16) の最適解  $x^*$  において制約想定と呼ばれる正則条件が成立するとき，ペナルティパラメータ  $P$  がある程度大きい（具体的には問題 (4.16) の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす Lagrange 乗数より大きい）ならば， $x^*$  は問題 (4.17) の最適解になっていることがいえる [34]．特に，ペナルティパラメータを無限に大きくしなくても，もとの問題の最適解が得られることから，このペナルティ関数は正確な (exact) ペナルティ関数と呼ばれる．ペナルティパラメータを非常に大きく選ぶ必要がないことはリプシッツ最適化法を適用する上で大きな利点である．

最適化問題 (4.13) をリプシッツ最適化法が適用可能な形式 (4.17) に変換することを考える．リプシッツ最適化において計算時間を左右する要因として探索空間の次元の大きさがある．問題 (4.13) において線形等式制約 (4.13-c) に着目すれば探索する空間の次元を小さくすることができる (4.13-c) 式を次式で表す．

$$Cx = d \quad (4.18)$$

ただし， $x$  は  $x_{i,j}$  を成分とする  $MN$  次元のベクトルである (4.18) 式はベクトル  $x$  を  $M$  次元のベクトル  $x_B$  と  $MN - M$  次元のベクトル  $x_N$  に分割したとき，対応する行列  $C$  の分割 ( $C_B, C_N$ ) において  $C_B$  が正則となるように表現することができる．

$$C_B x_B + C_N x_N = d \quad (4.19)$$

上式を用いて問題 (4.13) から変数  $x_B$  を消去することにより問題の次元を小さくできる．一方，制約条件 (4.13-d) および変数  $x_B$  に関する上下限制約 (4.13-b) に対するペナルティ関数を定義する．ここで  $x_B$  に属する  $x_{i,j}$  の添字集合を  $B$  とする．

$$g_1(x) = \max_{(i,j) \in B} \{0, x_{i,j} - b_{i,j}\} \quad (4.20-a)$$

$$g_2(x) = \max_{(i,j) \in B} \{0, a_{i,j} - x_{i,j}\} \quad (4.20-b)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \max_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\{ 0, \sum_{k=j}^M x_{i,k} - B_{i,j} \right\} \quad (4.20-c)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = \max_{i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}} \left\{ 0, A_{i,j} - \sum_{k=j}^M x_{i,k} \right\} \quad (4.20-d)$$

ここで  $\mathbf{a}_N$  を  $\mathbf{x}_N$  に対応する  $a_{i,j}$  からなるベクトル,  $\mathbf{b}_N$  を  $\mathbf{x}_N$  に対応する  $b_{i,j}$  からなるベクトルとし,  $\mathbf{x}_N$  を変数とする関数  $\tilde{y}$  と  $\tilde{g}$  を (4.11) 式と (4.20) 式から (4.19) 式を用いて以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i,j}(\mathbf{x}_N) &= y_{i,j}(\mathbf{C}_B^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N), \mathbf{x}_N) \\ \tilde{g}_k(\mathbf{x}_N) &= g_k(\mathbf{C}_B^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N), \mathbf{x}_N) \end{aligned}$$

以上より (4.13) 式で示した最適化問題は以下のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tilde{y}_{i,j}(\mathbf{x}_N) \\ & - P \sum_{k=1}^4 \max\{0, \tilde{g}_k(\mathbf{x}_N)\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a}_N \leq \mathbf{x}_N \leq \mathbf{b}_N \end{aligned} \quad (4.21)$$

この問題に対してリプシッツ最適化アルゴリズムを適用して大域的最適解の近似解を求める. リプシッツ最適化アルゴリズムではパラメータ  $\epsilon$  の大きさによって反復回数や近似解の精度が決定される. 現実的にはある程度大きな  $\epsilon$  を用いて大域的最適解の粗い近似解を求め, それを初期値として SQP 法を適用することにより, 短い計算時間で良い解が得られる可能性がある. ここではリプシッツ最適化アルゴリズムを用いて大域的最適解の近似解を得た後で, それを初期値として SQP 法を適用するアルゴリズムをアルゴリズム LIPSQP と呼ぶことにする. ただし, タービン効率関数  $F_{i,j}$  が通過蒸気量の区分的多項式関数となることから (4.9) (4.10) 式より問題 (4.21) の目的関数には微分不可能な点が存在するので, そのままでは SQP 法を適用できない.

そこで, 各タービン各段の弁点の個数を  $v_{i,j}$ , ( $i \in \mathcal{I}; j \in \mathcal{J}$ ), 各弁点における負荷の値を  $V_{i,j,l}$ , ただし ( $V_{i,j,1} < V_{i,j,2} < \dots < V_{i,j,v_{i,j}}$ ) とすると, リプシッツ最適化アルゴリズムによって得られた大域的最適解の近似解 ( $x_{i,j}^*$ ) の存在する範囲は以下のように記述される. なお,  $\mathcal{L}_{i,j} = \{1, 2, \dots, v_{i,j}\}$  とする.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j} &\leq x_{i,j}^* \leq \tilde{b}_{i,j} \\ \tilde{a}_{i,j} &\in \{a_{i,j}, V_{i,j,1}, \dots, V_{i,j,l}\} \quad (l \in \mathcal{L}_{i,j}) \\ \tilde{b}_{i,j} &\in \{b_{i,j}, V_{i,j,1}, \dots, V_{i,j,l}\} \quad (l \in \mathcal{L}_{i,j}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

したがって SQP 法は問題 (4.13) において制約条件 (4.13-b) を (4.22) 式に置き換えた問題に適用する.



## 4.5 例題への適用

図 4.4 に示すボイラー 1 缶，タービン 2 台からなる自家発電プラントのタービン負荷配分最適化問題を考える．タービン T1, T2 とともに高圧段と低圧段の 2 段からなる抽気背圧タービンであり，電力

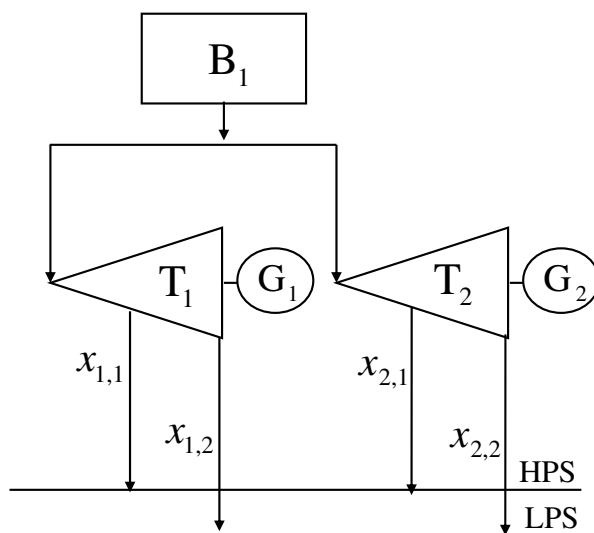


図 4.4: Power plant example

と共に工場に HPS (高圧蒸気) と LPS (低圧蒸気) を供給する．蒸気デマンド一定の条件下で各タービンに負荷を最適配分することによって発電量の最大化が図れる．また，タービン入口蒸気の温度・圧力および抽気，背気の圧力は一定と仮定する．各タービン高圧段，低圧段とも効率特性に弁点が存在するものとする．

$$\text{T1 高圧段弁点} \quad \sum_{i=1}^2 x_{1,i} = 100 \text{ [t/h]}$$

$$\text{T1 低圧段弁点} \quad x_{1,2} = 80 \text{ [t/h]}$$

$$\text{T2 高圧段弁点} \quad \sum_{i=1}^2 x_{2,i} = 110 \text{ [t/h]}$$

$$\text{T2 低圧段弁点} \quad x_{2,2} = 70 \text{ [t/h]}$$

また，抽気背気量の上下限制約は以下の (4.27), (4.28) 式で規定され，タービン効率  $\eta_{i,j}$  はタービン通過蒸気量の 2 次の多項式で表されるものとする．タービン効率  $\eta_{i,j}$  はタービン通過蒸気量の 2 次

以下の多項式 (4.23 ~ 4.26) で表現する．また，その係数を表 4.1 に示す．

$$\eta_{1,1} = \begin{cases} p_{1,1,h}(\sum_{i=1}^2 x_{1,i})^2 + q_{1,1,h}(\sum_{i=1}^2 x_{1,i}) + r_{1,1,h} \\ \quad (100 < \sum_{i=1}^2 x_{1,i}) \\ p_{1,1,l}(\sum_{i=1}^2 x_{1,i})^2 + q_{1,1,l}(\sum_{i=1}^2 x_{1,i}) + r_{1,1,l} \\ \quad (100 \geq \sum_{i=1}^2 x_{1,i}) \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\eta_{1,2} = \begin{cases} p_{1,2,h}x_{1,2}^2 + q_{1,2,h}x_{1,2} + r_{1,2,h} \\ \quad (80 < x_{1,2}) \\ p_{1,2,l}x_{1,2}^2 + q_{1,2,l}x_{1,2} + r_{1,2,l} \\ \quad (80 \geq x_{1,2}) \end{cases} \quad (4.24)$$

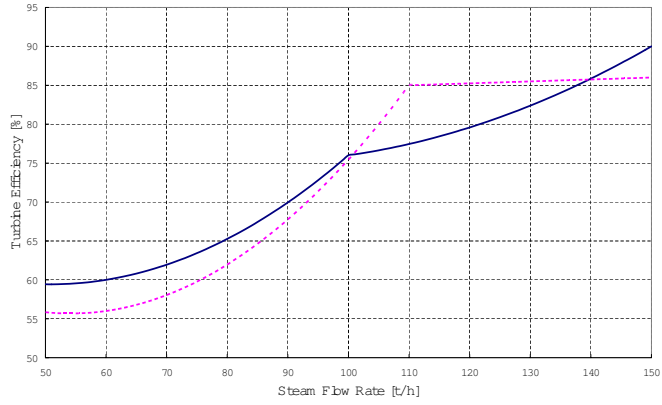
$$\eta_{2,1} = \begin{cases} p_{2,1,h}(\sum_{i=1}^2 x_{2,i})^2 + q_{2,1,h}(\sum_{i=1}^2 x_{2,i}) + r_{2,1,h} \\ \quad (110 < \sum_{i=1}^2 x_{2,i}) \\ p_{2,1,l}(\sum_{i=1}^2 x_{2,i})^2 + q_{2,1,l}(\sum_{i=1}^2 x_{2,i}) + r_{2,1,l} \\ \quad (110 \geq \sum_{i=1}^2 x_{2,i}) \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\eta_{2,2} = \begin{cases} p_{2,2,h}x_{2,2}^2 + q_{2,2,h}x_{2,2} + r_{2,2,h} \\ \quad (70 < x_{2,2}) \\ p_{2,2,l}x_{2,2}^2 + q_{2,2,l}x_{2,2} + r_{2,2,l} \\ \quad (70 \geq x_{2,2}) \end{cases} \quad (4.26)$$

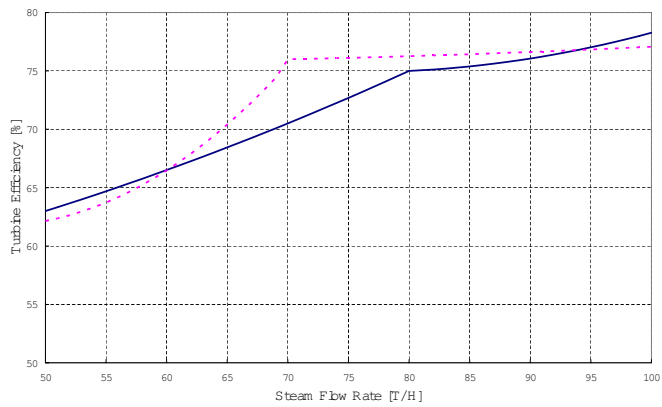
$$10 \leq x_{1,1} < 50, \quad 50 \leq x_{1,2} \leq 100 \quad (4.27)$$

$$10 \leq x_{2,1} < 50, \quad 50 \leq x_{2,2} \leq 100 \quad (4.28)$$

図 4.5 に T1 , T2 の高圧段タービン効率 (4.23 , 4.25) 式を，図 4.6 に T1 , T2 の低圧段タービン効率 (4.24 , 4.26) 式を図示する．本問題は独立変数 ( $x_N$ ) の次元が 2 であるから，目的関数 (発電



☒ 4.5: Turbine efficiency (HPS)  
 Solid Line : T1    Dashed Line : T2



☒ 4.6: Turbine efficiency (LPS)  
 Solid Line : T1    Dashed Line : T2

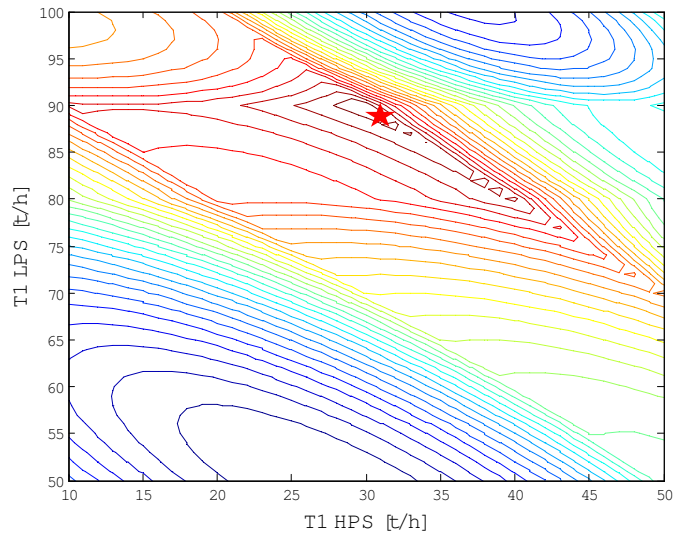


Figure 4.7: Contour of power generation (Case1)

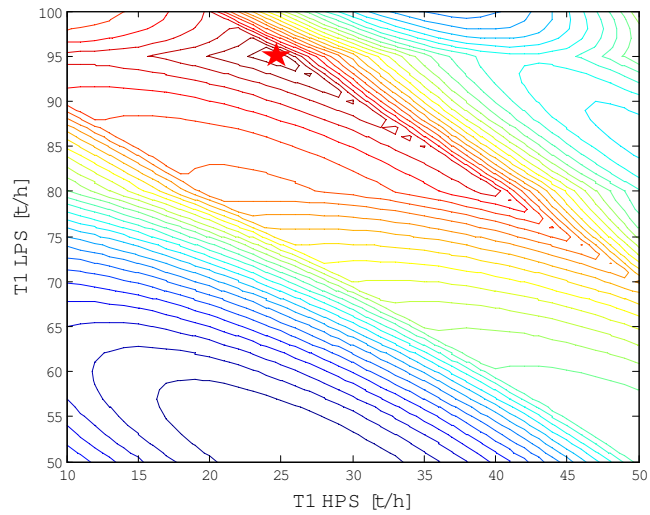


Figure 4.8: Contour of power generation (Case2)

表 4.1: Coefficients of T1 & T2 Efficiency

タービン	段	H/L	p	q	r
T <sub>1</sub>	1	H	3.37e-3	-5.62e-1	9.85e+1
		L	6.86e-3	-6.98e-1	7.72e+1
	2	H	-8.24e-4	1.38e-1	6.71e+1
		L	-1.17e-3	1.71e-1	7.23e+1
T <sub>2</sub>	1	H	0	2.50e-2	8.23e+1
		L	9.39e-3	-1.02	8.32e+1
	2	H	-1.40e-8	-6.11e-3	7.11e+1
		L	-2.30e-3	2.49e-1	7.08e+1

量) は 3 次元空間において図示できる。HPS デマンドを  $(D_1)$ , LPS デマンドを  $(D_2)$  とすれば, デマンドが以下の 2 パターン

Case1  $(D_1, D_2) = (70, 160)$

Case2  $(D_1, D_2) = (65, 165)$

に従うときの合計発電量の等高線はそれぞれ図 4.7 と図 4.8 のように表される。図中の星印は大域的最適点を示す。Case1, Case2 における大域的最適点は各々,  $(x_{1,1}, x_{1,2}) = (30, 90), (25, 95)$  である。デマンドの変化に伴って, 大域的最適点が変化しており, リアルタイムで大域的最適化が必要なことがわかる。

Case1 と Case2 の条件に対して アルゴリズム LIPSQP と SQP 法のみを用いて得られる解の比較を行った。この問題には弁点が存在し, 微分不可能なため, そのままでは SQP 法が適用できない。そこでシグモイド関数を用いて弁点の近傍で効率式を平滑化することにより, 微分可能関数で近似した。アルゴリズム LIPSQP では Case1, Case2 いずれの場合も大域的最適点が得られた。一方, SQP 法のみを適用した場合には, 計算結果は初期値に依存するので初期値を中心値, 各頂点の計 5 点として実行したところ, Case1 での正解率 (大域的最適点が得られた率) は  $1/5$ , Case2 では  $3/5$  であった。 $(x_{1,1}, x_{1,2})$  の初期値と最適化計算結果および目的関数値を表 4.2 に示す。

また, アルゴリズム LIPSQP においてリブシツツ定数は (4.15) 式によって推定しており,  $k$  はパラメータとなる。この例題において  $k$  を 2 から 1 まで変化させて計算速度を評価した (表 4.3)。 $k$  が小さいほど, 速く収束しており (4.15) 式によるリブシツツ定数の推定は妥当な推定になっているといえる。なお, 表 4.3 中で ( ) 内は分枝限定法の反復回数を示している。

表 4.2: Computaion Results of Test Problem (SQP)

Case	初期値	計算結果	目的関数値
1	(20, 60)	(20, 80.8)	31.175
	(50, 60)	(30, 90)	31.397
	(20, 100)	(20, 100)	31.149
	(50, 100)	(50, 100)	30.682
	(35, 80)	(50, 100)	30.682
2	(15, 65)	(25, 95)	31.790
	(50, 65)	(39.2, 80.8)	31.656
	(15, 100)	(25, 95)	31.790
	(50, 100)	(50, 100)	31.204
	(32.5, 82.5)	(25, 95)	31.790

表 4.3: Effect of  $k$  (4.15) to Computaion Speed

$k$	Case1	Case2
2.0	5.00sec (380)	4.27sec (330)
1.5	2.05sec (147)	2.24sec (167)
1.0	0.57sec (23)	0.65sec (33)

本計算実験において SQP 法のソルバーは MATLAB <sup>1</sup>Optimization toolbox を使い , Pentium 1.7GHz , メモリ 512MB の PC にて行った .

#### 4.6 現実問題への適用

次に現実のタービン負荷配分最適化問題に対してアルゴリズム LIPSQP を適用して , その有効性を評価した . 対象となる自家発電プラントは複数のボイラーおよび 3 台の抽気背気タービンからなり , 工場に電力とともに , 高圧・中圧・低圧蒸気を供給している . すなわち  $N = 3$  ,  $M = 3$  である . 簡易化されたプロセスフローを図 4.9 に示す .

ここで B はボイラー , T はタービンを示す . SPS , HPS , MPS , LPS はそれぞれ超高压蒸気 (ボイ

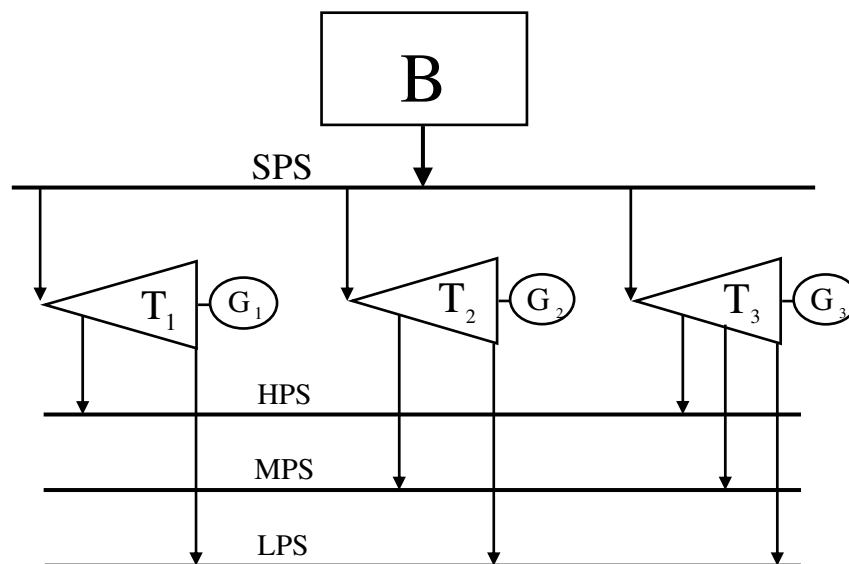


図 4.9: Simplified process diagram of actual power plant

ラー主蒸気) , 高圧蒸気 , 中圧蒸気 , 低圧蒸気を示す . 各タービンの定格仕様は表 4.4 に示すとおりである .

また , 蒸気の水性を求める関数は厳密には高次の非線形関数として表現される [73] が , ここでは動作点近傍で線形近似した以下の関数を用いた .  $\theta_H$  および  $\theta_I$  の単位は [kcal/kg] ,  $\theta_S$  の単位は [kcal/kg

<sup>1</sup>MATLAB は Mathworks 社の登録商標です .

表 4.4: Specification of turbines (actual plant)

Turbine	主蒸気量 [t/h]	発電量 [MW]
T1	115	12.5
T2	154	17.2
T3	336	36.8

K] である .

$$\begin{aligned}
 \theta_H(p, t) &= -3.6978p + 0.58116t + 549.37 && \text{(SPS)} \\
 \theta_H(p, t) &= -7.63p + 0.53968t + 574.53 && \text{(HPS)} \\
 \theta_H(p, t) &= -11.74p + 0.53523t + 579.24 && \text{(MPS)} \\
 \theta_H(p, t) &= -15.568p + 0.51367t + 585.12 && \text{(LPS)} \\
 \theta_S(p, t) &= -0.022982p + 0.00082445t + 1.3705 && \text{(SPS)} \\
 \theta_S(p, t) &= -0.09584p + 0.000988t + 1.4898 && \text{(HPS)} \\
 \theta_S(p, t) &= -0.1657p + 0.0010762t + 1.5291 && \text{(MPS)} \\
 \theta_I(p, s) &= 40.656p + 499.07s - 158.0 && \text{(SPS)} \rightarrow \text{(HPS)} \\
 \theta_I(p, s) &= 63.10p + 457.76s - 111.25 && \text{(SPS)} \rightarrow \text{(MPS)} \\
 \theta_I(p, s) &= 63.90p + 489.96s - 164.34 && \text{(HPS)} \rightarrow \text{(MPS)} \\
 \theta_I(p, s) &= 120.06p + 413.59s - 62.89 && \text{(HPS)} \rightarrow \text{(LPS)} \\
 \theta_I(p, s) &= 120.46p + 416.94s - 68.536 && \text{(MPS)} \rightarrow \text{(LPS)}
 \end{aligned}$$

タービン 1 からは高圧蒸気と低圧蒸気を , タービン 2 からは中圧蒸気と低圧蒸気を , タービン 3 からは高圧蒸気 , 中圧蒸気 , 低圧蒸気を工場に供給する . また , 弁点はタービン 1 の低圧段に 2 つ , タービン 2 の中圧段に 1 つ , タービン 3 の中圧段に 1 つ , タービン 3 の低圧段に 1 つある .

リアルタイムでの最適化を想定した場合 , モデルから求めたタービン効率 (4.3) が運転実績の温度 , 圧力から求めたタービン効率に一致しているとは限らない . そこで前処理としてタービン効率モデルと実績効率の差

$$\alpha = \eta_g \frac{\theta_H(p_{in}, t_{in}) - \theta_H(p_{out}, t_{out})}{h} - F(x) \quad (4.30)$$

を計算し , 最適化計算では  $\alpha$  をバイアスとして

$$\eta = F(x) + \alpha \quad (4.31)$$



によりタービン効率を計算した。計算実験では5ケースの運転実績データに対して汎用数理計画法ソフトウェアとして定評があり、最新のバージョンにおいて大域的最適化の機能を追加した数理システム社の NUOPT<sup>2</sup> と結果および計算時間を比較した。本問題は前節の問題と異なり、あらかじめ大域的最適解を知ることができないので、どれくらい良い解が得られたか、すなわち初期値から目的関数値（発電量）がどれくらい増加したかによって解の良否を評価した。NUOPT においては非線形計画問題に対して内点法 [94] や SQP 法などが適用可能であるが、問題を記述するプログラミング言語 SIMPLE<sup>3</sup> において `options.method = global` と記述することによって大域的最適化が適用される。NUOPT における大域的最適化は計算グラフを用いた逐次凸緩和と分枝限定法を組み合わせた手法 [95] が用いられている。

デマンドを5通りに変化させたときアルゴリズム LIPSQP によって得られた結果を表 4.5 に示す。表 4.5 では上段に目的関数値、下段に計算時間を示しており、目的関数（発電量）の初期値は100である。表 4.5 より、Case4 では同じ解が得られているが、その他の Case ではすべてアルゴリズム LIPSQP が良い解を得ていることがわかる。また、計算時間は Case1 を除いてアルゴリズム LIPSQP のほうが短い。平均で見ると NUOPT では発電量が 1% 向上しているのに対して、アルゴリズム LIPSQP では発電量が 1.4 % 向上している。一方、計算時間は平均で NUOPT の約 1/20 となっている。なお、計算実験は Pentium 1.7GHz、メモリ 512MB の PC で行った。また、アルゴリズム LIPSQP のコーディングには MATLAB を用いた。NUOPT は汎用の大域最適化ソフトウェアであるが、この結果は少なくともタービン負荷配分最適化の問題に対してアルゴリズム LIPSQP は十分有効なアルゴリズムであることを示している。

## 4.7 おわりに

本章では発電プラントにおけるタービン負荷配分問題を数理最適化問題として定式化するとともに、リブシッツ最適化法と SQP 法を組み合わせた大域的最適化アルゴリズムを開発し、その有効性を検証した。特に本アルゴリズムは汎用の大域的最適化手法に比べ計算時間を大幅に短縮できるため、リアルタイム最適化システムに適したものだといえる。ここで考察したモデルは復水タービンを含んでいないが、復水タービンも含む一般的なモデルに対しても、本章で提案した手法は容易に適用可能である。

タービン負荷配分問題におけるリブシッツ定数は未知であるが、本章で提案した推定方法は計算実験の結果、いずれの例題に対しても正しい結果を導いていることから、妥当であることが確認された。また、大域的最適化手法はリブシッツ最適化法以外にも様々な方法が提案されているが、その一つである NUOPT という汎用ソフトウェアとの比較については計算実験の結果を報告したように、得ら

<sup>2</sup>NUOPT は数理システム社の登録商標です。

<sup>3</sup>SIMPLE は数理システム社の登録商標です。

表 4.5: Computation Results for Actual Plant

Case	NUOPT	アルゴリズム LIPSQP
1	101.519	101.982
	22.2sec	37.5sec
2	101.284	101.457
	308.2sec	13.0sec
3	101.038	101.475
	408.2sec	13.2sec
4	101.271	101.271
	807.5sec	13.2sec
5	100.074	100.885
	282.5sec	17.4sec
平均	101.037	101.414
	365.7sec	18.8sec

れる近似解や計算時間に関して提案手法が勝っている．その他の様々な大域的最適化手法の適用可能性については今後の課題としたい．

最後にタービン負荷配分最適化への NUOPT 適用に関してご助言を頂いた数理システム（株）の田辺隆人博士に深く感謝します．

# 第5章 モデル誤差を考慮した最適化システムの 効果予測手法

## 5.1 はじめに

前章までで述べてきたリアルタイムプロセス最適化システムを導入するにはある程度の投資・人役の投入が必要となり、システム化によって得られる効果は、対象となるプラントの規模、特性、運転条件などにより大きく異なり、それが投資に見合うものかどうか吟味する必要がある。一般にシステム化を判断するための事前調査は概念設計と呼ばれ、従来対象となるプロセスの専門家とシステム・制御・最適化の専門家との共同作業によってなされてきた。効果を予測するには、実際に数理計画モデルを構築して、想定されるさまざまな条件のもとでこれを解いてみる必要がある。最適化システムに組み込まれる数理計画問題の制約条件は、一般に厳密な物理化学法則にもとづく数千から数万ものモデル式で構成されるため、その定式化には多大な時間を要する。ところが、概念設計では、短期間で効果を見積ることを要求されるため、モデル式の係数や定数の値は過去の運転実績から重回帰分析などの統計的な手法を用いて推定せざるを得ない。したがって、概念設計段階で構築する最適化問題のモデル式には、ある程度の誤差が含まれる可能性がある。

モデル誤差を伴う最適化問題を数学的に取り扱うアプローチに、確率計画法 [78] やロバスト最適化 [7] がある。確率計画法は、想定される個々のシナリオに対する最適化問題の解における目的関数値の加重平均を最大または最小にする変数の組を求める方法であり、需給環境の変化といった不確定要因を考慮した設備投資計画の立案などに応用されている [68, 90]。一方、ロバスト最適化は、想定されるすべての状況に対する制約条件を満たすような変数の組のなかで目的関数を最大または最小にするものを求める方法であり、適当な仮定のもとで2次錐計画問題として定式化できることが知られている [81]。

本章ではモデル誤差を伴う最適化問題を2レベル数理計画問題 [87] として定式化する方法を提案する。具体的には、対象プロセスを定式化した最適化問題を下位レベル問題とし、そこに含まれる誤差の許容範囲を上位レベル問題の制約条件にもつ2レベル数理計画問題を解いて、モデル誤差に起因する最悪の状況における最適コストを評価する。とくに、重回帰分析における目的変量の区間推定の考え方を用いて、モデル誤差の許容範囲を規定する連立非線形不等式を構成する方法を示す [100]。

2レベル数理計画問題に定式化できる問題として、先手と後手がそれぞれの利得を最大化する Stackelberg ゲーム [89] があり、さまざまなアルゴリズムが提案されている [87]。本章で定式化する2レ

ベル数理計画問題は、上位レベルと下位レベルで同じ目的関数を最大化および最小化する max-min 型の問題であり、モデル誤差を引き起こす主体を先手、最適化システムを後手とするゼロ和ゲームとなっている。上位レベル問題の変数が下位レベル問題にパラメータとして含まれないノン・パラメトリックな max-min 問題に対しては、古くから理論的性質やアルゴリズムが研究されている [18, 79]。一方、本章で取り扱うようなパラメトリックな問題に対しては、双対理論を用いてノン・パラメトリック問題に変換し、緩和法を適用するアプローチ [86] が提案されている。

下位レベル問題が凸計画問題であるとき、2 レベル数理計画問題は相補性制約条件をもつ数理計画問題 (MPCC: Mathematical Program with Complementarity Constraints) に変換できる。MPCC は、任意の実行可能点で Mangasarian-Fromovitz 制約想定が成り立たない [34] ため、非線形計画問題に対する一般的なアルゴリズムを適用すると理論的、数値的にさまざまな困難が発生する。そこで、その最適性条件やアルゴリズムに関して近年盛んに研究が行われている [35, 36, 51, 60, 61, 63, 82, 83]。しかし、上位レベルと下位レベルが共通の目的関数をもつ 2 レベル数理計画問題を MPCC で取り扱った例はあまりない。

本章の構成はつぎの通りである。まず 2 節において、最悪の状況における最適コストを求める問題を 2 レベル数理計画問題として定式化し、MPCC に対する数値解法を用いて解く方法を示す。つぎに 3 節において、モデル誤差の許容範囲を規定する不等式を提案する。4 節では、提案した方法を発電設備の運転最適化システムに適用した結果を述べる。最後に、5 節で本章をまとめる。

## 5.2 最適コストの評価モデル

この節では、システム化の対象となるプロセスの運転最適化問題がモデル誤差を含むとき、最悪の状況における最適コストを求める問題を、上位レベルと下位レベルが共通の目的関数をもつ 2 レベル数理計画問題として定式化する。さらに、この問題を MPCC に対するハイブリッド・アルゴリズム [61] を用いて解く方法を示す。

### 5.2.1 2 レベル数理計画問題への定式化

プロセスの運転最適化問題が、線形計画問題

$$\text{目的関数： } \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \rightarrow \text{最小} \quad (5.1-a)$$

$$\text{制約条件： } \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (5.1-b)$$

$$P_1 \mathbf{x} + Q_1 \mathbf{y} = \mathbf{r}_1 \quad (5.1-c)$$

$$P_2 \mathbf{x} + Q_2 \mathbf{y} \leq \mathbf{r}_2 \quad (5.1-d)$$

に定式化できる場合を考える．ただし， $A, P_1, P_2, Q_1, Q_2$  はそれぞれ  $n_2 \times n_1, m_1 \times n_1, m_2 \times n_1, m_1 \times n_2, m_2 \times n_2$  の行列， $b, c, d, r_1, r_2$  はそれぞれ  $\mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$  のベクトルである．問題 (5.1) には 2 種類の変数  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  と  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$  が含まれている．変数  $x$  は設備の操作量や投入する原材料の質および量を表しており，説明変数とよばれる．一方， $y$  はプロセスの状態や生産される製品の質および量を表しており，目的変数とよばれる．説明変数と目的変数の関係は，物理化学法則や運転条件などから定式化できる場合と，実績データから重回帰分析などの統計的手法で推測せざるを得ない場合がある．問題 (5.1) において，制約条件 (5.1-c) と (5.1-d) は前者に対応するモデル式であり，制約条件 (5.1-b) は後者に対応する回帰式である．したがって，行列  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  とベクトル  $c, d, r_1, r_2$  は確定的であるが，行列  $A$  とベクトル  $b$  にはモデル誤差が含まれている．

なお，モデル誤差を含む制約条件が不等式

$$y \leq Ax + b \quad (5.2)$$

である場合は，補助変数ベクトル  $\nu$  とスラック変数ベクトル  $v$  を導入して，(5.2) 式をつぎのように変換することにより，問題 (5.1) と同じタイプの問題に帰着できる．

$$\nu = Ax + b, \quad y + v - \nu = 0, \quad v \geq 0$$

一方，目的関数の係数ベクトル  $c$  と  $d$  にモデル誤差が含まれる場合も，補助変数  $\nu_0$  を導入して等式制約条件

$$\nu_0 = c^T x + d^T y$$

を追加するとともに，目的関数を  $\nu_0$  に変更することにより，問題 (5.1) と同じタイプの問題に帰着できる．行列  $A$  とベクトル  $b$  をパラメータとするパラメトリック線形計画問題 (5.1) の最適解  $(x, y)$  の集合を  $Z(A, b) \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  と書き，これを制約条件の一部とするつぎの 2 レベル数理計画問題を考える．

$$\text{目的関数：} \quad c^T x + d^T y \rightarrow \text{最大} \quad (5.3\text{-a})$$

$$\text{制約条件：} \quad g_i(a_i, b_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n_2) \quad (5.3\text{-b})$$

$$(x, y) \in Z(A, b) \quad (5.3\text{-c})$$

ただし， $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して， $a_i^T$  は行列  $A$  の第  $i$  行を構成する  $n_1$  次元ベクトル， $b_i$  はベクトル  $b$  の第  $i$  成分である．また， $g_i: \mathbb{R}^{n_1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  は連続的の微分可能な関数であり，(5.3-b) 式は下位レベル問題 (5.1) の等式制約条件 (5.1-b) を構成する行列  $A$  とベクトル  $b$  に含まれるモデル誤差の許容範囲を規定する不等式制約条件である．一般に，集合  $Z(A, b)$  は複数の要素を含む可能性があるが，そのすべての要素に対して目的関数 (5.3-a) は同じ値をとる．したがって，問題 (5.3) の上位レベル問題は  $A, b$  を変数とする問題として常に定義可能である．

2 レベル数理計画問題 (5.3) は、下位レベル問題 (5.1) で最小化を図る目的関数と同じ関数を最大にするパラメトリックな max-min 型の問題になっている。すなわち、問題 (5.3) は、不等式制約条件 (5.3-b) を満たす行列  $A$  とベクトル  $b$  のなかで、これらをパラメータとする下位レベル問題 (5.1) の最適解における目的関数値を最大にするものを求める問題である。とくに、もとの線形計画問題 (5.1) がプロセスの運転コストを最小にする制御目標を求める最適化問題であるとき、2 レベル数理計画問題 (5.3) は、問題 (5.1) の等式制約条件 (5.1-b) に含まれるモデル誤差に起因する最悪の状況が生じた場合でも、最適化問題 (5.1) を解いて制御目標を定めることによって運転コストをどの程度に抑えることができるかを求める問題になる。

## 5.2.2 等価な MPCC とその解法

問題 (5.3) の下位レベル問題 (5.1) を、その最適性の必要十分条件である Karush-Kuhn-Tucker 条件で置き換えると、相補性制約条件をもつ数理計画問題 (MPCC)

$$\begin{aligned}
 & \text{目的関数： } c^T x + d^T y \rightarrow \text{最大} \\
 & \text{制約条件： } g_i(a_i, b_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n_2) \\
 & \quad c + A^T \lambda_0 + P_1^T \lambda_1 + P_2^T \lambda_2 = 0 \\
 & \quad d - \lambda_0 + Q_1^T \lambda_1 + Q_2^T \lambda_2 = 0 \\
 & \quad A x - y + b = 0 \\
 & \quad P_1 x + Q_1 y - r_1 = 0 \\
 & \quad P_2 x + Q_2 y - r_2 \leq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \\
 & \quad \Lambda_2 (P_2 x + Q_2 y - r_2) = 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

を得る。ただし、 $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  はそれぞれ下位レベル問題 (5.1) の制約条件 (5.1-b), (5.1-c), (5.1-d) に対する Lagrange 乗数ベクトル、 $\Lambda_2$  は  $\lambda_2$  の各成分を対角要素とする  $m_2 \times m_2$  対角行列である。問題 (5.4) においては、運転最適化問題 (5.1) の変数ベクトル  $x, y$  のほかに、Lagrange 乗数ベクトル  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  や、行列  $A$  とベクトル  $b$  も変数として取り扱われる。

表記を簡単にするために、問題 (5.4) の変数ベクトルを  $z = (x^T, y^T, \lambda_0^T, \lambda_1^T, \lambda_2^T, a_1^T, \dots, a_{n_2}^T, b^T)^T$

と書き,

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\
 \mathbf{g}(z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1(a_1, b_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{n_2}(a_{n_2}, b_{n_2}) \end{pmatrix} \\
 \mathbf{h}(z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{c} + A^T \boldsymbol{\lambda}_0 + P_1^T \boldsymbol{\lambda}_1 + P_2^T \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \mathbf{d} - \boldsymbol{\lambda}_0 + Q_1^T \boldsymbol{\lambda}_1 + Q_2^T \boldsymbol{\lambda}_2 \\ A \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{b} \\ P_1 \mathbf{x} + Q_1 \mathbf{y} - \mathbf{r}_1 \end{pmatrix} \\
 G(z) &= -P_2 \mathbf{x} - Q_2 \mathbf{y} + \mathbf{r}_2 \\
 H(z) &= \boldsymbol{\lambda}_2
 \end{aligned}$$

とおくと, 問題 (5.4) はつぎのように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
 \text{目的関数: } & f(z) \rightarrow \text{最小} \\
 \text{制約条件: } & \mathbf{g}(z) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(z) = \mathbf{0} \\
 & G(z) \geq \mathbf{0}, \quad H(z) \geq \mathbf{0} \\
 & G_i(z)H_i(z) = 0 \quad (i = 1, \dots, m_2)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

ただし,  $G_i(z), H_i(z)$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ) はそれぞれ  $G(z), H(z)$  の第  $i$  成分である. 問題 (5.5) の実行可能領域を  $\mathcal{F}$  と書き,  $z \in \mathcal{F}$  における  $\mathcal{F}$  の法線錐を  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(z)$  とする. そのとき, 点  $z^*$  が問題 (5.5) の局所的最適解ならば

$$-\nabla f(z^*) \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(z^*) \tag{5.6}$$

が成り立つ [34]. 条件 (5.6) を満たす点  $z^* \in \mathcal{F}$  を, 問題 (5.5) の B-停留点という [82]. また, 問題 (5.5) の局所的最適解  $z^*$  で適当な制約想定が成り立つとき, 次式を満たす Lagrange 乗数ベクトル  $\boldsymbol{\lambda}_g^*, \boldsymbol{\lambda}_h^*, \boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\zeta}^*$  が存在する [34].

$$\begin{aligned}
 & \nabla f(z^*) + \nabla \mathbf{g}(z^*) \boldsymbol{\lambda}_g^* + \nabla \mathbf{h}(z^*) \boldsymbol{\lambda}_h^* \\
 & \quad - \nabla G(z^*) \boldsymbol{\xi}^* - \nabla H(z^*) \boldsymbol{\zeta}^* = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{g}(z^*) \leq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_g^* \geq \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\lambda}_g^*)^T \mathbf{g}(z^*) = 0 \\
 & \mathbf{h}(z^*) = \mathbf{0}, \quad G(z^*) \geq \mathbf{0}, \quad H(z^*) \geq \mathbf{0} \\
 & G_i(z^*)H_i(z^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, m_2) \\
 & \boldsymbol{\xi}_i^* G_i(z^*) = 0, \quad \boldsymbol{\zeta}_i^* H_i(z^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, m_2) \\
 & G_i(z^*) = H_i(z^*) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_i^* \geq 0, \quad \boldsymbol{\zeta}_i^* \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

条件 (5.7) を満たす点  $z^*$  を問題 (5.5) の強停留点という [82].

MPCC に対しては, 取り扱いの難しい相補性制約条件を通常为非線形制約条件に変換して解くアルゴリズムが提案されている. 本章では, 0 に収束する正数列を用いて相補性制約条件を緩和する正

則化法 [83] に有効制約法の考え方を組み込んだハイブリッド・アルゴリズム [61] を用いて，問題 (5.5) を解く．問題 (5.5) に対するハイブリッド・アルゴリズムをアルゴリズム MPCC と呼ぶことにし，それはつぎのように記述される．

【 アルゴリズム MPCC 】

ステップ 0  $\mu^{(1)} > 0, \rho^{(1)} > 0$  を選び， $k := 1$  とおく．

ステップ 1 正則化法の部分問題

$$\begin{aligned}
 & \text{目的関数： } f(z) \rightarrow \text{最小} \\
 & \text{制約条件： } \mathbf{g}(z) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(z) = \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{G}(z) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}(z) \geq \mathbf{0} \\
 & \quad G_i(z)H_i(z) \leq \mu^{(k)} \quad (i = 1, \dots, m_2)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

を解き，停留点を  $z^{(k)}$  とおく．集合  $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \gamma^{(k)}$  を

$$\begin{aligned}
 \alpha^{(k)} &= \{i \mid G_i(z^{(k)}) > \rho^{(k)}, H_i(z^{(k)}) \leq \rho^{(k)}\} \\
 \beta^{(k)} &= \{i \mid G_i(z^{(k)}) \leq \rho^{(k)}, H_i(z^{(k)}) \leq \rho^{(k)}\} \\
 \gamma^{(k)} &= \{i \mid G_i(z^{(k)}) \leq \rho^{(k)}, H_i(z^{(k)}) > \rho^{(k)}\}
 \end{aligned}$$

と定める．もし

$$\alpha^{(k)} \cup \beta^{(k)} \cup \gamma^{(k)} = \{1, \dots, m_2\} \tag{5.9}$$

ならばステップ 2 へ，さもなければステップ 4 へ進む．

ステップ 2 補助問題

$$\begin{aligned}
 & \text{目的関数： } f(z) \rightarrow \text{最小} \\
 & \text{制約条件： } \mathbf{g}(z) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(z) = \mathbf{0} \\
 & \quad G_i(z) \geq 0, \quad H_i(z) = 0 \quad (i \in \alpha^{(k)}) \\
 & \quad G_i(z) = 0, \quad H_i(z) = 0 \quad (i \in \beta^{(k)}) \\
 & \quad G_i(z) = 0, \quad H_i(z) \geq 0 \quad (i \in \gamma^{(k)})
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

が実行可能ならば，その Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす点を  $\hat{z}^{(k)}$  とおき， $i = 1, \dots, m_2$  のそれぞれに対して，制約条件  $G_i(z) = 0$  または  $G_i(z) \geq 0$  に対する Lagrange 乗数を  $\xi_i^{(k)}$ ，制約条件  $H_i(z) = 0$  または  $H_i(z) \geq 0$  に対する Lagrange 乗数を  $\zeta_i^{(k)}$  としてステップ 3 へ進む．補助問題 (5.10) が実行不可能ならば，ステップ 4 へ進む．

ステップ 3 以下の条件が成り立てば終了する．

$$\begin{aligned}
 & \xi_i^{(k)} \geq 0, \quad \zeta_i^{(k)} \geq 0 \\
 & \quad (i \in \{i \mid G_i(\hat{z}^{(k)}) = H_i(\hat{z}^{(k)}) = 0\})
 \end{aligned} \tag{5.11}$$



さもなければ，ステップ 4 へ進む．

ステップ 4  $\mu^{(k+1)} \in (0, \mu^{(k)})$ ,  $\rho^{(k+1)} > 0$  を選び， $k := k + 1$  としてステップ 1 へ戻る．

アルゴリズム MPCC のステップ 1 において，部分問題 (5.8) が実行不可能ならば，もとの問題 (5.5) も実行不可能であるので反復を停止する．また，ステップ 2 において，補助問題 (5.10) が実行可能であるものの有限な解をもたないならば，もとの問題 (5.5) も有限な解をもたないので反復を停止する．一方，ステップ 4 では， $\rho^{(k)} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) となるようにパラメータ  $\rho^{(k)}$  を更新する．

正則化法は， $\mu^{(k)} \rightarrow 0$  なる正のパラメータ列  $\{\mu^{(k)}\}$  に対して，部分問題 (5.8) の停留点の列  $\{z^{(k)}\}$  を生成する反復法である．点列  $\{z^{(k)}\}$  の集積点を  $\bar{z}$  とすると，適当な仮定のもとで  $\bar{z}$  は問題 (5.5) の B-停留点となる [83]．点  $\bar{z}$  における添字集合  $\{1, \dots, m_2\}$  の分割を

$$\alpha(\bar{z}) = \{ i \mid G_i(\bar{z}) > 0, H_i(\bar{z}) = 0 \}$$

$$\beta(\bar{z}) = \{ i \mid G_i(\bar{z}) = 0, H_i(\bar{z}) = 0 \}$$

$$\gamma(\bar{z}) = \{ i \mid G_i(\bar{z}) = 0, H_i(\bar{z}) > 0 \}$$

とする．そのとき， $\rho^{(k)}$  を適切に更新すれば，十分大きな有限の  $k$  に対して (5.9) が成り立ち，

$$\alpha^{(k)} = \alpha(\bar{z}), \quad \beta^{(k)} = \beta(\bar{z}), \quad \gamma^{(k)} = \gamma(\bar{z})$$

となる [61]．さらに，補助問題 (5.10) の停留点  $\hat{z}^{(k)}$  で条件 (5.11) が成り立てば， $\hat{z}^{(k)}$  は問題 (5.5) の強停留点となる．よって，アルゴリズム MPCC を用いると，非線形計画問題を有限回解くだけで MPCC の強停留点を求められる．

## 5.3 モデル誤差の定式化

この節では，問題 (5.1) の等式制約条件 (5.1-b) に含まれるモデル誤差の許容範囲を規定する不等式 (5.3-b) を具体的に提案する．以下では，まず，基礎となる重回帰分析における目的変量の区間推定について述べる．つぎに，(5.1-b) 式の目的変量の予測値が信頼区間を逸脱しないために係数行列  $A$  と定数ベクトル  $b$  が満たすべき不等式を導く．

### 5.3.1 重回帰分析による区間推定

まず，(5.1-b) 式の係数行列  $A$  の各要素  $a_{ij}$  の推定値  $\tilde{a}_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1$ ) と，定数ベクトル  $b$  の各成分  $b_i$  の推定値  $\tilde{b}_i$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) を重回帰分析により求める．添字  $\ell = 1, \dots, p$  のそれぞれに対して，説明変量  $x = (x_1, \dots, x_{n_1})^T$  の第  $\ell$  番目の観測値  $x_\ell = (x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell n_1})^T$  と，それに対応する目的変量  $y = (y_1, \dots, y_{n_2})^T$  の実現値  $y_\ell = (y_{\ell 1}, \dots, y_{\ell n_2})^T$  が与えられており，それら

が式

$$y_{\ell i} = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_{\ell j} + b_i + \varepsilon_{\ell i} \quad (\ell = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n_2)$$

を満たすと仮定する．ただし， $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して  $\varepsilon_{\ell i}$  ( $\ell = 1, \dots, p$ ) は誤差を表す互いに独立な確率変数で，それらの平均は 0，分散は  $\sigma_i^2$  とする．また，添字  $j = 1, \dots, n_1$  のそれぞれに対して  $x_{1j}, \dots, x_{pj}$  の平均値を  $\bar{x}_j$ ，添字  $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して  $y_{1i}, \dots, y_{pi}$  の平均値を  $\bar{y}_i$  と書く．さらに，偏差積和を

$$s_{jj'} = \sum_{\ell=1}^p (x_{\ell j} - \bar{x}_j)(x_{\ell j'} - \bar{x}_{j'}) \quad (j = 1, \dots, n_1; j' = 1, \dots, n_1)$$

$$w_{ij} = \sum_{\ell=1}^p (x_{\ell j} - \bar{x}_j)(y_{\ell i} - \bar{y}_i) \quad (i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1)$$

で定義し，

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{11} & \cdots & \bar{s}_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{s}_{n_1 1} & \cdots & \bar{s}_{n_1 n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n_1 1} & \cdots & s_{n_1 n_1} \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく．そのとき， $\tilde{a}_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1$ ) と  $\tilde{b}_i$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) は，次式で計算できる．

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{j'=1}^{n_1} \bar{s}_{jj'} w_{ij'} \quad (i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1)$$

$$\tilde{b}_i = \bar{y}_i - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{ij} \bar{x}_j \quad (i = 1, \dots, n_2)$$

つぎに，目的変量の区間推定を行う．添字  $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して，誤差項の分散  $\sigma_i^2$  の推定値  $v_i$  は

$$v_i = \frac{1}{p - n_1 - 1} \sum_{\ell=1}^p \left( y_{\ell i} - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{ij} x_{\ell j} - \tilde{b}_i \right)^2 \quad (i = 1, \dots, n_2)$$

で与えられる．説明変量が新たな値  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_1})^T$  をとったとき，重回帰分析に基づく目的変量の理論値を  $\tilde{y}_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) とすると，その値は

$$\tilde{y}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{ij} x_j + \tilde{b}_i \quad (i = 1, \dots, n_2)$$

となるが，その予測値  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) の  $100(1 - \tau) \%$  信頼区間を  $(\check{y}_i(\mathbf{x}), \hat{y}_i(\mathbf{x}))$  とすると， $\check{y}_i(\mathbf{x})$  と  $\hat{y}_i(\mathbf{x})$  は

$$\check{y}_i(\mathbf{x}) = \tilde{y}_i(\mathbf{x}) - t_{\tau/2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{p} + \varphi(\mathbf{x})\right) v_i}$$

$$\hat{y}_i(\mathbf{x}) = \tilde{y}_i(\mathbf{x}) + t_{\tau/2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{p} + \varphi(\mathbf{x})\right) v_i} \quad (5.12)$$

$(i = 1, \dots, n_2)$

で与えられる [48] . ただし ,  $\varphi$  は式

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{j'=1}^{n_1} (x_j - \bar{x}_j)(x_{j'} - \bar{x}_{j'}) \bar{s}_{jj'}$$

で定義される関数である . また , 自由度  $p - n_1 - 1$  の  $t$  分布の確率密度関数を  $\psi$  とするとき ,  $t_{\tau/2}$  は式

$$\int_t^\infty \psi(\omega) d\omega = \frac{\tau}{2}$$

を満たす  $t$  である .

### 5.3.2 モデル誤差の許容範囲を規定する不等式

目的変量の区間推定に基づいて , 係数行列  $A$  と定数ベクトル  $b$  に含まれるモデル誤差の許容範囲を規定する不等式  $g_i(\mathbf{a}_i, b_i) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) を定式化する . 対象プロセスの特性から , 変数ベクトル  $\mathbf{x}$  は上下限制約条件

$$\mathbf{l}_x \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_x$$

を満たすと仮定する . ただし ,  $\mathbf{l}_x = (l_{x_1}, \dots, l_{x_{n_1}})^\top$  ,  $\mathbf{u}_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_{n_1}})^\top$  は定数ベクトルである . また ,  $S$  を式

$$S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \check{y}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y} \leq \hat{y}(\mathbf{x}), \mathbf{l}_x \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_x\}$$

で定義される集合とする . ただし ,  $\check{y}(\mathbf{x})$  ,  $\hat{y}(\mathbf{x})$  の各成分は , (5.12) 式で計算される目的変量の予測値に関する  $100(1 - \tau) \%$  信頼区間下限と上限である . そのとき , 式

$$g_i(\mathbf{a}_i, b_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n_2)$$

を満たす任意の  $A, b$  に対して , 式

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x} + b, \mathbf{l}_x \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_x\} \subseteq S \quad (5.13)$$

が成り立つように関数  $g_i$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) を定める .

変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がともに 1 次元の場合について , 線分  $y = ax + b$  ( $l_x \leq x \leq u_x$ ) と集合  $S$  の位置関係を図 5.1 に示す . 一般に , (5.12) 式で定義される  $\check{y}(\mathbf{x})$  ,  $\hat{y}(\mathbf{x})$  は非線形関数であり , 図 5.1 に示すように集合  $S$  は中央が少しへこんだ形をしている . しかし ,  $\check{y}(\mathbf{x})$  ,  $\hat{y}(\mathbf{x})$  を近似的に線形関数とみな

せば，不等式  $g_i(a_i, b_i) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) をつぎのように定めることができる．図 5.1 より，線分  $y = ax + b$  ( $l_x \leq x \leq u_x$ ) の傾き  $a$  が  $\tilde{a}$  以上のとき，

$$\check{y}(l_x) \leq a l_x + b \quad \text{かつ} \quad a u_x + b \leq \hat{y}(u_x) \quad (5.14)$$

ならば (5.13) が成り立つ．同様に，線分  $y = ax + b$  ( $l_x \leq x \leq u_x$ ) の傾き  $a$  が  $\tilde{a}$  より小さいとき，

$$\hat{y}(l_x) \geq a l_x + b \quad \text{かつ} \quad a u_x + b \geq \check{y}(u_x) \quad (5.15)$$

ならば (5.13) 式が成り立つ．なお，集合  $S$  は観測データの重心点  $\bar{x}$  付近で最も「薄く」なっているため， $a, b$  が条件 (5.14) あるいは (5.15) を満たしていても，線分  $y = ax + b$  ( $l_x \leq x \leq u_x$ ) が集合  $S$  を逸脱することもある．そこで， $a, b$  に対してもう一組の不等式

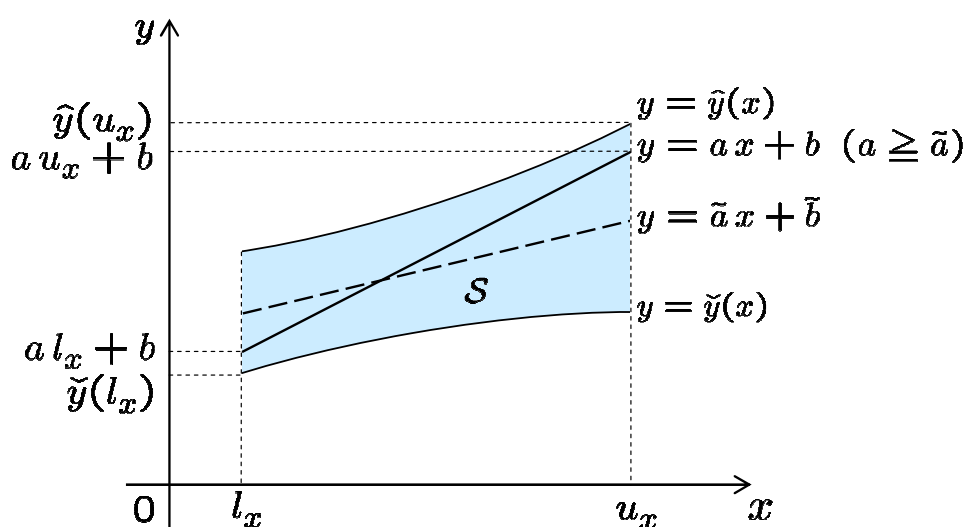


図 5.1: Location of line segment  $y = ax + b$  ( $l_x \leq x \leq u_x$ )

変数  $x, y$  の次元が 2 以上の場合は， $i = 1, \dots, n_2$  と  $j = 1, \dots, n_1$  のそれぞれに対して，関数  $\check{\theta}_{ij} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  と  $\hat{\theta}_{ij} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  を

$$\begin{aligned} \check{\theta}_{ij}(a_{ij}) &= \begin{cases} l_{x_j} & (a_{ij} \geq \tilde{a}_{ij}) \\ u_{x_j} & (a_{ij} < \tilde{a}_{ij}) \end{cases} \\ \hat{\theta}_{ij}(a_{ij}) &= \begin{cases} u_{x_j} & (a_{ij} \geq \tilde{a}_{ij}) \\ l_{x_j} & (a_{ij} < \tilde{a}_{ij}) \end{cases} \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n_2; \quad j = 1, \dots, n_1) \quad (5.16)$$

で定義すれば，係数行列  $A$  と定数ベクトル  $b$  に含まれるモデル誤差の許容範囲を，つぎの四つの不等式から成る連立不等式で規定できる．

$$\begin{aligned}
 \check{y}_i(\check{\theta}_{i1}(a_{i1}), \dots, \check{\theta}_{in_1}(a_{in_1})) &\leq \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} \check{\theta}_{ij}(a_{ij}) + b_i \\
 \hat{y}_i(\hat{\theta}_{i1}(a_{i1}), \dots, \hat{\theta}_{in_1}(a_{in_1})) &\geq \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} \hat{\theta}_{ij}(a_{ij}) + b_i \\
 \check{y}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n_1}) &\leq \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} \bar{x}_j + b_i \leq \hat{y}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n_1})
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

( $i = 1, \dots, n_2$ )

ただし， $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n_1})^T$  は説明変量の観測値の重心点であり，次式で与えられる．

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^p \mathbf{x}_\ell$$

(5.16) 式で定義した関数  $\check{\theta}_{ij}, \hat{\theta}_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1$ ) は微分不可能であるため，数値的に取り扱いにくい．そこで，実際の計算では，シグモイド関数で近似した関数

$$\begin{aligned}
 \check{\theta}_{ij}(a_{ij}) &= \frac{u_{x_j} - l_{x_j}}{1 + \exp(\eta(a_{ij} - \tilde{a}_{ij}))} + l_{x_j} \\
 \hat{\theta}_{ij}(a_{ij}) &= \frac{u_{x_j} - l_{x_j}}{1 + \exp(-\eta(a_{ij} - \tilde{a}_{ij}))} + l_{x_j}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

( $i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1$ )

を用いる．ただし， $\eta > 0$  は定数である．

## 5.4 発電設備の運転最適化システムへの適用

この節では，発電設備の運転最適化システムに本章で提案した手法を適用した結果を示す．以下では，まず，対象とする発電設備の運転最適化問題と，モデル誤差に起因する最悪の状況における最適コストを評価する MPCC の特徴を説明する．つぎに，現実の問題を安定的に解くための変数スケリングについて述べる．最後に，計算実験の結果を報告する．

### 5.4.1 定式化

化学プラントでは，熱源や動力源として高圧の蒸気を利用することが多い．図 5.2 は，ある化学プラントに併設された発電設備のプロセス・ダイアグラムである．ただし，P は超高压蒸気を副生する化学プラント， $B_1, B_2$  はボイラー， $T_1 \sim T_5$  はタービン， $C_1, C_2, C_4$  は復水器， $F_1$  は圧縮機， $F_2, F_3$  は冷凍機， $G_4, G_5$  は発電機を表す．また，HPS, MPS, LPS はそれぞれ他の設備に高圧，中圧，

低圧の蒸気を送る配管である．この発電設備には 2 缶のボイラーがあるが，冷熱，電力および蒸気の需要量変化にともなう蒸気発生量の調整は， $B_2$  だけで行うものとする．電力需要は，発電機  $G_4$ ,  $G_5$  による自家発電のほかに，電力会社から購入した電力でまかなわれる．そこで，化学プラントの生産量と，電力および蒸気の需要量に関する制約条件のもとで，ボイラー  $B_2$  の燃料費用と電力購入費用の合計を最小にすることを目的とする最適化問題を解き，その最適解を各タービンの抽気量および復水量の設定値として与える発電設備のリアルタイム最適化システムを構築することを考える．運転最適化問題の変数として，化学プラントおよびボイラーの蒸気発生量，化学プラントで生産される複数の製品の生産量，ボイラーおよびタービンの運転条件，冷凍機および発電機の出力，電力購入量などを選んだ．これらの変数のうち，蒸気発生量，冷凍機および発電機の出力などは，物理的に寄与のある設備に係る運転変数の線形関数として表現されると仮定し，その係数および定数を重回帰分析で定めることにした．この問題の変数の定義を以下のとおりとする．

$x_1$ : $T_1$ 抽気流量	$x_{16}$ : $F_3$ 吸込圧力
$x_2$ : $T_1$ 復水流量	$x_{17}$ : $F_1$ 軸馬力
$x_3$ : $T_2$ 抽気流量	$x_{18}$ : $F_2$ 軸馬力
$x_4$ : $T_2$ 復水流量	$x_{19}$ : $T_3$ 軸馬力
$x_5$ : $T_4$ 第一抽気流量	$x_{20}$ : $B_2$ 重油流量
$x_6$ : $T_4$ 第二抽気流量	$x_{21}$ : 受電量
$x_7$ : $T_4$ 復水流量	$x_{22}$ : $B_1$ 主蒸気流量
$x_8$ : $T_5$ 第一抽気流量	$y_1$ : $F_1$ 軸馬力
$x_9$ : $T_5$ 第二抽気流量	$y_2$ : $F_2$ 軸馬力
$x_{10}$ : 化学プラント製品 A 生産量	$y_3$ : $G_4$ 発電量
$x_{11}$ : 化学プラント製品 B 生産量	$y_4$ : $G_5$ 発電量
$x_{12}$ : $F_1$ 吸込圧力	$y_5$ : $T_3$ 軸馬力
$x_{13}$ : $F_1$ 吐出圧力	$y_6$ : 化学プラント → 発電プラント送蒸量
$x_{14}$ : $F_2$ 吸込圧力	$y_7$ : $B_2$ 主蒸気流量
$x_{15}$ : $F_2$ 吐出圧力	

この問題のマスバランスなどの等式制約条件は下式群にて記述される。

$$\begin{aligned}
 x_3 + x_8 &= x_3^0 + x_8^0 & x_1 + x_5 &= x_1^0 + x_5^0 \\
 y_3 + y_4 + x_{21} &= y_3^0 + y_4^0 + x_{21}^0 & y_6 + x_{22} + y_7 &= x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \\
 x_6 &= x_6^0 & x_9 &= x_9^0 \\
 x_{10} &= x_{10}^0 & x_{11} &= x_{11}^0 \\
 x_{12} &= x_{12}^0 & x_{13} &= x_{13}^0 \\
 x_{14} &= x_{14}^0 & x_{15} &= x_{15}^0 \\
 x_{16} &= x_{16}^0 & x_{22} &= x_{22}^0 \\
 y_1 &= x_{17} & y_2 &= x_{18} \\
 y_5 &= x_{19} \\
 y_1 &= f_1(x_1, x_2) & y_2 &= f_2(x_3, x_4) \\
 y_3 &= f_3(x_5, x_6, x_7) & y_4 &= f_4(x_8, x_9) \\
 y_1 &= f_5(x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}) & y_2 &= f_6(x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}) \\
 y_5 &= f_7(x_{10}, x_{17}, x_{16}) & y_7 &= f_8(x_{20}) \\
 y_6 &= f_9(x_{10}, x_{11}, x_{17}, x_{18}, x_{19})
 \end{aligned}$$

ここで，上付き添字 0 は初期値を表す． $f$  は引数を独立変数とする重回帰式を表し，運転データから回帰されるものとする．

目的関数はコスト最小化であるので以下の式となる．

$$\text{目的関数： } c_{20}x_{20} + c_{21}x_{21} \rightarrow \text{最小}$$

ここで， $c_{20}$  は重油単価， $c_{21}$  は買電単価である．さらに，変数の上下限制約条件を考慮すると，この運転最適化問題は線形計画問題（5.22）のように定式化できる．

$$\text{目的関数： } \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \rightarrow \text{最小} \quad (5.22\text{-a})$$

$$\text{制約条件： } y_{j_i} = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, \dots, m_0) \quad (5.22\text{-b})$$

$$P_1 \mathbf{x} + Q_1 \mathbf{y} = \mathbf{r}_1 \quad (5.22\text{-c})$$

$$P_2 \mathbf{x} + Q_2 \mathbf{y} \leq \mathbf{r}_2 \quad (5.22\text{-d})$$

に定式化した．ただし， $i = 1, \dots, m_0$  のそれぞれに対して

$$\mathcal{J}_i \subseteq \{1, \dots, n_1\}, \quad j_i \in \{1, \dots, n_2\}$$

であり,  $x_j (j \in \mathcal{J}_i)$  はベクトル  $x$  の第  $j$  成分,  $y_{j_i}$  はベクトル  $y$  の第  $j_i$  成分である. 問題 (5.1) では, 変数ベクトル  $y$  の各成分を目的変量とする回帰式が存在し, それぞれの回帰式には変数ベクトル  $x$  の全成分が説明変量として現れることを想定していた. これに対して, 問題 (5.22) では, 同じ変数を目的変量とする回帰式が複数存在したり, どの回帰式の説明変量や目的変量にも現れない変数が存在したりすることを許している. 発電設備の運転最適化問題において, 変数  $x$  の次元  $n_1$  は 22, 変数  $y$  の次元  $n_2$  は 7, 回帰式の数  $m_0$  は 9, 確定的な等式制約条件の数  $m_1$  は 17 であり, その非零要素のパターンは図 5.3 に示す通りである. 問題 (5.22) の不等式制約条件は, 回帰式に含まれる説明変量  $x_1, \dots, x_{20}$  に対する上下限制約条件で構成される. ところが, 図 5.3 より, 変数  $x_6, x_9, \dots, x_{16}$  の値は等式制約条件により実質的に固定され,  $x_{17}, x_{18}, x_{19}$  の値も等式制約条件と線形回帰式を用いて実質的に固定されることがわかる. そこで, 変数  $x_1, \dots, x_5, x_7, x_8, x_{20}$  に対してのみ上下限制約条件を課すことにする.

問題 (5.22) の等式制約条件 (5.22-b) は, その  $(i, j)$  要素が

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & (j \in \mathcal{J}_i) \\ 0 & (j \in \{1, \dots, n_1\} \setminus \mathcal{J}_i) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m_0)$$

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = j_i) \\ 0 & (j \in \{1, \dots, n_2\} \setminus \{j_i\}) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m_0)$$

である  $m_0 \times n_1$  行列  $A$  と  $m_0 \times n_2$  行列  $E$  および  $b = (b_1, \dots, b_{m_0})^T$  を用いてつぎのように書き換えられる.

$$Ax - Ey + b = 0$$

そのとき, モデル誤差に起因する最悪の状況における最適コストを求める MPCC はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & c^T x + d^T y \rightarrow \text{最大} \\ \text{制約条件: } & g_i(a_{\mathcal{J}_i}, b_i) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m_0) \\ & c + A^T \lambda_0 + P_1^T \lambda_1 + P_2^T \lambda_2 = 0 \\ & d - E^T \lambda_0 + Q_1^T \lambda_1 + Q_2^T \lambda_2 = 0 \\ & A x - E y + b = 0 \\ & P_1 x + Q_1 y - r_1 = 0 \\ & P_2 x + Q_2 y - r_2 \leq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \\ & \Lambda_2 (P_2 x + Q_2 y - r_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

ただし,  $i = 1, \dots, m_0$  のそれぞれに対して  $a_{\mathcal{J}_i}$  は  $a_{ij} (j \in \mathcal{J}_i)$  を成分とするベクトルである. また,  $|\mathcal{J}_i|$  を添字集合  $\mathcal{J}_i$  の要素数とすると,  $g_i$  は  $\mathbb{R}^{|\mathcal{J}_i|+1}$  から  $\mathbb{R}^{\kappa_i}$  への連続的微分可能な関数である. 発電設備の運転最適化問題に対して定義される問題 5.23 は, 変数の数が 106, 不等式制約条件の数が 36, 等式制約条件の数が 55, 相補性制約条件の組数が 16 の MPCC となる.



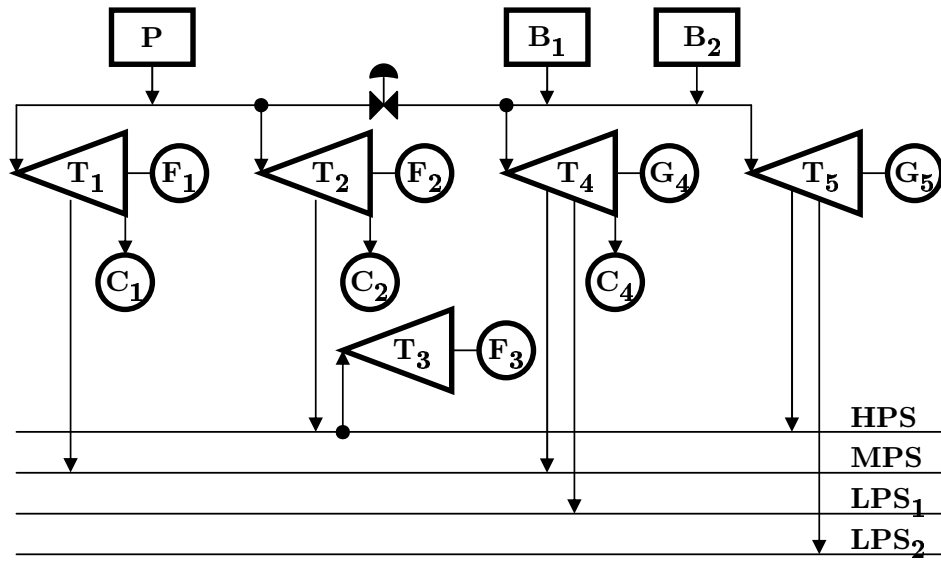


Fig 5.2: Simplified process diagram of a chemical plant and a power plant connected with steam headers

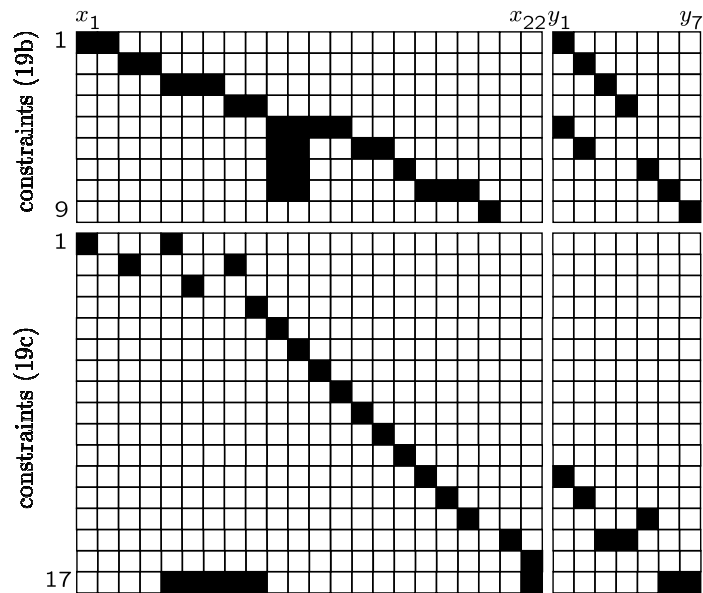


Fig 5.3: Sparsity pattern of the equality constraints of problem (5.19) for optimal operation of the electric power plant

## 5.4.2 変数スケーリング

運転実績データに現れる説明変数  $x$  の観測値とそれに対応する目的変数  $y$  の実現値を詳細に調べてみると、成分によってその大きさが最大で 100 万倍程度異なることがわかった。そこで、問題 (5.23) をアルゴリズム MPCC で解くまえに、変数のスケーリングを行うことにした。添字  $j = 1, \dots, n_1$  のそれぞれに対して、説明変数  $x_j$  の観測値  $x_{\ell j}$  ( $\ell = 1, \dots, p$ ) の最小値を  $l_{x_j}$ 、最大値を  $u_{x_j}$  とする。また、添字  $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して、目的変数  $y_i$  の実現値  $y_{\ell i}$  の最小値を  $l_{y_i}$ 、最大値を  $u_{y_i}$  とする。そのとき、運転実績データを式

$$\begin{aligned} X_{\ell j} &= \frac{x_{\ell j} - l_{x_j}}{u_{x_j} - l_{x_j}} & (\ell = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n_1) \\ Y_{\ell i} &= \frac{y_{\ell i} - l_{y_i}}{u_{y_i} - l_{y_i}} & (\ell = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n_2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

によりスケーリングすると、つぎの不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 \leq X_{\ell j} \leq 1 & \quad (\ell = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n_1) \\ 0 \leq Y_{\ell i} \leq 1 & \quad (\ell = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n_2) \end{aligned}$$

(5.24) 式に示すスケーリングのもとで、5.3 節で述べた重回帰分析と区間推定の結果はつぎのように書き換えられる。まず、添字  $j = 1, \dots, n_1$  のそれぞれに対して  $X_{1j}, \dots, X_{pj}$  の平均値を  $\bar{X}_j$ 、添字  $i = 1, \dots, n_2$  のそれぞれに対して  $Y_{1i}, \dots, Y_{pi}$  の平均値を  $\bar{Y}_i$  と書くと、

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= \frac{\bar{x}_j - l_{x_j}}{u_{x_j} - l_{x_j}} & (j = 1, \dots, n_1) \\ \bar{Y}_i &= \frac{\bar{y}_i - l_{y_i}}{u_{y_i} - l_{y_i}} & (i = 1, \dots, n_2) \end{aligned}$$

である。また、偏差積和を

$$\begin{aligned} S_{jj'} &= \sum_{\ell=1}^p (X_{\ell j} - \bar{X}_j)(X_{\ell j'} - \bar{X}_{j'}) \\ & \quad (j = 1, \dots, n_1; j' = 1, \dots, n_1) \\ W_{ij} &= \sum_{\ell=1}^p (X_{\ell j} - \bar{X}_j)(Y_{\ell i} - \bar{Y}_i) \\ & \quad (i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1) \end{aligned}$$

で定義し、

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \cdots & \bar{S}_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{S}_{n_1 1} & \cdots & \bar{S}_{n_1 n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n_1 1} & \cdots & S_{n_1 n_1} \end{pmatrix}^{-1}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\bar{S}_{jj'} &= \bar{s}_{jj'} (u_{x_j} - l_{x_j})(u_{x_{j'}} - l_{x_{j'}}) \\ &\quad (j = 1, \dots, n_1; j' = 1, \dots, n_1) \\ W_{ij} &= \frac{w_{ij}}{(u_{x_j} - l_{x_j})(u_{y_i} - l_{y_i})} \\ &\quad (i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，偏回帰係数は

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{ij} &= \sum_{j'=1}^{n_1} \bar{S}_{jj'} W_{ij'} \\ &= \frac{\tilde{a}_{ij}(u_{x_j} - l_{x_j})}{u_{y_i} - l_{y_i}} \quad (i = 1, \dots, n_2; j = 1, \dots, n_1) \\ \tilde{B}_i &= \bar{Y}_i - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{A}_{ij} \bar{X}_j \\ &= \frac{1}{u_{y_i} - l_{y_i}} \left\{ \tilde{b}_i - \left( l_{y_i} - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{a}_{ij} l_{x_j} \right) \right\} \\ &\quad (i = 1, \dots, n_2)\end{aligned}$$

で与えられ，誤差項の分散の推定値は

$$\begin{aligned}V_i &= \frac{1}{p - n_1 - 1} \sum_{\ell=1}^p \left( Y_{\ell i} - \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{A}_{ij} X_{\ell j} - \tilde{B}_i \right)^2 \\ &= \frac{v_i}{(u_{y_i} - l_{y_i})^2} \quad (i = 1, \dots, n_2)\end{aligned}$$

となる．さらに，変換後の説明変量の新たな値  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})^T$  に対して，関数  $\Phi(\mathbf{X})$  を

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{j'=1}^{n_1} (X_j - \bar{X}_j)(X_{j'} - \bar{X}_{j'}) \bar{S}_{jj'}$$

で定義すると  $\Phi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{x})$  となる．よって，目的変量の予測値  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})^T$  の各成分に対する  $100(1 - \tau) \%$  信頼区間を  $(\check{Y}_i(\mathbf{X}), \hat{Y}_i(\mathbf{X}))$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) とすると， $\check{Y}_i(\mathbf{X})$  と  $\hat{Y}_i(\mathbf{X})$  はそれぞれ次式で計算できる．

$$\begin{aligned}\check{Y}_i(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{A}_{ij} X_j + \tilde{B}_i - t_{\tau/2} \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{p} + \Phi(\mathbf{X}) \right) V_i} \\ &= \frac{\check{y}_i(\mathbf{x}) - l_{y_i}}{u_{y_i} - l_{y_i}} \quad (i = 1, \dots, n_2) \\ \hat{Y}_i(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{A}_{ij} X_j + \tilde{B}_i + t_{\tau/2} \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{p} + \Phi(\mathbf{X}) \right) V_i}\end{aligned}$$

$$= \frac{\hat{y}_i(\mathbf{x}) - l_{y_i}}{u_{y_i} - l_{y_i}} \quad (i = 1, \dots, n_2)$$

これは、目的変量の予測値に関する信頼区間が、スケール不変性をもつことを表している。

そこで、実際の数値計算には、(5.24) 式によりスケールリングした運転実績データを用いる。表記を簡単にするために、 $l_{x_j}, u_{x_j}$  ( $j = 1, \dots, n_1$ ) を対角要素とする  $n_1 \times n_1$  対角行列をそれぞれ  $L_x, U_x$  と書き、 $l_{y_i}, u_{y_i}$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ) を対角要素とする  $n_2 \times n_2$  対角行列をそれぞれ  $L_y, U_y$  と書くと、(5.24) 式はつぎのような変数変換を意味する。

$$\mathbf{x} = (U_x - L_x)\mathbf{X} + \mathbf{l}_x, \quad \mathbf{y} = (U_y - L_y)\mathbf{Y} + \mathbf{l}_y$$

よって、スケールリング後の運転実績データに対する重回帰分析により得られた偏回帰係数  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}$  をあらためて  $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$  と書き、変数  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  をあらためて  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  と書けば、最悪の状況における発電設備の最適コストを評価するための MPCC は、(5.23) 式において

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &:= (U_x - L_x)\mathbf{c}, & \mathbf{d} &:= (U_x - L_x)\mathbf{d} \\ P_1 &:= P_1(U_x - L_x), & P_2 &:= P_2(U_x - L_x) \\ Q_1 &:= Q_1(U_y - L_y), & Q_2 &:= Q_2(U_y - L_y) \\ \mathbf{r}_1 &:= \mathbf{r}_1 - P_1\mathbf{l}_x - Q_1\mathbf{l}_y, & \mathbf{r}_2 &:= \mathbf{r}_2 - P_2\mathbf{l}_x - Q_2\mathbf{l}_y \end{aligned}$$

とおきなおした問題となる。

### 5.4.3 計算実験

実験は、2003 年 10 月 1 日 0 時から 2003 年 11 月 30 日 23 時までの 1 時間ごとに採取した化学プラントおよび各タービンの運転実績データ 1464 件をもとに行った。まず、これらのデータを (5.24) 式によりスケールリングしたあと、重回帰分析を行ってモデル誤差の許容範囲を規定する連立不等式 (5.17) を定めた。

アルゴリズム MPCC で用いるパラメータ  $\mu^{(k)}$  と  $\rho^{(k)}$  は、いずれも  $k \rightarrow \infty$  の極限で 0 に収束するように更新する必要がある。ただし、相補性制約条件の緩和に用いるパラメータ  $\mu^{(k)}$  については、その初期値をあまり小さくとると、最初の反復で部分問題 (5.8) を解くことが困難になることが予想される。[83] は、 $f$  が 2 次関数、 $g, h, G, H$  が 1 次関数であるようなランダムに生成した MPCC (5.5) に対して、初期値を  $\mu^{(1)} = 1$  と定め、式  $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}/10$  により  $\mu^{(k)}$  を更新した場合の計算実験結果を示している。また、[61] は、 $h$  や  $G$  が 2 次関数である場合を含んだいくつかのテスト問題に対して、初期値を  $\mu^{(1)} = 10^{-2}$  と定め、式  $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}/100$  により  $\mu^{(k)}$  を更新した場合のハイブリッド・アルゴリズムの計算実験結果を示している。本章では、予備的な計算実験 [85] を行った結果、[61] と同様に、ステップ 0 において初期値を  $\mu^{(1)} = 10^{-2}$  と定め、ステップ 4 において式  $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}/100$  により  $\mu^{(k)}$  を更新することにした。

表 5.1: Numerical results for operation optimizing system of the electric power plant

$k$	$\mu^{(k)}$	Problem (9)	Problem (6)	Problem (7)	$\alpha^{(k)}$	$\beta^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$
0	–	77, 77.84	– –	– –	–	–	–
1	0.01	– –	118, 92.94	32, 92.35	{1,2,4, 6,7,9,10,11,13,14,15,16}	{3,5,12}	{8}
2	0.0001	– –	20, 92.91	39, 92.91	{1,2,4,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16}	{3, 12}	{8}

一方，添字集合  $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \gamma^{(k)}$  の識別に用いる  $\rho^{(k)}$  の値は，あまり速く 0 に近づきすぎると条件 (5.9) が成立するまでに非常に多くの反復を要してしまう．本章では，[61] と同様にすべての反復で

$$\rho^{(k)} = \sqrt{\mu^{(k)}}$$

とした．そのとき，ステップ 1 の部分問題 (5.8) が実行可能ならば必ず条件 (5.9) が成り立ち，ステップ 2 へ進むことになる．なお，モデル誤差の許容範囲を定めるパラメータ  $\tau$  の値は 0.05，すなわち 95 % 信頼区間を考えることとし，(5.18) に含まれる  $\eta$  の値は 20 に選んだ．

ステップ 1 とステップ 2 では，修正 BFGS 公式に基づく逐次 2 次計画法 [45] を用いて正則化法の部分問題 (5.8) と補助問題 (5.10) を解いた．ここで用いた逐次 2 次計画法のアルゴリズムは，2 次計画部分問題が実行不可能である場合にそのペナルティ関数を最小にする探索方向を求める機能や，必要に応じて目的関数と制約条件の双方を 2 次近似した部分問題を解いて大域的収束性と超 1 次収束性の両立を図る [32] 機能を備えている．逐次 2 次計画法の反復は，それぞれの問題に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件の方程式系の残差が  $10^{-6}$  以下になったときに停止している．逐次 2 次計画法の初期点は，つぎのように選んだ．ステップ 2 で補助問題 (5.10) を解くときは，ステップ 1 で得られた  $z^{(k)}$  を初期点とした．また，2 反復目以降のステップ 1 で正則化法の部分問題 (5.8) を解くときも，前反復のステップ 1 で得られた  $z^{(k-1)}$  を初期点とした．これに対して，1 反復目のステップ 1 では，

$$z^* = (x^*, y^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \tilde{a}_{\mathcal{J}_1}, \dots, \tilde{a}_{\mathcal{J}_{m_0}}, \tilde{b})^T$$

を部分問題 (5.8) に対する逐次 2 次計画法の初期点とした．ただし， $\tilde{a}_{\mathcal{J}_i}$  ( $i = 1, \dots, m_0$ ) と  $\tilde{b}$  は，スケーリング後の運転実績データに対する重回帰分析により得られた偏回帰係数である．また， $x^*, y^*$  と  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$  は，それぞれ  $a_{\mathcal{J}_i} = \tilde{a}_{\mathcal{J}_i}$  ( $i = 1, \dots, m_0$ )， $b = \tilde{b}$  とおいた場合の線形計画問題 (5.22) の最適解と対応する Lagrange 乗数である．そのとき，MPCC の定式化方法とモデル誤差の許容範囲を規定する不等式の構成方法より， $z^*$  は問題 (5.23) および部分問題 (5.8) の実行可能点である．実際の数値計算では，ステップ 0 で運転実績データのスケールリングと重回帰分析を行って  $\tilde{a}_{\mathcal{J}_i}$  ( $i = 1, \dots, m_0$ ) と  $\tilde{b}$  を求めたあと，線形計画問題 (5.22) を単体法で解いて最適解  $x^*, y^*$  と対応する Lagrange 乗数  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$  を求めている．数値計算は，Celeron 1.5GHz，メモリ 256MB の PC 上で行った．アル

ゴリズムのコーディングには FORTRAN 言語を用い、すべての演算は倍精度で行った。数値計算結果を表 5.1 に示す。表 5.1 において、“Problem (8)” と “Problem (10)” の欄には、それぞれの問題を逐次 2 次計画法で解いたときの反復回数と、最適解における目的関数値の符号を変えたもの、すなわち  $-f(z) = c^T x + d^T y$  の値を示している。また、 $k = 0$  の行には、ステップ 0 で線形計画問題 (5.22) を単体法で解いたときの反復回数と、最適解における目的関数値  $c^T x^* + d^T y^*$  を示している。なお、 $c^T x^* + d^T y^*$  の値は、線形計画問題 (5.22) の等式制約条件 (5.22-b) に含まれる係数と定数の値を重回帰分析で求めた推定値とした場合の最適コストを表している。よって、ボイラー B<sub>2</sub> の蒸気発生量と電力会社からの電力購入量を線形計画問題 (5.22) に基づいて決定すると最適コストは 77.84 になるが、モデル誤差に起因する最悪の状況が生じた場合には、最適コストが 92.91 に達すると予測される。

表 5.1 に示すように、アルゴリズム MPCC の 1 反復目においては正則化法の部分問題を解くのに多くの反復回数を要しているが、2 反復目において補助問題の Karush-Kuhn-Tucker 点が条件 (5.11) を満たし、もとの MPCC の強停留点が得られている。なお、実行時間の合計は、96 秒である。

## 5.5 おわりに

本章では、重回帰分析に基づいて制約条件を定式化した最適化問題において、モデル誤差に起因する最悪の状況における最適コストを評価する手法を提案した。具体的には、対象プロセスを定式化した線形計画問題を下位レベル問題とし、モデル式に含まれる誤差の許容範囲を規定する連立非線形不等式を上位レベル問題の制約条件とする 2 レベル数理計画問題を導入して、この問題を MPCC に対する数値解法を用いて解いた。さらに、提案した手法を発電設備の運転最適化システムに適用して、その有効性を確認した。

下位レベル問題が凸計画問題である 2 レベル数理計画問題は、相補性制約条件をもつ数理計画問題 MPCC に再定式化できる。本章で導入した 2 レベル数理計画問題は、上位レベルと下位レベルで同じ目的関数を最大化および最小化する問題であり、MPCC の分野ではこれまであまり考察されていなかった。本章では、変数のスケールリングを適切に行い、部分問題を解く際の初期点の選び方を工夫することにより、正則化法に有効制約法を組み込んだハイブリッド・アルゴリズムを用いてこの問題が実用的な時間で解けることを確認した。より大規模な問題に適用可能な安定で効率的な数値計算方法の開発や、MPCC の大域的最適解を求めるアルゴリズムの構築は今後の課題である [67]。

## 第6章 結論

本論文ではリアルタイムプロセス最適化におけるいくつかの課題について取り組み、以下の成果を上げた。

2章では従来のリアルタイムプロセス最適化では、今まであまり取り上げられることなかったが、現実には多く見られる経時的に特性が徐々に変化するプロセスの最適化について考察し、“時系列最適化問題”として問題を一般化、定式化した。この問題に対して逐次2次計画分解法を適用して効率的に解けることを示した。

3章では2章で提案した時系列最適化問題を複数装置を有するプラント向けに拡張し、解法としては主双対内点法を直接適用して、問題の構造を生かしたアルゴリズムを採用することにより十分実時間に耐えうるレベルで解けることを示した。更にエチレンプラントにおけるアセチレン水添器の最適化制御システムに対して、ここで提案した手法に基づいた最適化制御システムを実装した。本システムは現在、運用中であり顕著な経済的効果を上げてきている。

4章ではプロセス最適化において重要な対象の一つである発電プラントにおけるタービン負荷配分最適化問題に対して、問題の特徴を利用してリブシツ最適化とSQP法によるハイブリッドな大域的最適化手法を提案し、汎用の大域的最適化ソフトウェアより計算時間が速く、良い結果を出すことを示した。ここで提案した手法は今後、現実プロセスへの実装が予定されている。

5章では、リアルタイムプロセス最適化システムの導入可否を判断する段階（概念設計）において、適切な判断ができるように、モデル化誤差を考慮した上で最悪でもどの程度効果が得られるかについて2レベル数理計画問題として定式化し、その問題に適した最適化アルゴリズムを開発した。また、最適化に用いる回帰モデルの誤差を定量的に表現する手法についても提案した。

今後、最適化技術の進展とともにリアルタイムプロセス最適化システムの実用化が広がるにつれ、一旦、導入したシステムの稼働率の維持が問題となってくると考えられる。リアルタイムプロセス最適化問題は一般に大規模な非線形計画問題であり、運転状況の変化によっては数値的悪条件が発生し、最適化計算が収束不能になる場合がある。そのような場合が頻発すれば保守に費やす労力は多大になると共に、システムのサービスファクターも低下する。数値的悪条件の主な原因として退化が考えられる。退化とは最適化問題において制約条件が1次独立でなくなる場合のことであり、その簡単な例

を以下に示す．

$$x_3 = x_1 x_2 \quad (6.1-a)$$

$$L_{x_1} \leq x_1 \quad (6.1-b)$$

$$x_2 \leq U_{x_2} \quad (6.1-c)$$

$$x_3 \leq U_{x_3} \quad (6.1-d)$$

$L, U$  はそれぞれの変数の下限と上限である (6.1) において  $L_{x_1} = 2, U_{x_2} = 2500, U_{x_3} = 5000$  の場合 (6.1) を満たす変数の値は  $\{x_1, x_2, x_3\} = \{2, 2500, 5000\}$  であり, 三つの変数に対して四つの等式が成立することになり (6.1) を含む最適化問題は退化している．この最適化問題に対して, 主双対内点法を適用した場合は計算の過程で探索方向を求める連立 1 次方程式の係数行列が特異となるか, 直線探索のメリット関数として利用しているペナルティ関数に含まれるペナルティの値が過大となって, ステップサイズが極端に小さくなるなどの現象が起こる可能性がある (6.1) に示したような退化の例は大規模なプロセスの最適化問題において十分起こりうる可能性がある．なぜならば, 注意深くモデリングを行って, 退化する可能性のあるモデルを回避することは容易ではないし, リアルタイムプロセス最適化においては上下限などのパラメータは運転員により随時変更されるからである．したがって最適化問題の退化が発生した場合, 即座に退化を引き起こしている制約式 (モデル) の特定とその対策を行うことが必要となり, そのような異常検知システムは大変有用になると思われる．

5 章において相補性制約条件をもつ数理計画問題 (MPCC: Mathematical Program with Complementarity Constraints) を取り扱ったが, リアルタイムプロセス最適化の問題において相変化を伴う系のモデル, 流れが逆転する系のモデルなど, ある条件によってモデルが切り替わるような場合は少なくなく, そのようなモデルは相補性制約条件をもつ非線形最適化問題として表現される [5]．現状ではそのような問題に対しても SQP 法などの通常の最適化手法が適用されており, 結果として数値的悪条件を引き起こしてしまう場合が少なくない．本論文ではモデル化誤差を含む問題を対象として MPCC のアルゴリズムを適用したが, 5 章で提案したような MPCC 向けのアルゴリズムは一般的なリアルタイムプロセス最適化問題に対しても適用されることが望ましく, リアルタイム最適化に十分耐えうる MPCC 向けアルゴリズムの開発が望まれる．

プロセスの最適化は本論文で取り扱ったような定常状態の最適化を取り扱う場合と動的な状態を最適化する場合 (Dynamic Optimization) がある．従来, Dynamic Optimizaiton はシミュレーションなど机上の検討に用いられることが多かったが, 最近ではリアルタイム最適化として実施される例 [39, 42, 52, 92] も見られる．Dynamic Optimization は特に定常状態が存在しないバッチプロセスの最適化において必要になると思われるが, リアルタイムで実行するためには計算速度の高速化やロバ



スト化が今後の重要な課題になると思われる。

本論文では最適化のアルゴリズムという観点から，リアルタイムプロセス最適化の高度化に貢献すべく研究を行ったが，意義のある最適化を実現するためには良いモデルを用いることが重要であることは言うまでもない．最適化に用いられるモデルは厳密に物理現象を記述したモデル（ホワイトボックスモデル）から，運転データから統計的に入出力関係を表現したモデル（ブラックボックスモデル）まで様々であり，目的や対象によって使い分けられるべきであるが，現状はエンジニアの経験や技量によってモデリングの手法やモデルの厳密度が決定される場合が少なくない．最適化アルゴリズムの進歩と共にモデリング技術の発展・体系化も今後の重要な課題である [56].



## 謝辞

筆者は三菱化学株式会社に入社以来、プロセス制御・最適化の業務に取り組む機会に恵まれ、仕事の壁にぶつかる都度、学生時代の不勉強を反省しつつ、京都大学に出向き出身研究室（卒業時は三根研、後に茨木研・福島研）の先生方にアドバイスを頂いてきました。なかでも福島雅夫先生からは長年にわたり、懇切丁寧なご指導を頂き、それがこの学位論文をまとめるきっかけとなりました。福島先生の深い洞察力、現実問題に対して本質を鋭く見抜く力などに支えられて、ようやく本論文をまとめるに至りました。ここに深く感謝いたします。

また、福島先生から研究室の先輩で関西大学工学部助教授の山川栄樹先生を紹介して頂き、山川研究室と共同研究を行う機会を得られました。その成果は3章と5章にまとめられていますが、山川先生の方なくしてはこれらの成果は達成しえなかったものであり、山川先生および山川研究室の学生の皆様、特に青木 絵里子氏、嶋瀬 裕子氏には深く感謝します。

最後に、本論文のテーマは筆者が三菱化学株式会社において、プロセス制御・最適化に従事した経験に基づいており、それは諸先輩・同僚の方々のご指導や議論なくしては到底得られなかったものであります。ここに三菱化学（特に水島事業所）の諸先輩・同僚の方々に感謝御礼申し上げます。



## 参考文献

- [1] J. S. Albuquerque, V. Gopal, G. H. Staus, L. T. Biegler and B. E. Ydson: Interior point SQP strategies for structured process optimization problems; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 21, Suppl. pp. S853–S859 (1997)
- [2] 青木: 時系列最適化のためのプリ・ポストプロセッサ, 関西大学工学部 卒業論文 (2004)
- [3] 青木, 山川, 江本: 時系列プロセスのリアルタイム最適化システム; 第 48 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp. 323–324 (2004)
- [4] G. C. Battiston, L. Dalloro and G. R. Tauszik: Performance and aging of catalysts for the selective hydrogenation of acetylene. A micropilot-plant study; *Applied Catalysis*, Vol. 2, No. 1, pp. 1–17 (1982)
- [5] B. T. Baumrucker and L. T. Biegler: MPEC formulations to model complementarities in RTO problem; *Presented at AIChE Annual Meeting* San Francisco CA (2006)
- [6] A. Bell: Plant optimization of utility complex; *Hydrocarbon Processing*, Vol. 78, No. 12, pp. 61–65 (1999)
- [7] A. Ben-Tan and A. Nemirovski: Robust solutions of uncertain linear programs; *Oper. Res. Lett.*, Vol. 25, No. 1, pp. 1–13 (1999)
- [8] J. C. Bergen, M. A. Roffman, D. B. Raven, M. B. Bischoff and K. Lau: Pyrolysis furnace run-length prediction in both multivariable furnace control and rigorous closed-loop optimization; *Presented at Aspenworld* (Aspen Technology Inc. user group meeting) (2000)
- [9] T. K. Bhatia and L. T. Biegler: Multiperiod design and planning with interior point methods; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 23, No. 7, pp. 919–932 (1999)
- [10] L. T. Biegler: Tailoring optimization algorithm to process applications; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 16, Suppl. pp. S81–S95 (1992)

- [11] L. T. Biegler and I. E. Grossmann: Challenges and research issues for product and process design optimization; *Proceedings of Foundations of Computer Aided Process Design* , pp. 99–117 (2004)
- [12] G. C. Bond and P. B. Wells: The hydrogenation of acetylene 2 the reaction of acetylene with hydrogen catalyzed by alumina-supported palladium; *Journal of Catalysis*, Vol. 5, pp. 65–73 (1996)
- [13] W. M. Brewer and S. F. Lopez: Successful closed-loop olefines plant optimization; *Hydrocarbon processing* , Vol. 77, No. 6, pp. 83–89 (1998)
- [14] M. W. Brown, A. Penlidis and G. R. Sullivan :Control policies for an industrial acetylene hydrogenation reactor; *Canadian Journal of Chemical Engineering* , Vol. 69, pp. 152–164 (1991)
- [15] J. Castro: A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows; *SIAM J. Optim.* , Vol. 10, No. 3, pp. 852–877 (2000)
- [16] C. R. Cutler and R. T. Perry: Real-time optimization with multivariable control is required to maximize profits; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 7, pp. 663–667 (1983)
- [17] C. R. Cutler and B. L. Ramaker: Dynamic matrix control-A computer control algorithm; *Presented at AIChE 86th National Meeting*, TX, April (1980)
- [18] J. M. Danskin: *The Theory of Max-Min and Its Application to Weapons Allocation Problems*, Springer-Verlag (1967)
- [19] T. F. Edgar and D. M. Himmelblau: *Optimization of Chemical Processes* , McGraw-Hill (1998)
- [20] 江本: エチレンプラントのリアルタイム最適化; ペトロテック , Vol. 21 , No. 6, pp. 572–577 (1998)
- [21] 江本, 福島: プロセス産業における時系列最適化のための逐次2次計画分解法; システム制御情報学会論文誌 , Vol. 15 , No. 1, pp. 34–40 (2002)
- [22] 江本, 福島: モデル構築方法及びプラント制御方法; 特許 第3846772号, (2006)
- [23] 江本, 福島: 発電プラントにおけるタービン負荷配分の大域的最適化; システム制御情報学会論文誌 , Vol. 20, No. 2 掲載予定

- [24] G. Emoto, S. Nakagawa, S. Ebara and K. Fujita: Industrial approaches to multi-period process optimization, *Proceedings of International Symposium on Design, Operation and Control of Chemical Plants (PSE Asia 2000)*, pp. 119–124 (2000)
- [25] G. Emoto, Y. Ohta, H. Matsuo, M. Ogawa, D. B. Raven, R. F. Preston and J.S. Ayala: Integrated advanced control and closed-loop real-time optimization of an olefines plant; *Proceedings of ADCHEM '94*, pp. 97–102 (1994)
- [26] 江本, 大山: プラントオペレーション最適化への取り組み; 化学工学, Vol. 69, No. 9, pp. 37–40 (2005)
- [27] G. Emoto and I. B. Tjoa: On the integration of real-time optimization and control for ethylene plant; *Presented at AIChE Annual Meeting*, Chicago, IL (1996)
- [28] G. Emoto, A. Tsuda, T. Takeshita, M. T. Monical, S. Nakagawa and K. Fujita: Integrated large-scale multivariable control and real-time optimization of a power plant; *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 1368–1372 (1998)
- [29] G. Emtoto, E. Yamakawa and M. Fukushima: Multi-period process optimization by parallel primal-dual interior point method; *Presented at The Second Japanese-Sino Optimization Meeting*, Kyoto (2002)
- [30] C. A. Floudas: *Deterministic Global Optimization Theory, Methods and Applications*; Kluwer Academic Publishers (2000)
- [31] G.F. Froment and K.B. Bischoff: Non-steady state behavior of fixed bed catalytic reactors due to catalyst fouling, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 16, pp. 189–201 (1961)
- [32] M. Fukushima: A successive quadratic programming algorithm with global and superlinear convergence properties; *Math. Prog.*, Vol. 35, No. 3, pp. 253–264 (1986)
- [33] 福島: 数理計画法入門, 朝倉書店 (2000)
- [34] 福島: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店 (2001)
- [35] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and J.-S. Pang: A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints; *Comput. Optim. Appl.*, Vol. 10, No. 1, pp. 5–34 (1998)

- [36] M. Fukushima and J.-S. Pang: Convergence of a smoothing continuation method for mathematical programs with complementarity constraints; *Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 477 (M. Thera and R. Tichatschke, Eds.), Springer-Verlag, pp. 99–110 (1999)
- [37] A. Georgiu, A. V. Sapre, P. Taylor, R. E. Galloway and L. K. Casey: Ethylene optimization system reaps operations and maintenance benefits; *Oil & Gas Journal*, Vol. 9, pp. 46–50 (1998)
- [38] I. E. Grossman: *Global Optimization in Engineering Design*, Kluwer Academic Publishers (1996)
- [39] M. Guay and N. Peters: Real-time dynamic optimization of nonlinear systems: A flatness-based approach; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 30, pp. 1264–1277 (2006)
- [40] P. Hansen, B. Jaumard and S. H. Lu: Global optimization of univariate Lipschitz functions: Survey and properties, *Math. Prog.*, Vol. 55, pp. 251–272 (1992)
- [41] P. Hansen, B. Jaumard and S. H. Lu: Global optimization of univariate Lipschitz functions: New algorithm and computational comparison, *Math. Prog.* 55, pp. 273–292 (1992)
- [42] W. Hong, S. Wang, P. Li, G. Wozny and L. T. Biegler: A Quasi-sequential approach to large-scale dynamic optimization problem, *AIChE Journal*, Vol.52, No.1, pp. 255–268 (2006)
- [43] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai: *Introduction to Global Optimization*; Kluwer Academic Publishers (2000)
- [44] J. K. Hurd and F. H. Murphy: Exploiting special structure in primal dual interior point methods; *ORSA J. Comput.*, Vol. 4, No. 1, pp. 38–44 (1992)
- [45] 茨木, 福島: FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店 (1991)
- [46] 茨木, 福島: 最適化の手法, 共立出版 (1993)
- [47] 池田: 製紙工場に見るスチームタービンによる自家発電導入事例; *省エネルギー*, Vol. 49, No. 10, pp. 44–48 (1997)
- [48] 石原, 長谷川, 川口: Lotus 1-2-3 活用多変量解析, 共立出版 (1990)
- [49] 伊藤 (編著): 化学産業における制御, コロナ社 (2002)



- [50] E. R. Jessup, D. Yang and S. A. Zenios: Parallel factorization of structured matrices arising in stochastic programming; *SIAM J. Optim.*, Vol. 4, No. 4, pp. 833–846 (1994)
- [51] H. Jiang and D. Ralph: Smooth SQP methods for mathematical programs with nonlinear complementarity constraints; *SIAM J. Optim.*, Vol. 10, No. 3, pp. 779–808 (2000)
- [52] T. Jockenhovel, L.T. Biegler and A. Wachter: Dynamic optimization of the Tennessee Eastman process using the OptControl Center; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 27, pp. 1513–1531 (2003)
- [53] D. N. Kelly, F. C. Fatora and S. L. Davenport: Implementation of a closed loop real-time optimization system on a large scale ethylene plant; *Presented at The Meeting of the Instrument Society of America*, Anaheim, CA (1991)
- [54] 喜多: 自家発の用途と課題; 省エネルギー, Vol. 49, No. 10, pp. 21–24 (1997)
- [55] 喜多: 自家発電設備の省エネルギー運用を支える最適化技術; 東芝レビュー, Vol. 53, No. 4, pp. 59–62 (1998)
- [56] 木村: モデル学は可能か; オペレーションズリサーチ, Vol. 50, No. 8, pp. 525–528 (2005)
- [57] 小島, 土谷, 水野, 矢部: 内点法, 朝倉書店 (2001)
- [58] 栗原, 伊東: エチレン装置の厳密モデルによるリアルタイム最適化とその効果, 計装, Vol. 48, No. 9, pp. 49–53 (2005)
- [59] T. Lid and S. Strand: Real-time optimization of a cat cracker unit; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 21, Suppl. pp. S887–S892 (1997)
- [60] G.-H. Lin and M. Fukushima: Some exact penalty results for nonlinear programs and mathematical programs with equilibrium constraints; *J. Optim. Theory and Appl.*, Vol. 118, No. 1, pp. 67–80 (2003)
- [61] G.-H. Lin and M. Fukushima: Hybrid approach with active set identification for mathematical programs with complementarity constraints; *J. of Optim. Theory and Appl.*, Vol. 128, No. 1, pp. 1–28 (2006)
- [62] R. P. Lowery, B. McConville, F. H. Yocum and S. R. Hendon: Closed-loop real-time optimization of two bisphenol-A plants; *Presented at the National AIChE Meeting* Houston, TX (1993)

- [63] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang and D. Ralph: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press (1996)
- [64] I. J. Lustig and G. Li: An implementation of a parallel primal-dual interior point method for block-structured linear programs; *Computational Optimization and Applications*, Vol. 1, No. 2, pp. 141–161 (1992)
- [65] T. E. Marlin and A. N. Hrymak: Real-time operations optimization of continuous processes; *AIChE Symposium Series* , Vol. 93 pp. 156–164 (1997)
- [66] W. T. McGown, C. T. Kemball and D. A. Whan: Hydrogenation of acetylene in excess ethylene on an alumina-supported Palladium catalyst at atmospheric pressure in a spinning basket reactor; *Journal of Catalysis* , Vol. 51, pp. 173–184 (1978)
- [67] A. Mitsos, P. Lemonidis and P. I. Barton: Global solution of bilevel programs with nonconvex functions; *Presented at AIChE Annual Meeting* San Francisco CA (2006)
- [68] S. A. Malcom and S. A. Zenios: Robust optimization for power plant system capacity expansion under uncertainty; *J. Opl Res. Sec.*, Vol. 45, No. 9, pp.1040–1049 (1994)
- [69] R. H. Mladineo: An algorithm for finding the global maximum of a multimodal, multivariate function; *Math. Prog.*, Vol. 34, pp. 188–200 (1986)
- [70] J. M. Moses, A. H. Weiss, K. Atusek and L. Gucci: The effect of catalyst treatment on the selective hydrogenation of acetylene over Palladium/Alumina; *Journal of Catalysis* , Vol. 86, pp. 417–426 (1984)
- [71] 村井: 線形計画問題に対するアフィン変換法の一構成法と用役プラント最適化問題への応用; システム制御情報学会論文誌, Vol. 10, No. 2, pp. 62–69 (1997)
- [72] M. Nasi, M. Alikoski and D.C. White: Advanced control of acetylene hydrogenation reactors; *Hydrocarbon Processing*, Vol. 64, No. 6, pp. 57–60 (1985)
- [73] 日本機械学会: 蒸気表 ( 1968 )
- [74] 西澤: 発電プラントへの高度制御適用事例紹介; ボイラー研究, No. 334, No. 12, pp. 15–22 (2005)
- [75] C. C. Pederson and T. W. Hoffman: The road to advanced control: from DDC to real-time optimization and beyond; *Proceedings of ADCHEM97'* , pp. 671–703 (1997)

- [76] J.D.Perkins: Plant-wide optimization: opportunities and challenges; *Proceedings of Foundations of Computer Aided Process Design 1998*, pp. 15–26 (1998)
- [77] R. R. Preston and G. B. Gochenour: Equation based process simulation; *Proceedings of Foundations of Computer Aided Process Design* (1987)
- [78] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets: Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty; *Math. Oper. Res.*, Vol. 16, No. 1, pp. 119–147 (1991)
- [79] D. M. Salmon: Minimax controller design; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-13, No. 4, pp. 369–376 (1968)
- [80] A. Sarkany, A.H. Weiss, T. Szilagyi, P. Sandor, and L. Gucci: Green oil poisoning of a  $Pd/Al_2O_3$  acetylene hydrogenation catalyst; *Applied Catalysis*, Vol. 12, pp. 373–379 (1984)
- [81] T. Sasakawa and T. Tsuchiya: Optimal magnetic shield design with second-order cone programming; *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 24, No. 6, pp. 1930–1950 (2003)
- [82] H. Scheel and S. Scholtes: Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity; *Math. Oper. Res.*, Vol. 25, No. 1, pp. 1–22 (2000)
- [83] S. Scholtes: Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints; *SIAM J. Optim.*, Vol. 11, No. 4, pp. 918–936 (2001)
- [84] A. Seifi and K. W. Hipel: Interior-point method for reservoir operation with stochastic inflows; *J. Water Resour. Plan. Manage.* Vol. 127, No. 1, pp.48–57 (2001)
- [85] 嶋瀬：モデル誤差を考慮した最適化システムの効果予測手法; 関西大学工学部卒業論文 (2004)
- [86] K. Shimizu and E. Aiyoshi: Necessary conditions for min-max problems and algorithms by a relaxation procedure; *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. AC-25, No. 1, pp. 62–66 (1980)
- [87] K. Shimizu, Y. Ishizuka and J. F. Bard: *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*, Kluwer Academic Publishers (1997)
- [88] R. C. Sorensen and C. R. Cutler: LP integrates economics into dynamic matrix control; *Hydrocarbon Processing*, Vol. 77, No. 9, pp. 57–65 (1998)
- [89] 鈴木：ゲーム理論入門，共立出版 (1981)
- [90] 武田，田口，内平，中本，松本：不確実な事業環境下における設備投資計画手法; 第 15 回 RAMP シンポジウム論文集，pp. 121–137 (2003)

- [91] 谷松: 蒸気工学, 裳華房 (1999)
- [92] T. Tosukhowong, J. M. Lee, J. H. Lee and J. Lu: An introduction to dynamic plant-wide optimization strategy for an integrated plant; *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 29, pp. 199–208 (2004)
- [93] D. C. White: Online optimization: What have we learned ? ; *Hydrcarbon processing* Vol. 77, No. 6, pp. 55–59 (1998)
- [94] H. Yamashita: A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization; *Optim. Methods Softw.*, Vol. 10, No. 2, pp. 443–449 (1998)
- [95] 山下, 逸見: 大域的最適化の実用化に向けて; 第 17 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 229–238 (2005).
- [96] 山川: 化学プラントの最適化における並列計算; 技苑, No. 110, pp.29–33 (2002)
- [97] 山川, 福島: 数理計画における並列計算, 朝倉書店 (2002)
- [98] 山川, 江本: 複数装置から成るプラントの多期間生産計画問題に対する並列型主双対内点法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 16, No. 7, pp. 54–63 (2003)
- [99] 山川, 松原, 福島: 2 次コスト多品種流問題に対する並列型主双対内点法; *J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, Vol. 39, No. 4, pp. 566–591 (1996)
- [100] 山川, 嶋瀬, 江本: モデル誤差を考慮した最適化システムの効果予測手法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 18, No. 3, pp. 1–10 (2005)