

数理計画法

2011 年 1 月 21 日

以下の問に答えよ．なお，解答以外（“単位を下さい”とか）のことは記述しないこと．

問 1：今，ある 4 社の株を買い，1 年間保持するつもりである．4 社の株の 1 年後の収益率（確率変数）を R_1, R_2, R_3, R_4 とし，その期待値を r_1, r_2, r_3, r_4 とする．さらに，4 社の株に配分する資産の割合を $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ とする．（例： $x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0, x_4 = 0.6$ ）このとき，ポートフォリオ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ の期待収益率は $\sum_{i=1}^4 r_i x_i$ となり，ポートフォリオ x のリスク（分散）は $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 v_{ij} x_i x_j$ となる．（ここで， $V = (v_{ij})$ は収益率の分散共分散行列である．）このとき，次のポートフォリオを求める問題を数理計画問題に定式化しなさい．

- (a) 期待収益率が 1.02 以上で，リスク（分散）を最小にするポートフォリオ x
- (b) リスクが 0.04 以下で，期待収益率を最大にするポートフォリオ x

注意： x_i はそれぞれの株の配分比率を表しているので， $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, \sum_{i=1}^4 x_i = 1$ という条件を満たさなければならない．(25 点)

問 2：次の文章の空欄 (1)～(5) に当てはまる言葉を下記の A～L から選びなさい．（各 5 点）

- 実行可能集合 $\mathcal{F}$ の中から目的関数 f を最小とする解を見つける数理計画問題において， $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{F}$ を満たす点 $x^* \in \mathcal{F}$ を (1) という．
- 目的関数と制約関数がともに 1 次式である問題を (2) という．
- 凸計画問題であれば，(3) を満たす点は大域的最小解となる．
- 次の不等式を満たす $C \in (0, 1)$ が存在するとき，点列 $\{x^k\}$ は x^* に (4) するという．

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \|x^k - x^*\|$$

- どのような初期点 x^0 から初めても，点列 $\{x^k\}$ が何らかの解に収束するとき，そのアルゴリズムは (5) するという．

- | | | | |
|-----------|-------------|-----------|-------------|
| A. 1 次収束 | B. 超 1 次収束 | C. 大域的収束 | D. 局所的収束 |
| E. 線形計画問題 | F. 2 次計画問題 | G. 局所的最小解 | H. 大域的最小解 |
| I. KKT 条件 | J. アルミホのルール | K. セカント条件 | L. 組合せ最適化問題 |

問3：次の凸2次計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll}\min & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \\ \text{s.t.} & -x_1 \leq 0\end{array}$$

(i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1$, $g_1(x_1, x_2) = -x_1$ とする． $\nabla f(x_1, x_2)$, $\nabla g_1(x_1, x_2)$ を書きなさい．(5点)

(ii) この問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を記述しなさい．(10点)

(iii) Karush-Kuhn-Tucker 条件から問題の最小解を求めなさい．(10点)

問4：次の文章の空欄(1)～(5)に当てはまる数式・言葉を下記のA～Lから選びなさい．

最急降下法と準ニュートン法は制約なし最小化問題に対する (1) である．最急降下法が用いる探索方向は (2) であり，準ニュートン法が用いる探索方向は $-(B_k)^{-1}\nabla f(x^k)$ である．どちらもアルミホのルールでステップ幅を求めれば，(3) する．一般に準ニュートン法のほうが収束は (4) ．一方，計算機に実装するために必要なメモリー量は，最急降下法の方が (5) ．

- | | | | |
|-----------|----------|---------------------|---|
| A. 速い | B. 遅い | C. 少ない | D. 多い |
| E. 大域的収束 | F. 局所的収束 | G. 2次収束 | H. 超1次収束 |
| I. ニュートン法 | J. 降下法 | K. $-\nabla f(x^k)$ | L. $-\nabla^2 f(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$ |