

修士論文

条件付き VaR の分布的ロバスト最適化に対する  
拡張ラグランジュ法

指導教員 福田エレン秀美 准教授  
山下信雄 教授

川上 篤史

京都大学大学院情報学研究科

数理工学専攻



令和4年7月

## 摘要

ポートフォリオ最適化問題とは複数の投資対象に対し最適な投資割合 (ポートフォリオ) を求める問題である。ポートフォリオのリスク指標の一つに、条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional Value-at-Risk, CVaR) がある。CVaR は VaR を超えた損失の期待値として定義され、凸性やコヒーレント性というリスク尺度として好ましい性質をもつ。CVaR の計算には損失が従う確率分布が既知でなければならないが、一般には事前に確率分布を求めることは難しい。そのような欠点を克服するために、Zhu と Fukushima は CVaR の分布的ロバスト性を考慮した Worst-Case CVaR (Worst-Case Conditional Value-at-Risk, WCVaR) というリスク指標を提案した。WCVaR は、損失が従うであろう確率分布の集合 (不確実性集合) を考え、それに含まれる確率分布で計算した CVaR の中で最悪の値として定義される。損失の期待値計算をサンプリングによって近似した場合、WCVaR の最適化は線形計画問題として表現できる。しかしながら、WCVaR を正確に計算するためには莫大な数のサンプルが必要となる。線形計画問題の決定変数はサンプル数に比例する。内点法など線形計画問題に対する代表的な解法では、一回の反復に必要な計算量は決定変数の数の二乗以上となるため、実用的な規模の問題を解くことができなかった。

本論文では、より高速に WCVaR 最適化問題を解くために、拡張ラグランジュ法を用いることを提案する。この拡張ラグランジュ法の部分問題はサンプル数と同じ数の決定変数  $y$  とポートフォリオの決定変数  $x$  および WCVaR の値を表す決定変数  $\alpha$  で構成されている。そのため上記の線形計画問題と決定変数の数はほとんど変わらない。そこで、その部分問題において、サンプル数に比例した変数  $y$  の最小化を先に行う工夫を考える。これによって部分問題はサンプル数に依存しない変数  $x$  と  $\alpha$  に関する凸最適化問題と表すことができ、逐次二次計画法などで効率よく解くことができる。本論文では、 $y$  の最小化がサンプル数の線形時間で解けるアルゴリズムを提案する。さらに、実データとランダムなデータに対して提案手法を用いた数値実験を行い、WCVaR 最適化がサンプル数の増加に対し線形計画問題の手法である内点法より高速に解くことができることを示す。