数理計画法

2008 年 7 月 23 日

以下の問に答えよ．なお，解答以外 (“単位を下さい” とか) のことは記述しないこと．

問 1： 今，ある 4 社の株を買い，1 年間保持するつもりである．4 社の株の 1 年後の収益率 (確率変数) を R_1, R_2, R_3, R_4 とし，その期待値を r_1, r_2, r_3, r_4 とする．さらに，4 社の株に配分する資産の割合を $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ とする．(例：$x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0, x_4 = 0.6$.) このとき，ポートフォリオ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ の期待収益率は $\sum_{i=1}^{4} r_i x_i$ となり，ポートフォリオ x のリスク (分散) は $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} v_{ij} x_i x_j$ となる．(ここで，$V = (v_{ij})$ は収益率の分散共分散行列である．) このとき，次のポートフォリオを求める問題を数理計画問題に定式化しなさい．

(a) 期待収益率が 1.02 以上で，リスク (分散) を最小にするポートフォリオ x

(b) リスクが 0.04 以下で，期待収益率を最大にするポートフォリオ x

注意：x_i はそれぞれの株の配分比率を表しているので，$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 1$ という条件を満たさなければならない．(25 点)

問 2： 次の文章の空欄 (1)〜(5) に当てはまる言葉を下記の A〜L から選びなさい．(各 5 点)

- 実行可能集合 $\mathcal{F}$ 上で目的関数 f を最小化する数理計画問題において，

$$f(x^*) \leq f(x)\ \ \forall x \in \mathcal{F} \cap \{x \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$$

となる ε が存在するとき，点 $x^* \in \mathcal{F}$ を __(1)__ という．

- 目的関数と制約関数がともに 1 次式である問題を __(2)__ という．
- 凸計画問題であれば，__(3)__ を満たす点は大域的最小解となる．
- $\{C_k\}$ は 0 に収束する正の数列とする．次の不等式を満たすとき，点列 $\{x^k\}$ は x^* に __(4)__ するという．

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_k \|x^k - x^*\|$$

- どのような初期点 x^0 から初めても，点列 $\{x^k\}$ が何らかの解に収束するとき，そのアルゴリズムは __(5)__ するという．

A. 2 次収束	B. 超 1 次収束	C. 大域的収束	D. 局所的収束
E. 線形計画問題	F. 2 次計画問題	G. 局所的最小解	H. 大域的最小解
I. 最適性の必要条件	J. アルミホのルール	K. セカント条件	L. 組合せ最適化問題

問３： 次の凸 2 次計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

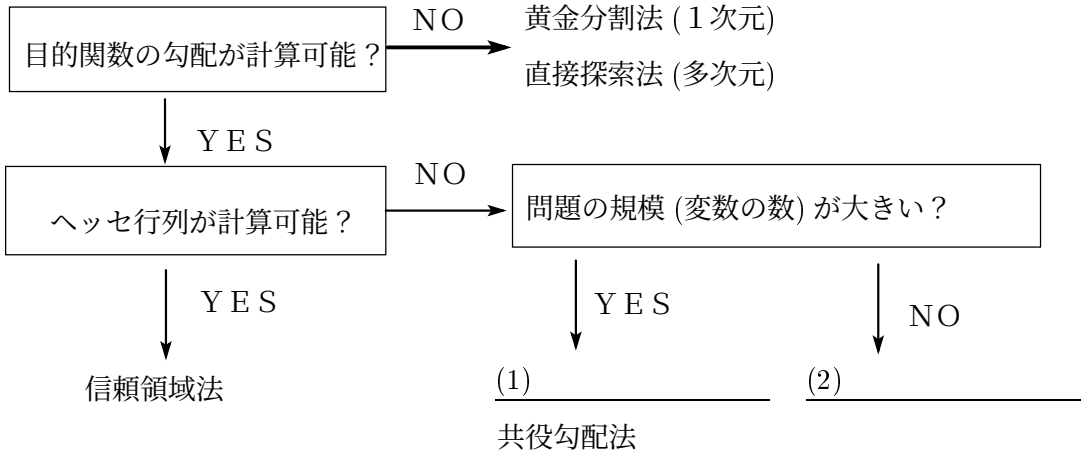
(i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$，$g(x_1, x_2) = -x_1$ とする．$\nabla f(x_1, x_2)$，$\nabla g(x_1, x_2)$ を書きなさい．(5 点)

(ii) この問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を記述しなさい．(10 点)

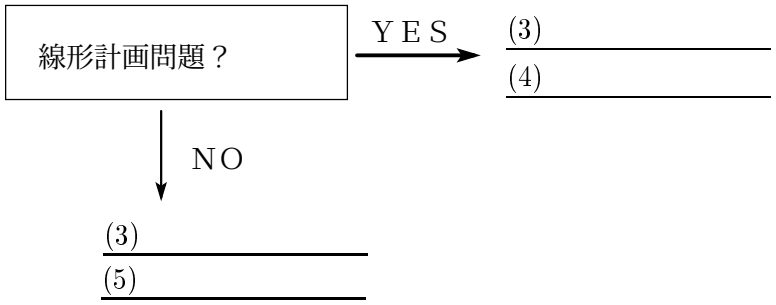
(iii) Karush-Kuhn-Tucker 条件から問題の最小解を求めなさい．(10 点)

問４： 次の図の空欄 (1)〜(5) に当てはまるアルゴリズムを下記のＡ〜F から選びなさい．(各 5 点)

制約なし最小化問題



制約つき最小化問題 (連続最適化)



A. 最急降下法　　B. ニュートン法　　C. 準ニュートン法
D. 単体法　　E. 内点法　　F. 逐次 2 次計画法