

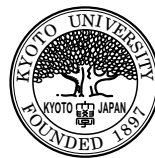
交通混雑問題におけるパレート改善の方法

指導教員 福島雅夫 教授

金山 宗高

京都大学大学院情報学研究科

数理工学専攻 修士課程



平成21年2月

摘要

交通混雑緩和の手段として、多くの都市で混雑料金制の導入が実施あるいは検討されている。しかし、これまでに研究されてきた多くの混雑料金スキームでは、個々の利用者の支払うコスト（一般化費用）を一時的に増大させてしまう。そのため、従来型の混雑料金スキームは利用者から受容されにくく、実現が難しい。そこで近年、混雑緩和するだけでなく、個々の利用者の一般化費用に関してパレート改善を達成するような新しい混雑料金の課金スキームが提案された。

本論文では、このスキームにもとづいて、利用者均衡制約やパレート改善条件を満たしながらスキームの適用前後の利用者の一般化費用の改善幅の総和を最大化するような課金体系を求める問題について考察する。考える問題は均衡制約をもつ数理計画問題（Mathematical Program with Equilibrium Constraints, MPEC）の形に定式化されるが、MPECは通常の非線形最適化の枠組みでは扱いにくいいため、均衡制約を近似的に等価な非線形方程式に変換することにより、問題を通常の微分可能な非線形最適化問題に再定式化して解くことを考える。さらに、具体的なネットワーク例に対して問題を定式化し、それを微分可能な非線形最適化問題に再定式化することによって解が得られることを数値実験を通して確認する。

目次

1	序論	1
2	準備	2
2.1	パレート改善	2
2.2	ネットワーク	2
2.3	合成スキーム	2
3	問題の定式化	3
3.1	均衡状態の定式化	3
3.2	MPEC として問題の定式化	6
4	微分可能な非線形最適化問題への再定式化	8
4.1	非線形相補性問題の等価な方程式への再定式化	8
4.2	問題の再定式化	10
5	数値実験	10
6	結論	12

1 序論

近年、交通混雑に悩む多くの都市で混雑料金制の導入が実施あるいは検討されている^{*1}。その背景には、混雑緩和対策の主要な手段が、従来の新規道路建設や道路拡張など施設拡充型の施策から、都心部への流入規制・混雑料金制・パーク＆ライド制など需要管理型 (Transportation Demand Management, TDM) の施策へと変化してきていることがある。TDM の様々な施策の中でも、混雑料金制の導入が有効な手段と目されている。実際、混雑料金制の導入は、混雑による外部不経済を内部化し、社会経済的に最も効率的な状態を達成しうることが知られている [5][10]。また、近年の情報技術の発展により、料金徴収の際の問題点もほぼ解消されている。

しかし、これまでに研究されてきた多くの混雑料金形態 (スキーム) では、個々の利用者の支払う一般化費用^{*2}を増大させてしまう。そのため、従来型の混雑料金スキームは利用者から受容されにくく、実現するのが難しい。近年、Daganzo[1][2] は、個々の利用者の一般化費用も同時に改善可能な混雑料金スキームが存在することを明らかにした。彼は時間帯別に混雑料金を課金することによって、どの個人の費用も増加させる事なく一部の個人の費用の改善、すなわちパレート改善が可能であることを発見した。ただし、彼の研究では、利用者が出発時刻選択をおこなう場合についてしか扱っていない。すなわち、利用者の経路選択行動は考えられておらず、対象とするネットワークも単純な 1 リンクモデルのみである。

そこで、早崎・赤松 [6] は、混雑料金と割り当て制を合成した新しい混雑料金の課金スキーム (以後、合成スキームとよぶ) を提案した。また、合成スキームの導入によって、混雑が緩和されるだけでなく、個々の利用者の一般化費用に関するパレート改善が起こりうることを明らかにした。

本論文では、早崎・赤松 [6] が提案した合成スキームにもとづいて、利用者均衡制約や利用者の一般化費用に関するパレート改善条件を満たしながら、合成スキームの適用前と適用後のネットワーク利用者の一般化費用の改善幅の総和を最大化するような料金と課金者比率を求める問題を考える。まず第 2 節で、パレート改善の概念を定義し、対象とするネットワーク、早崎・赤松の合成スキームについて説明する。第 3 節では、ネットワークの均衡状態を相補性問題として定式化し、それにもとづいてパレート改善問題を均衡制約をもつ数理計画問題 (Mathematical Program with Equilibrium Constraints, MPEC) の形に定式化する。第 4 節では、均衡制約を近似的に等価な非線形方程式に変換することにより、問題を通常の微分可能な非線形最適化問題に再定式化して解くことを考える。第 5 節では、具体的なネットワークに対して行った数値実験の結果を報告する。第 6 節では、結論を述べる。

^{*1} 山田 [5] に、ロードプライシングを中心とする交通政策に関する各国の状況が記されている。

^{*2} 山田 [5] によると、一般化交通費用 (円) = 金銭的走行費用 (円) + 走行時間 (分) × 平均時間価値 (円/分) である。金銭的費用と時間的費用の和と考えればよい。

2 準備

この節では、本論文における議論を展開するために不可欠な「利用者の一般化費用に関するパレート改善」の概念を定義し、さらに早崎・赤松 [6] が提案した合成スキームについて簡潔に説明する。

2.1 パレート改善

パレート改善やパレート最適という言葉は、経済学において以下のように定義されている [8]。

定義 2.1. ある資源配分から他の資源配分への移行が、少なくとも他の誰の状態を不利にすることなく一部の人の状態をより有利にすることができる場合、その移行をパレート改善 (*Pareto improvement*) という。

定義 2.2. 実現可能な配分の中に、もはやそれへの移行がパレート改善であるような配分を見出すことができない配分状況を、パレート最適 (*Pareto optimum*) という。

言い換えると、他の何人の状態をも悪化させることなく誰かの状態を今以上に良くすること（パレート改善）が不可能な状態がパレート最適である。本論文では、対象とするネットワークに対して合成スキームの適用前と適用後において、個々の利用者の支払う一般化費用に関してパレート改善が達成されるような状況を考える。

2.2 ネットワーク

本論文では、ノード集合 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 、辺集合 $E = \{1, 2, \dots, L\}$ をもつような有向グラフ $G = (V, E)$ を対象とする。道路ネットワークに置き換えて考えると、都市が全部で N 個あり、都市（ノード）間を結ぶ道路（リンク）が L 個あるようなネットワークである。利用者はネットワーク内をそれぞれの出発地（始点ノード, Origin）から目的地（終点ノード, Destination）までリンクを通じて移動する。始点ノードと終点ノードの組を OD ペアとよぶことにする。

2.3 合成スキーム

早崎・赤松 [6] が提案した合成スキームとは、以下に述べるように混雑料金と割り当て制を組み合わせたものである。この合成スキームの下では、ある OD ペアに対して利用者は「指定された課金リンクを通ったときに料金を払わなければならない課金者」、「指定された課金リンクを通ったときに料金を払わなくてもよい非課金者」の 2 つに分類される。非課金者グループの人数比率を $\alpha \in [0, 1]$ （スカラー）、リンク l にかかる混雑料金を e_l とし、 $e = (e_1, \dots, e_L)^T$ とする。管理者は α と e を操作できる。このような料金形態が提案された合成スキームである。この合成スキームによって個々の利用者の一般化費用に関してパレート改善を達成するような料金 e と非課金者グルー

ブの人数比率 α を求めることが目的である．パレート改善を達成する (e, α) は一般に数多く存在するが，特に，個々の利用者が達成するパレート改善幅の総和を最大化するような (e, α) を求めることを試みる．

3 問題の定式化

この節では，合成スキームの適用前と適用後の利用者均衡状態をそれぞれ定式化し，それをもとにパレート改善問題を定式化する．

以下，利用者均衡状態を考える上でつぎの2つの仮定が満たされているとする．

仮定 1 すべての利用者は常に自己の一般化費用を最小化するように経路選択をする．

仮定 2 利用者は常に利用可能な経路について完全な情報を得ている．

このような仮定のもとで実現するネットワークの利用者均衡状態はつぎのように表現される [7] ．

利用者均衡状態

均衡状態においては，もはやどの利用者が経路を変更することによって自己の一般化費用をそれ以上小さくすることはできない．

本論文では，全ての利用者が同じ起点ノードをもつとし，それをノード 1 とする．すなわち，ノード 1 はネットワークの唯一の起点ノードとなる．このとき，各ノード n ($n = 2, \dots, N$) に対して1つの対応する OD ペア $1n$ が決まる．OD ペア $1n$ の交通量を q_n とし， $q = (q_2, \dots, q_N)^T$ と表す．ただし， $q_1 = 0$ とする．また，リンク l ($l = 1, \dots, L$) の移動時間 t_l は，リンク l の交通量 x_l のみに依存する単調増加な関数 $t_l(x_l)$ であるとし， $x = (x_1, \dots, x_L)^T$ ， $t(x) = (t_1(x_1), \dots, t_L(x_L))^T$ とする．さらに，起点ノード 1 からノード n に到着するのに必要な最小一般化費用を τ_n とし， $\tau = (\tau_2, \dots, \tau_N)$ と表す．ただし， $\tau_1 = 0$ とする．

3.1 均衡状態の定式化

第 $(n-1, l)$ 成分 $a_{(n-1)l}$ が

$$a_{(n-1)l} = \begin{cases} -1 & (\text{ノード } n \text{ がリンク } l \text{ の始点ノードのとき}) \\ 1 & (\text{ノード } n \text{ がリンク } l \text{ の終点ノードのとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

で与えられるような行列 $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times L}$ を定義する．この行列は，ネットワークのノード・リンク接続行列から起点ノード 1 に対応する行を除いた行列である．

3.1.1 スキーム適用前の均衡状態

均衡状態における最短経路選択条件を考える．あるリンク l の始点ノードを i ，終点ノードを j とする．もしリンク l に交通量があれば，リンク l は起点ノード 1 からノード j へ向かう最短経路上にあると考えられる．つまり，

$$\begin{cases} t_l(x_l) = \tau_j - \tau_i & \text{if } x_l > 0 \\ t_l(x_l) \geq \tau_j - \tau_i & \text{if } x_l = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．この条件を全リンクについてまとめると，つぎのような相補性条件が得られる．

$$\begin{cases} x^T(t(x) - A^T\tau) = 0 \\ t(x) - A^T\tau \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

また，各ノードにおける交通量保存の条件から，

$$Ax = q \quad (3.2)$$

が成り立つ．

(3.1)，(3.2) より，スキーム適用前の利用者均衡状態をつぎのような等式条件を含む混合相補性問題に定式化できる．

$$\begin{aligned} & \text{find } x, \tau \\ & \text{such that } \begin{cases} x^T(t(x) - A^T\tau) = 0 \\ t(x) - A^T\tau \geq 0 \\ x \geq 0 \\ Ax = q \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

一般に全てのノード $n = 2, \dots, N$ に対して $\tau_n > 0$ が成り立つと考えられるから， $\tau > 0$ である．よって，

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}, \quad F^{UE}(X) = \begin{bmatrix} t(x) - A^T\tau \\ Ax - q \end{bmatrix}$$

とおくと，(3.3) は相補性問題

$$\begin{aligned} & \text{find } X \\ & \text{such that } \begin{cases} X^T F^{UE}(X) = 0 \\ F^{UE}(X) \geq 0 \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と等価である．ここで，UE は利用者均衡 (User Equilibrium) を意味する．

また，

$$\nabla F^{UE}(X) = \begin{bmatrix} \nabla t(x) & A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix}$$

であるから， $\nabla t(x) \succeq 0$ ならば $\nabla F^{UE}(X) \succeq 0$ となり， $F^{UE}(X)$ の単調性が言える．

3.1.2 スキーム適用後の均衡状態

続いて，合成スキーム下での利用者均衡状態を考える．上付きの (i) は利用者グループを示す． (0) は非課金グループ， (1) は課金グループである．また，両グループの交通量の和を $x = x^{(0)} + x^{(1)}$ として表す．

各 OD ペアに対して一定比率 $\alpha \in [0, 1]$ の非課金グループをつくと仮定する．スキーム適用前の均衡状態と同様に考えると，以下が成立する．

$$\begin{aligned} & \text{find } x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)} \\ & \text{such that } \begin{cases} x^{(0)T}(t(x^{(0)} + x^{(1)}) - A^T \tau^{(0)}) = 0 \\ t(x^{(0)} + x^{(1)}) - A^T \tau^{(0)} \geq 0 \\ x^{(0)} \geq 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x^{(1)T}(t(x^{(0)} + x^{(1)}) + e - A^T \tau^{(1)}) = 0 \\ t(x^{(0)} + x^{(1)}) + e - A^T \tau^{(1)} \geq 0 \\ x^{(1)} \geq 0 \end{cases} \\ & Ax^{(0)} = \alpha q \\ & Ax^{(1)} = (1 - \alpha)q \end{aligned}$$

ここで，

$$X = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ \tau^{(0)} \\ x^{(1)} \\ \tau^{(1)} \end{bmatrix}, F(X, \alpha) = \begin{bmatrix} t(x^{(0)} + x^{(1)}) - A^T \tau^{(0)} \\ Ax^{(0)} - \alpha q \\ t(x^{(0)} + x^{(1)}) + e - A^T \tau^{(1)} \\ Ax^{(1)} - (1 - \alpha)q \end{bmatrix}$$

とおくと，各々の α の値に対する均衡状態は相補性問題

$$\begin{aligned} & \text{find } X \\ & \text{such that } \begin{cases} X^T F(X, \alpha) = 0 \\ F(X, \alpha) \geq 0 \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

に帰着される．

また， $F(X, \alpha)$ のヤコビ行列はつぎのようになる．

$$\nabla F(X, \alpha) = \begin{bmatrix} \nabla t(x) & A^T & \nabla t(x) & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 \\ \nabla t(x) & 0 & \nabla t(x) & A^T \\ 0 & 0 & -A & 0 \end{bmatrix}$$

ただし， $\nabla t(x)$ は

$$\nabla t(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1(x)}{\partial x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial t_2(x)}{\partial x_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial t_L(x)}{\partial x_L} \end{bmatrix}$$

で表される対角行列である．

リンク移動時間関数 t_l はそのリンクの交通量 x_l に対して単調増加だから，以下が成立する．

$$\frac{\partial t_l(x)}{\partial x_l} \geq 0, \quad l = 1, \dots, L.$$

以上を考慮すると，

$$\begin{aligned} X^T(\nabla F(X, \alpha))X &= \sum_{i=0}^1 \sum_{l=1}^L \frac{\partial t_l(x_l)}{\partial x_l} (x_l^{(i)})^2 + 2 \sum_{l=1}^L \frac{\partial t_l(x_l)}{\partial x_l} x_l^{(0)} x_l^{(1)} \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{\partial t_l(x_l)}{\partial x_l} (x_l^{(0)} + x_l^{(1)})^2 \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{\partial t_l(x_l)}{\partial x_l} x_l^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるから， $\nabla F(X, \alpha) \succeq 0$ となり， $F(X, \alpha)$ の単調性がいえる．

3.2 MPEC として問題の定式化

以上の均衡状態に関する議論から，均衡状態とパレート改善条件を制約にもち，個々の利用者の一般化費用に関するパレート改善幅の総和を目的関数とする問題はつぎの問題 (P1) として定式化される．

$$\begin{aligned} \max_{e, \alpha, x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}} \quad & \sum_{i \in I} (\alpha q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)}) + (1 - \alpha) q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)})) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x^{(0)T} (t(x^{(0)} + x^{(1)}) - A^T \tau^{(0)}) = 0 \\ t(x^{(0)} + x^{(1)}) - A^T \tau^{(0)} \geq 0 \\ x^{(0)} \geq 0 \\ Ax^{(0)} = \alpha q \end{cases} \quad (\text{非課金グループ}) \\ & \begin{cases} x^{(1)T} (t(x^{(0)} + x^{(1)}) + e - A^T \tau^{(1)}) = 0 \\ t(x^{(0)} + x^{(1)}) + e - A^T \tau^{(1)} \geq 0 \\ x^{(1)} \geq 0 \\ Ax^{(1)} = (1 - \alpha)q \end{cases} \quad (\text{課金グループ}) \\ & \begin{cases} 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)} \\ 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)} \end{cases} \quad (i \in I) \quad (\text{パレート改善条件}) \end{aligned}$$

ここで， $I = \{i \mid q_i > 0\}$ であり， $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N)^T$ は，スキーム適用前の均衡状態における最小一般化費用を表すベクトルである．

問題 (P1) において， e, α は設計変数， $x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}$ は e と α を与えたとき均衡条件から値が定まる従属変数とみなすことができる．

問題を扱いやすくするために，

$$\begin{cases} w^{(0)} = (w_1^{(0)}, \dots, w_L^{(0)})^T = \left(t_1(x_1^{(0)} + x_1^{(1)}) + \tau_{o(1)}^{(0)} - \tau_{d(1)}^{(0)}, \dots, t_L(x_L^{(0)} + x_L^{(1)}) + \tau_{o(L)}^{(0)} - \tau_{d(L)}^{(0)} \right)^T \\ w^{(1)} = (w_1^{(1)}, \dots, w_L^{(1)})^T = \left(t_1(x_1^{(0)} + x_1^{(1)}) + \tau_{o(1)}^{(1)} - \tau_{d(1)}^{(1)}, \dots, t_L(x_L^{(0)} + x_L^{(1)}) + \tau_{o(L)}^{(1)} - \tau_{d(L)}^{(1)} \right)^T \end{cases}$$

とおくと，問題 (P1) は

$$\begin{aligned} \min_{e, \alpha, x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, w^{(0)}, w^{(1)}} & - \sum_{i \in I} (\alpha q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)}) + (1 - \alpha) q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)})) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x^{(0)T} w^{(0)} = 0 \\ w^{(0)} \geq 0 \\ x^{(0)} \geq 0 \\ Ax^{(0)} = \alpha q \\ \\ x^{(1)T} w^{(1)} = 0 \\ w^{(1)} \geq 0 \\ x^{(1)} \geq 0 \\ Ax^{(1)} = (1 - \alpha) q \\ \\ \begin{cases} 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)} \\ 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)} \end{cases} \quad (i \in I) \\ \\ \begin{cases} w_l^{(0)} = t_l(x_l^{(0)} + x_l^{(1)}) + \tau_{o(l)}^{(0)} - \tau_{d(l)}^{(0)} \\ w_l^{(1)} = t_l(x_l^{(0)} + x_l^{(1)}) + e_l + \tau_{o(l)}^{(1)} - \tau_{d(l)}^{(1)} \end{cases} \quad (l \in E) \end{cases} \end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで， $o(l)$ はリンク l の始点ノード， $d(l)$ は終点ノードを表す．この問題を (P2) とよぶ．

この問題は，制約条件の中に均衡条件を含んでおり，つぎに述べる MPEC である．

3.2.1 MPEC

制約条件のなかに，相補性条件や変分不等式のような均衡条件を含む最適化問題を均衡制約をもつ数理計画問題 (Mathematical Program with Equilibrium Constraints, MPEC) という．典型的な MPEC においては，設計変数 x および状態変数 y が存在し，均衡制約条件は設計変数をパラメータとする変分不等式問題の解集合によって与えられる．すなわち，あるベクトル値関数 F と点-集合写像 $Y(\cdot)$ に対して，設計変数 x をパラメータとするパラメトリック変分不等式問題

$$F(x, y)^T (z - y) \geq 0 \quad (z \in Y(x))$$

の解 $y \in Y(x)$ の集合を $S(x)$ とすれば，MPEC は一般につぎのように表される．

$$\begin{aligned} \min & f(x, y) \\ \text{s.t.} & (x, y) \in Z \\ & y \in S(x) \end{aligned}$$

ただし, f は実数値関数, Z は空でない集合である.

特に, 変分不等式問題がその特別な場合である相補性問題に帰着されるとき, MPEC はつぎの相補性制約条件をもつ問題となる.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z \\ & \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

4 微分可能な非線形最適化問題への再定式化

相補性制約をもつ MPEC に対して通常非線形最適化問題に対する手法を直接適用するのは妥当でない. まず, つぎの補題が成立する [9].

補題 4.1. 相補性条件

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{x}) &= 0 \quad (i = 1, \dots, N) \\ H_i(\mathbf{x}) &= 0 \quad (i = 1, \dots, N) \\ \sum_{i=1}^N G_i(\mathbf{x})H_i(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす任意の点において, 非線形計画問題に対する標準的な制約想定である *Mangasarian-Fromovitz* 制約想定は成立しない.

補題 4.1 より, 相補性制約をもつ MPEC では, *Mangasarian-Fromovitz* 制約想定が成立しない. よって, 一般に KKT 条件を満たすようなラグランジュ乗数が存在するとは限らない. このことが, MPEC を通常非線形最適化の枠組みで取り扱おうとしたときに困難が生じる原因である. このため, 相補性制約を等価な非線形方程式に再定式化することを考える.

4.1 非線形相補性問題の等価な方程式への再定式化

写像 $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ に対し, ベクトル $x \in \mathfrak{R}^n$ を求める非線形相補性問題 $\text{NCP}(F)$

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & x \\ \text{such that} \quad & x_i \geq 0, F_i(x) \geq 0, x_i F_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

を考える. ここで, $a \in \mathfrak{R}, b \in \mathfrak{R}$ に対し

$$\phi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義される Fischer-Burmeister 関数 [3][9] とよばれる関数を用いて再定式化を考える. $\phi(a, b)$ に関して,

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

が成立するから，この関数 ϕ を用いてベクトル値関数 $\Phi : \Re^n \times \Re^n \rightarrow \Re^n$ を

$$\Phi(x, y) \equiv (\phi(x_1, y_1), \dots, \phi(x_n, y_n))^T$$

と定義すれば，方程式

$$\Phi(x, F(x)) = 0$$

は，NCP(F) と等価である．[9]

しかし， $\Phi(x, y)$ は，ある i に対して $x_i = y_i = 0$ であるような点 (x, y) では微分不可能であり，Newton 法などの微分情報を必要とする最適化アルゴリズムに対しては，例えば微分不可能な点に対して劣微分概念を導入する必要があるなど，適用しにくい．そこで，Fischer-Burmeister 関数に替わって，

$$\psi(a, b, \mu) \equiv a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + \mu} \quad (4.1)$$

で定義される摂動 Fischer-Burmeister 関数 [4] を用いる．ただし， μ は非負のパラメータである． ψ はつぎの性質をもつ．

$$\psi(a, b, \mu) = 0 \iff \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0, ab = 0 & (\mu = 0 \text{ のとき}) \\ a > 0, b > 0, ab = \mu/2 & (\mu > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 ψ を用いてベクトル値関数 $\Psi : \Re^n \times \Re^n \times \Re \rightarrow \Re^n$ を

$$\Psi(x, y, \mu) \equiv (\psi(x_1, y_1, \mu), \dots, \psi(x_n, y_n, \mu))^T$$

で定義すると，方程式

$$\Psi(x, F(x), \mu) = 0$$

は， $\mu > 0$ かつ μ が小さいときに近似的に NCP(F) と等価であり， μ が 0 に近づけば近づくほど近似の精度が高くなっていく．特に， $\mu = 0$ のときは NCP(F) と等価になり，摂動 Fischer-Burmeister 関数は Fischer-Burmeister 関数と等しくなる． $\Psi(x, y, \mu)$ は， $\mu > 0$ のとき任意の点 (x, y) において微分可能であるので，微分情報が必要なアルゴリズムが容易に適用でき，計算機に実装しやすい．

4.2 問題の再定式化

問題 (P2) を, (4.1) で定義される摂動 Fischer-Burmeister 関数を使って微分可能な非線形最適化問題に近似的に再定式化すると, つぎの問題 (P3) になる.

$$\begin{aligned}
 & \min_{e, \alpha, x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, w^{(0)}, w^{(1)}} - \sum_{i \in I} (\alpha q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)}) + (1 - \alpha) q_i (\hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)})) \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax^{(0)} = \alpha q \\ Ax^{(1)} = (1 - \alpha) q \\ 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(0)} \\ 0 \leq \hat{\tau}_i - \tau_i^{(1)} \end{cases} \quad (i \in I) \\
 & \Psi(x^{(0)}, w^{(0)}, \mu) = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} + w_1^{(0)} \\ -\sqrt{x_1^{(0)2} + w_1^{(0)2} + \mu} \\ \vdots \\ x_L^{(0)} + w_L^{(0)} \\ -\sqrt{x_L^{(0)2} + w_L^{(0)2} + \mu} \end{pmatrix} = 0 \\
 & \Psi(x^{(1)}, w^{(1)}, \mu) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} + w_1^{(1)} \\ -\sqrt{x_1^{(1)2} + w_1^{(1)2} + \mu} \\ \vdots \\ x_L^{(1)} + w_L^{(1)} \\ -\sqrt{x_L^{(1)2} + w_L^{(1)2} + \mu} \end{pmatrix} = 0 \\
 & \begin{cases} w_l^{(0)} = t_l(x_l^{(0)} + x_l^{(1)}) + \tau_{o(l)}^{(0)} - \tau_{d(l)}^{(0)} \\ w_l^{(1)} = t_l(x_l^{(0)} + x_l^{(1)}) + e_l + \tau_{o(l)}^{(1)} - \tau_{d(l)}^{(1)} \end{cases} \quad (l \in E)
 \end{aligned}$$

この問題は, 等式制約と不等式制約をもつ微分可能な非線形最適化問題であり, 通常非線形最適化問題に対するアルゴリズムを適用できる.

5 数値実験

この節では, 小規模の具体的なネットワークに対して問題を MPEC の形に定式化し, 4 節に述べた手法で微分可能な非線形最適化問題に再定式化を行い解を求めた数値実験の結果を報告する. 本実験は CPU が 3.0GHz の Core 2 Duo E6850, メモリが 3.2GB の計算機上でを行い, アルゴリズムは MATLAB7.4 上で実装した.

図 1 のネットワークに対してパレート改善問題を定式化し, 数値計算を行った. このネットワークにおいて, 行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

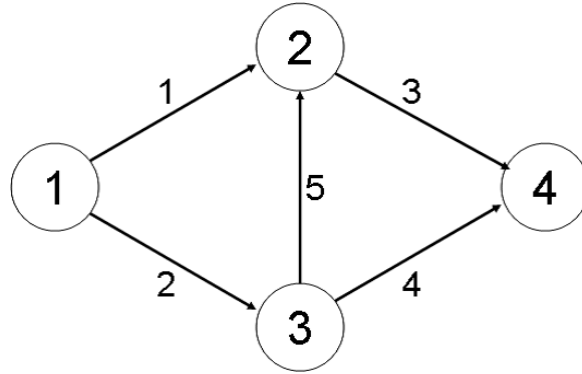


図1 ノード4つ，リンク5つのネットワーク

と表される．OD ペアの交通量は $q = (q_2, q_3, q_4)^T = (0, 0, 10)^T$ ，各リンクの移動時間は $t(x) = (t_1(x_1), \dots, t_5(x_5))^T = (x_1 + 50, 3x_2, 3x_3, x_4 + 50, x_5 + 10)^T$ とした．

このような小規模なネットワークにおいては全ての経路を容易に列挙できるため，解析的にパレート改善条件を導出できる．しかし，大規模で複雑なネットワークでは全経路を考えることが困難なため，数値計算によって求めることが必要である．

まず，相補性問題 (3.4) を解くことによりスキーム適用前の均衡状態における各ノードへの最小一般化費用 $\hat{\tau}$ を求める．具体的には相補性問題を Fischer-Burmeister 関数を用いて等価な方程式系に再定式化し，その 2 乗残差を目的関数とする無制約最小化問題として解く．その結果， $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4)^T = (50, 30, 80)^T$ が得られた．

次に，この $\hat{\tau}$ を用いて問題 (P3) を解き，パレート改善条件を満たしながら個々の利用者の一般化費用の改善幅の総和を最大化するような合成スキームを求める．計算手順は以下のとおりである．

Step 1 初期点 $(e, \alpha, x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)})$ と，パラメータ $\mu > 0, 0 < \beta < 1$ をえらぶ．

Step 2 問題 (P3) を解いて， $z = (e, \alpha, x^{(0)}, x^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)})$ を求める．

Step 3 $k - 1$ 回目の反復で得られた解 z^{k-1} と k 回目の反復で得られた解 z^k に対して， $\|z^k - z^{k-1}\| \leq \varepsilon$ が満たされれば終了する．そうでなければ，パラメータ μ を $\mu := \beta\mu$ と更新し，Step 2 へ戻る．

本実験では， $e, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}$ の初期値を区間 $(0, 50)$ の一様乱数で， α の初期値を区間 $(0, 1)$ の一様乱数で， $x^{(0)}, x^{(1)}$ の初期値を区間 $(0, 10)$ の一様乱数で生成し， μ の初期値を $\mu = 1$ とした．また， $\beta = 0.8, \varepsilon = 10^{-6}$ とした．

初期点を 1000 個生成し上記の計算を行ったところ，914 個の初期点で表 1 に示す解が得られた．ただし，各値は小数第 3 位で四捨五入されたものである．

e_1, e_2, e_3, e_4, e_5	0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 20.00 以上の値
α	0.33
$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)}$	0.00, 3.33, 3.33, 0.00, 3.33
$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(1)}$	3.33, 3.33, 3.33, 3.33, 0.00
$\tau_2^{(0)}, \tau_3^{(0)}, \tau_4^{(0)}$	33.33, 20.00, 53.33
$\tau_2^{(1)}, \tau_3^{(1)}, \tau_4^{(1)}$	53.33, 20.00, 73.33

表 1

この結果は、利用者のうち $1/3$ を非課金グループ、 $2/3$ を課金グループに指定し、リンク 5 のみに対して 20 以上の料金を与えたときに、各利用者のパレート改善幅の総和が最大になることを示している。このとき、非課金グループに属する利用者は全てノード 1 ノード 3 ノード 2 ノード 4 を通り、課金グループに属する利用者の半部分がノード 1 ノード 2 ノード 4、残りの半部分がノード 1 ノード 3 ノード 4 という経路を通っている。

ノード 4 に到着するために必要な最小一般化費用についてスキーム適用前後で比べると $\hat{\tau}_4 = 80$ から $\tau_4^{(0)} = 53.3$, $\tau_4^{(1)} = 73.3$ へとどちらのグループも改善されており、全ての利用者の一般化費用が改善されている（すなわちパレート改善されている）ことが確認された。個々の利用者の一般化費用の改善幅の総和は 133.33 であった。また、今回の実験ではノード 2、ノード 3 を終点ノードとする交通量 q_2, q_3 がそれぞれ 0 であったため、 $\tau_2^{(0)}, \tau_2^{(1)}, \tau_3^{(0)}, \tau_3^{(1)}$ に関しては $\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3$ に比べて必ずしも改善される必要はない。実際、 $50 = \hat{\tau}_2 < \tau_2^{(1)} = 53.33$ という結果が得られている。

このネットワークにおいてリンク 5 に料金をかける場合、 e, α が $e + 30\alpha \geq 30$ を満たすときパレート改善が達成されることが解析的に求められる。また、スキーム適用前後の最小一般化費用の差は $g(\alpha) = -300\alpha^2 + 200\alpha + 100$ であるので、 $\alpha = 1/3$, $e > 20$ のとき最大のパレート改善幅 $400/3$ が得られる。この理論解と数値実験で求めた解が一致するので、この解は大域的最適解であると考えられる。

上記の 914 個以外の初期点については、 $\alpha = 0$ つまり全員が課金グループに属するような解や、 $\alpha = 1$ つまり全員が非課金グループに属するような解が得られたり、解が発散したりした。これは、生成された初期点が適切でなかったためと考えられる。

6 結論

本論文では、早崎・赤松 [6] が提案した合成スキームにもとづいて、利用者均衡制約やパレート改善条件を満たしながらスキームの適用前後の個々の利用者の一般化費用の改善幅の総和を最大化するような混雑料金と課金非課金の割合を求める問題について考察した。考える問題は MPEC の形に定式化され、通常非線形最適化の枠組みでは扱いにくいいため、摂動 Fischer-Burmeister 関数を用いて均衡制約を近似的に等価な非線形方程式に変換することにより、問題を通常の微分可能

な非線形最適化問題に再定式化して解くことを考えた。さらに，具体的なネットワーク例に対して問題を定式化し，上記の方法で解が得られることを数値実験を通して確認した。

謝辞

まず、本論文の作成にあたり細部にいたるまで熱心なご指導をいただいた福島雅夫教授に心より感謝致します。また、日頃からお世話になっている山下信雄准教授、林俊介助教、ならびに、大変お世話になった同級生の黒川典俊君をはじめとする福島研究室の皆様に厚く御礼を申し上げます。最後に、私の6年間の大学生活を経済的に支えてくれた兄の和宗をはじめ、今日まで私を支え続けてくれた家族に心より感謝致します。

参考文献

- [1] C. F. DAGANZO, *A Pareto optimum congestion reduction scheme*, Transportation Research, **29B** (1995), pp. 139–154.
- [2] C. F. DAGANZO AND R. C. GARCIA, *A Pareto improving strategy for the time-dependent morning commute problem*, Transportation Science, **34** (2000), pp. 303–311.
- [3] F. FACCHINEI AND J.-S. PANG: *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [4] M. FUKUSHIMA, Z.-Q. LUO AND J.-S. PANG, *A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints*, Computational Optimization and Applications, **10** (1998), pp. 5–34.
- [5] 山田浩之, 交通混雑の経済分析 ロード・プライシング研究, 勁草書房, 2001.
- [6] 早崎俊和・赤松隆, 混雑料金と割り当て制の合成スキームによるパレート改善, MPEC にもとづく交通・地域政策分析 (MPEC 研究会編) 第3章, pp. 37–59, 2003.
- [7] 土木学会, 交通ネットワークの均衡分析 最新の理論と解法, 丸善, 1998.
- [8] 福岡正夫, ゼミナール経済学入門 第3版, 日本経済新聞社, 2000.
- [9] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [10] 文世一, 交通混雑の理論と政策, 東洋経済新報社, 2005.