数理計画法

京都大学大学院情報学研究科　山下信雄

本授業において

担当: 山下信雄

住所: 〒606-8501 京都市左京区吉田本町　京都大学大学院　情報学研究科

電話: 075-753-4759

E-mail: nobuo@i.kyoto-u.ac.jp

授業方法: 黒板を使って授業を行なう。適宜、資料を配布する。

採点方法: 基本的には期末に行なう試験で採点する。試験の類似問題のいくつかは授業中に告知する。点数の底上げのためにレポートの提出を求めることもある (未定)。

参考図書:

福島雅夫、「数理計画法入門」、朝倉書店、1996

茨木俊秀、福島雅夫、「最適化の手法」、共立出版、1993

その他:

- 授業中、わからないことがあったら、積極的に質問すること。
- 授業後の質問は、電子メールで行なうこと。
- 授業中は他の人の迷惑をかけないこと。

第 1 章　数理計画法とは

数理計画法は、現実社会で直面する様々な問題を数理的にモデル化し、そのようなモデルに対する最適な答えを与える手法である。現在では、社会的な問題に限らず、工学、自然科学などあらゆる分野の様々な問題を扱っている。この章では、数理計画法とは何かを説明する。まず、数理計画法で扱う数理計画問題がどのように数式を用いて定式化されるか見る。その後、定式化された問題の分類方法を説明する。さらに、いくつかの身近な社会的問題を紹介し、それらの問題を数理計画問題への定式化を行なう。

練習問題 1 身近な問題を、数理計画問題として定式化せよ。

1.1　数理計画問題

様々な分野において、「与えられた選択肢の中から、与えられた目的を 1 番満足する答えを見つける問題」に直面することが多い。このような問題を数式を用いて表現したものが数理計画問題である。本書で扱う数理計画問題をきちんと定義する前に、まず、次の問題を考えてみよう。

問題 A：　辺の長さの和が 10cm である長方形の中で，面積が最大となるものを求めよ。

これは大学受験などでよくある問題である。この問題を解くために、この問題を数式を用いて表してみよう。この「数式を用いて表す」作業を ______ または ______ と呼ぶ。まず、長方形の縦の長さを $y$cm, 横の長さを $z$cm とする。このとき、問題 A の目的は面積 yz を最大化することである（図 1.1）。このとき、辺の長さ y と z は自由に選べるわけではない。まず、辺の長

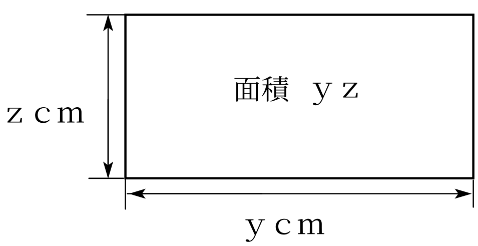

図 1.1: 問題 A

さを表す y, z は非負の実数でなければならない。つまり、$y, z \in R$ で $y \geq 0,\ z \geq 0$ を満たさなければならない。さらに、変の長さの和が 10cm であるという条件から、$2y + 2z = 10$ を満たす必要もある。以上のことをまとめると、この問題は次のように表す (定式化する) ことができる。

$$
\begin{array}{ll}
\max & yz \\
\text{subject to} & y \in R,\ z \in R \\
 & 2y + 2z = 10 \\
 & y \geq 0,\ z \geq 0
\end{array}
$$

ここで，”subject to” とは,「〜〜という条件を満たす選択肢の中で」ということを意味している。(”s.t.” と省略することもある。) max は,「〜〜を最大化せよ」ということを意味している。このように目的を表す max(または最小化を表す min) と選択肢を表す”subject to”で表される問題が数理計画問題である。

それでは、本書で扱う数理計画問題の一般的な定義を与えよう。

まず、問題を解こうとしている人 (人ではないこともある) を ＿＿＿＿＿＿ と呼ぶ。数理計画問題を定式化する上で、意思決定者が、どのような条件のもとで、何を満足するために、何を決定しようとしているかを明確に数式で表す必要がある。

意思決定者が選択 (決定) できる変数をを ＿＿＿＿＿＿ と呼ぶ。問題 A の決定変数は、y と z というアルファベットを用いて表していた。しかし、一般の問題では、より多くの決定変数を扱う必要がある。そのとき，各変数に $y, z, \ldots$ とアルファベットを振っていては，表記上問題がある。そこで、変数をひとまとめにして、ベクトル x で表す方が都合がよい。例えば、n 個の決定変数がある問題では、x は n 次元ベクトルであり、

$$
x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

となる。なお数理計画法では、決定変数の次元を自然数 n で表すことが多いので、本書でもその記号を用いる。問題 A の決定変数は 2 つであったので、$x_1 = y$、$x_2 = z$ とすると、$x \in R^2$ の 2 次元ベクトルを決定変数とした問題と考えることができる.

次に、意思決定者の目的を決定変数の関数を用いて表現する。この関数を ＿＿＿＿＿＿ と呼ぶ。問題 A では，面積を表す式 yz(x の表記を用いれば x_1x_2) が目的関数であり、この関数の値の最大化を目的にしていた。ところで、問題 A のように目的関数が簡単な場合は表記上簡単であるが、より複雑な目的関数扱うときには、その関数をそのまま表記していたのでは、その関数の複雑さによって問題の本質を見失ってしまう可能性がある。そこで、取り扱う目的関数を $f(x)$ などいう形で抽象的に表現すると、便利になることが多い。問題 A では、$f(x) = x_1x_2$ と定義した関数 f の最大化と考えることができる.

次に、意思決定者が決定変数を決める上で、満たさなければならない条件を数式で表す。本書では、等式を表す関数には h を, 不等式を表す関数には g を用いることにする。より厳密に言えば、問題の答えが満たすべき条件が、等式 m 個，不等式 r 個で表されているとき、$h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$, $g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, m$ と表す．なお、問題 A では，$h_1(x, y) = 2x + 2y$ であり，$g_1(x, y) = -x$, $g_2(x, y) = -y$ と考えればよい．ここで，添字 i や j を用いた $h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$ や $g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, m$ という表記はすっきりしていない。そこで、ベクトルを値として与えるベクトル

値関数 h, g を次のように定義する。

$$h(x) := \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) := \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ g_r(x) \end{pmatrix},$$

この h と g を用いて、不等式の等式の条件は、

$$h(x) = 0, \quad g(x) \le 0$$

と表される。なおこれらの式の右側にでてくる 0 は、等式の方は m 次元ベクトルの 0 であり、不等式の方は r 次元ベクトルの 0 である。そして、これらのベクトルに対する”=”と”$\geq$ ”の意味は、右辺と左辺の対応する成分において”=”と”$\geq$ ”が成り立つということである。

それでは上記の説明に基づいて、数理計画問題を定義することにしよう。ここで、意思決定者は、解きたい問題を表す次の集合および関数を考えているとする。

- R^n の部分集合 X
- 集合 X から R への目的関数 f
- 集合 X から R への関数 $h_i, i = 1, \ldots, m$
- 集合 X から R への関数 $g_j, j = 1, \ldots, r$

このとき、数理計画問題は次のように定式化される問題である。

$$\begin{array}{ll} \text{min (or max)} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in X \\ & h(x) = 0 \\ & g_j(x) \le 0 \end{array}$$

ここで、X は、あつかう数理計画問題が考えている ”世界 ”を表している。問題 A では，$X = R^2$ である。また、$x \in X$ を用いて、等式や不等式で表すことが難しい条件を表すこともある．例えば,「x_1 は自然数である」という条件は，等式や不等式で表すことは難しい．そのため，$x_1 \in N$ と表したりする．

これまでに見てきたように、数理計画問題とは，与えられた条件を満たしつつ，ある目的を最小，または最大にする” 答え” を求める問題である．ここで，そのような答えを __________ と呼ぶ．また，最適解が満たすべき条件を __________ と呼ぶ。制約の中でも特に、$h(x) = 0$ を __________，$g(x) \le 0$ を __________ と呼ぶ．さらに，制約条件をみたした最適解となる可能性のある集合を $\mathcal{F} = \{x \in X \mid h(x) = 0, g(x) \le 0\}$ と表し、これを問題の __________ と呼ぶ．また実行可能集合に含まれる点 $x \in \mathcal{F}$ を実行可能解と呼ぶ。このため、意思決定者の”選択肢”は、実行可能解であると言える。

また、これまでは、”最大化 ”または ”最小化 ”と、２種類の問題があるような書き方をしてきたが、これからは、特に断らない限り ”最小化 ”のみを扱うことにする。目的関数 f を最大化する問題は、目的関数 $-f$ を最小化する問題と同じであるので、このようにしても問題はない。実際、問題 A では、同じ制約条件の元で $-f(x) = -x_1x_2$ の最小化していることと同じである。数

理計画問題は、結局、「目的関数を制約条件の元でを最小化する問題」ということができる。そのため、数理計画問題を、最適化問題、最小化問題などと呼ぶこともある。なお、問題 A は、

$$X = R^n, f(x) = -x_1x_2, h_1(x, y) = 2x + 2y, g_1(x, y) = -x, g_2(x, y) = -y$$

とした数理計画問題である。

1.2 数理計画問題の分類

数理計画問題は多種多様に存在している。それぞれの問題によって、適用可能な理論や問題解決手法 (アルゴリズム) が異なっている。そこで、数理計画問題を、その目的関数，実行可能集合の性質から，いくつかの問題に分類することを考える．この分類は、あとの章で紹介する「最適性の理論」や「最適化の手法」を適用する上で、非常に重要である。

実行可能集合 $\mathcal{F}$ が全空間 R^n で与えられている数理計画問題を ＿＿＿＿＿ という．

[制約なし最小化問題]

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in R^n \end{array}$$

一方，制約がある問題を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ．制約つき最小化問題のなかでも，等式制約のみの問題を ＿＿＿＿＿，不等式制約のみの問題を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ．制約なし最小化問題の方が制約つき最小化問題よりも簡単である。一方、等式制約最小化問題と不等式制約最小化問題を比較した場合、一般には等式制約最小化問題の方がやさしい問題となるが、等式制約を表す関数 h が x^2 などのような非線形である場合は、必ずしも等式制約最小化問題の方が扱いやすいとはいえない。これは後程紹介する凸計画問題にならなくなるからである。

目的関数 f と, 制約を表す関数 h と g が，アフィン関数[1] で与えられている数理計画問題を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ．n 次元ベクトル c, $m \times n$ 行列 A, m 次元ベクトル b が与えられているとき，線形計画問題は以下のように定式化できる．

[線形計画問題]

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

ここで、T は転置を表す。さらに、$c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ となるので、$c^T x = \sum_{i=1}^n c_1 x_i$ である。この問題に対して，シンプレックス法，内点法などの効率的な解法が提案されており，かなり大規模な問題を解くことに成功している。なお，この問題の特徴やシンプレックス法，内点法は次章以降で紹介する。

一方，目的関数が $n \times n$ 行列 Q と n 次元ベクトル q を用いて $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ で表されている問題を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ.

[1] 線形関数を平行移動して得られる関数をアフィン関数と呼ぶ

[2 次計画問題]

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Q が半正定値行列[2] 与えられている 2 次計画問題に対しても、内点法が提案されており，比較的大規模な問題を解くことができる。

　一般の数理計画問題のなかでも，目的関数 f が凸関数，実行可能領域 $\mathcal{F}$ が凸集合であるような問題は扱いやすい.（このことは次章以降で説明する。）ここで，関数 f が凸であるとは,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad \forall x, y \in R^n,\ \forall \alpha \in [0,1]$$

が成り立つことをいい，集合 S が凸集合であるとは,

$$\forall x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in S \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

が成り立つことをいう (図 1.2 参照). そのような問題を**凸計画問題 (convex programming**

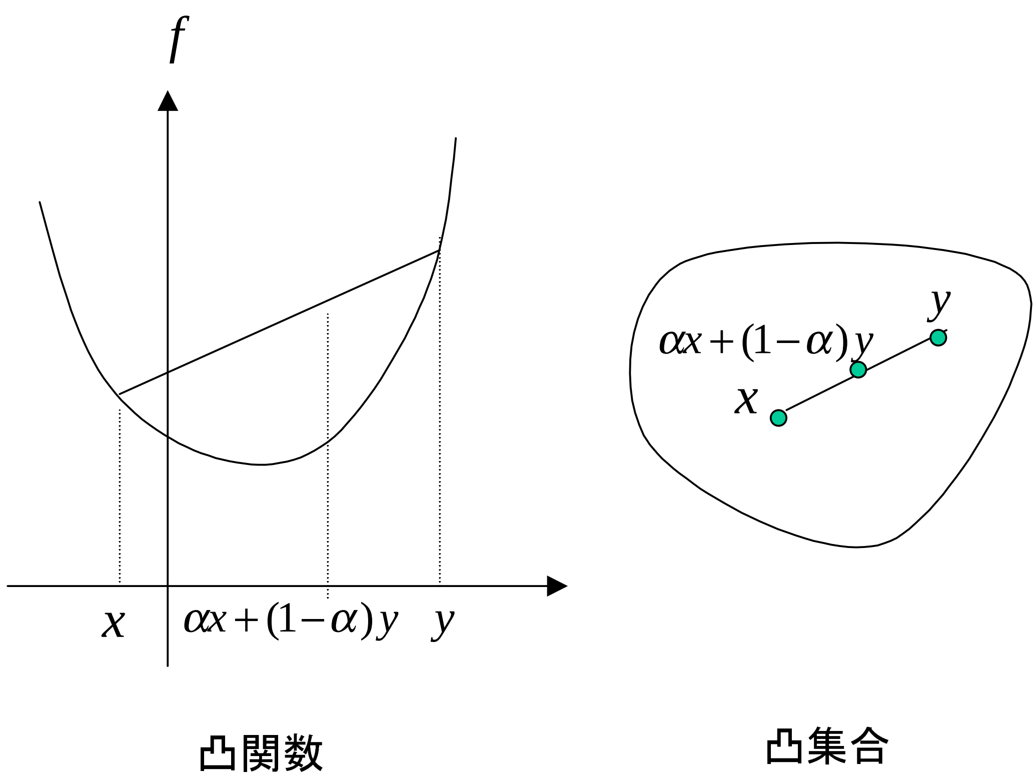

図 1.2: 凸関数と凸集合

problem) と呼ぶ. なお，線形計画問題や Q が半正定値行列で与えられている 2 次計画問題は凸計画問題となる.

[2] すべての $x \in R^n$ に対して、$x^TQx \geq 0$ を満たす行列 Q を半正定値行列とよぶ。数理計画法において、行列の半正定値性は非常に重要な概念である。

線形計画問題、２次計画問題、凸計画問題は、問題が扱う空間 X(その結果、実行可能集合 $\mathcal{F}$) がひとかたまり (連結) であった。集合 X が離散的に与えられている数理計画問題を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ。たとえば、$X=\{0,1\}^n$ で与えられていたら、決定変数 x の各成分 x_i が 0 か 1 をとる組み合せ最適化問題となる。組み合せ最適化問題では、実行可能解の数が有限個になることが多いので、そのすべての実行可能解の目的関数値をしらみつぶしに調べることによって、最適解を得ることができる。しかし、$X=\{0,1\}^n$ であり、等式制約、不等式制約がない組み合せ最適化問題の実行可能解の数は 2^n となり、決定変数の次元 (数) n が大きいときにはすべての実行可能解の目的関数値を調べることはできない。そのため、多くの組み合せ最適化問題は、凸計画問題よりも難しい問題と考えられている。

1.3 数理計画法の例

数理計画問題は，社会的にも工学的にも、よく出現する．日常生活のなかでも，意識するしないは別にして，絶えず，数理計画問題を解きながら生きている．例えば，限られた小遣いのなかで，自分が一番喜ぶものを買うというのも，立派な数理計画問題である．また，政府が限られた税収の中から，国民の最大幸福を目指して配分する予算編成を決める問題も数理計画問題となる．

この節では，いくつかの数理計画問題を見ることによって、数理計画問題のイメージを掴むことにする。

ポートフォリオ最適化

今，A さんは１億円持っており，その資金を株式で運用することによって，儲けることを考えている.（このとき意思決定者は A さんである。）そして，株式は，東京電力，ソニー，NTT，東京ディズニーランド（オリエンタルランド）に投資することを考えている．そしてそれらの株の期待収益率 (１年後に予想される株価の増減率) が、東京電力の期待収益率は R_1, ソニーの期待収益率は R_2, というように予想できているとする。このとき，A さんはどのように１億円を配分したらよいだろうか？儲けることだけ考えるのであれば、一番期待収益率が高い会社の株に全額１億円を投資すればよい。しかし，株は損をするというリスクがある．そこで，なるべくリスクは、小さくしたい考えるのが人情である．今，夏だとすると，暑い夏になれば，東京電力は儲かるだろう．一方，東京ディズニーランドは客足がとまり、儲からないだろう．もちろん、寒い夏になるとこの逆になる。このとき、どちらかの株だけ買うと大儲けできる可能性もあるが、大損する可能性もある。一方，両方の株を同数だけ買えば，その投資に対する期待収益率は東京電力と東京ディズニーランドの平均となる。それだけでなく、損する可能性（リスク）が減少することもできる．リスクを減らしつつ，利益を上げる資産配分 (ポートフォリオ) を求めることが、金融工学の大きな目的のひとつである．ここで，金融工学においてリスクを計る指標のひとつに，ポートフォリオの分散がある．それでは、ある程度以上、期待収益率を保証しつつ、分散で表されたリスクを最小化する問題を数理計画問題として定式化しよう。まず、現在考えている会社の数は４つである。それぞれの会社に配分する資産の割合を $x_i, i=1,2,3,4$ とする。x_i はそれぞれの株の配分を表しているので,

$$x_i \geq 0, i=1,2,3,4,\ \ \sum_{i=1}^{4} x_i = 1$$

という条件を満たさなければならない．この x を用いれば，期待収益率は $\sum R_i x_i$ と表される．また，各株式の収益率の相関が v_{ij} で表されているとき，ポートフォリ x の分散は $\frac{1}{2}x^T V x$ に比例し

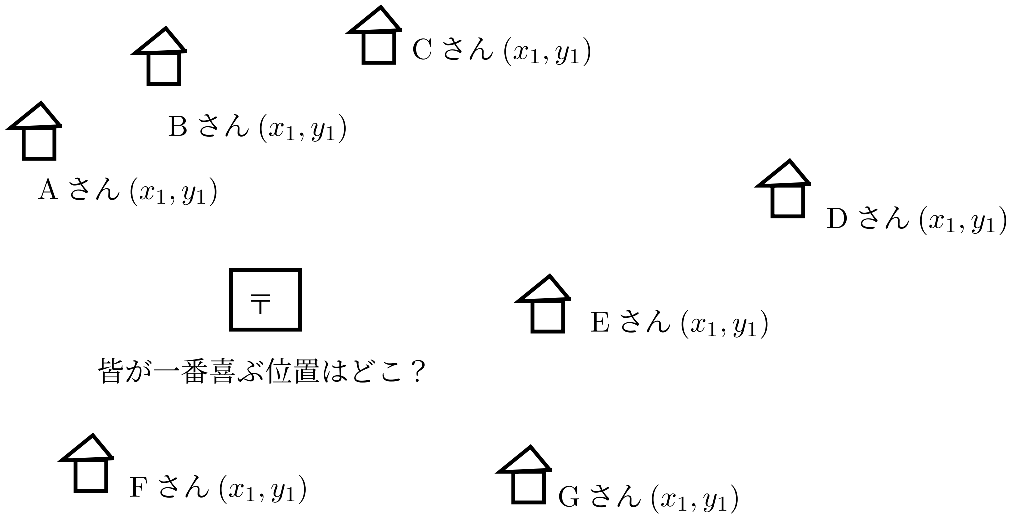

図 1.3: ポストの配置問題

ている．そこで，期待収益率を 2%以上となるようにしつつ，リスク (分散) を最小にしようとしたら，次の問題を解けばよいことになる．

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T V x \\ \text{subject to} & x \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 1,\ \sum_{i=1}^{4} R_i x_i \geq 0.02 \end{array}$$

この問題は 2 次計画問題になっている。また、この問題ではポートフォリオを、配分割合として求めているため、A さんが持っていた 1 億円というお金は定式化に出てこないことに注意しよう。

ポストの配置問題

今、ポストがまるっきりない過疎の村があったとしよう．この村の 7 世帯であり，それぞれの住所 (座標) が 2 次元座標 $a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ で与えられているとする (図 1.3)．このとき，意思決定者である郵便局は、ポストを設置する基準として，次の 2 つを考えている。

(a) すべての家からの距離の和が最小になる位置 (村人全体として歩く距離の最小化)

(b) 最も遠くなる人の距離が最小となる位置

(a) では、すべての家からの距離の和の最小化問題となるので、ポストの位置 (座標) を $x \in R^2$ とすれば，目的関数は $\sum_{i=1}^{7} \|x - a_i\|$ となる．ここで、$z \in R^2$ に対して、$\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ で与えられるユークリッド距離である。一方，(b) の目的関数は，最も遠くなる人の距離，つまり、$\max_i \{\|x - a_i\|,\}$ となる。これらの最小化問題の共通の制約として，ポストが設置できる候補を X とする。このとき、(a) に対しては，

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{7} \|x - a_i\| \\ \text{subject to} & x \in X \end{array}$$

となり、(b) に対しては，

$$\begin{array}{ll} \min & \max_i \{\|x - a_i\|\} \\ \text{subject to} & x \in X \end{array}$$

となる。これらの問題には、ポストを設置するコスト (土地代) などが入っていない。それらのコストを入れて問題をつくることもできる。

データマイニング

データマイニングとは、莫大なデータの中から、意味のある「規則」を探索する手法であり、マーケティングや医療診断、企業の倒産予測など様々な分野で使われている。ここでは，２つのクラス（例えば、癌の人とそうでない人）に分かれているサンプル (患者) とそのデータ（血圧、体重，…）が与えられているとき、そのサンプルを２つのクラスに分類する線形な関数（規則）を求める手法が、数理計画法として定式化できることを見よう。なお、そのような規則が求まれば、どのクラスに入っているかわからない新しいサンプル (患者) が来たときに、そのサンプルのデータ (血圧、体重，…）を求めた規則に当てはめることによって、そのサンプルがどのクラス (癌か癌でないか) に入るか推定することができる。

今、l 個のサンプルが与えられているとする．各々のサンプルのデータは，ベクトル $z_i \in R^n, \quad i = 1, \cdots, l$ とそれに割り当てられたクラス $a_i \in \{-1, 1\}$ の組からなる．このとき、次の条件を満たす関数 $f : R^n \to R$、観測データの識別関数と呼ぶ.

$$a_i = 1 \text{ のとき } f(z_i) > 0$$
$$a_i = -1 \text{ のとき } f(z_i) < 0$$

なお、$f(x) = 0$ を満たす点の集合は二つのクラスの境界面をなす．もしサンプルの識別関数をもとめることができれば、新たに入力されたどちらのクラスに属すのか分からないデータを f の正負により二つのクラスのどちらかに所属するか類推することができる。ここでは、線形な識別関数を求める手法を考えよう。

まず、正 $(a_i = 1)$ のサンプルと負 $(a_i = 1)$ のサンプルを分離する超平面が存在するとする[3]．一般に超平面の方程式は、

$$w^T z + b = 0$$

で与えられる．ここで w は超平面の法線ベクトルであり，$|b|/\|w\|$ は超平面から原点までの距離である．d_+（d_-）を超平面から最も近い正（負）のクラスに所属するサンプルのデータまでの最短距離とする．ここで、超平面のマージンを $d_+ + d_-$ と定義する．２つのクラスに分離する超平面は多数存在する。データに多少の誤差が存在する場合でも、２つのクラスに分離する超平面の中で、最もマージンが大きい超平面が、信頼できると考えることができる。このマージンが最大となる超平面を求める (w と b を求める) 問題は、以下のようにすることによって、２次計画問題として定式化できる.

まず、超平面が識別関数となるために、すべての観測データに対して、次の制約条件を満たさなければならない.

$$w^T z_i + b \geq +1 \quad \text{for } a_i = +1 \tag{1.1}$$
$$w^T z_i + b \leq -1 \quad \text{for } a_i = -1 \tag{1.2}$$

ここで、識別関数の定義では不等号 $>$ と $<$ を用いていたが、適当に正規化することによって、上記の等号付きに不等式に変換することができる。さらに、これらの不等式は一つの不等式にまとめることができる.

$$a_i(w^T z = i + b) - 1 \geq 0 \quad \forall i \tag{1.3}$$

[3] 超平面とは、1 次元のときは点、2 次元のときは直線、3 次元のときは平面となるものを、多次元に拡張したものである。1 次元の空間 (直線) は点で、2 次元の空間 (平面) は直線で、3 次元の空間は平面で 2 つに分離できる。このように、多次元空間は超平面で 2 つの領域に分離できる。ここでは、正のサンプルが入る領域と負のサンプルが入る領域を、分離する超平面を求めることを目的にしている。

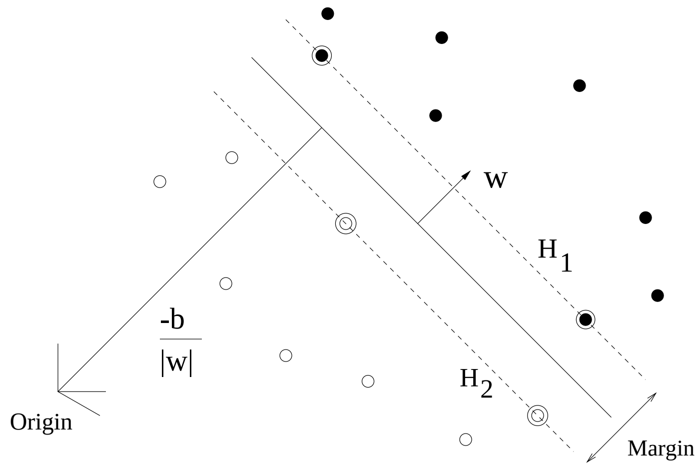

図 1.4: 線形分離可能な場合の分離超平面

ここで、式 (1.1),(1.2) の等号が成り立つ点を考える．それらは次のような超平面上にある．

$$H_1: \quad x_i \cdot w + b = +1 \qquad \text{原点からの距離 } |1-b|/\|w\|$$
$$H_2: \quad x_i \cdot w + b = -1 \qquad \text{原点からの距離 } |-1-b|/\|w\|$$

よって，$d_+ = d_- = 1/\|w\|$ でマージンは $2/\|w\|$ であることがわかる．マージン $2/\|w\|$ の最大化は $|w\|^2$ を最小化することに等しいので、制約 (1.3) の下で $|w\|^2$ を最小化する w と b を求めることによって, 最大マージンを与える超平面を求めることができる．これらのことをまとめると識別関数を求める問題は次のように定式化できる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize:} & \|w\|^2 \\ \text{subject to:} & a_i(w^T z_i + b) - 1 \geq 0 \quad \forall i \end{array}$$

前述の 2 次計画問題では、観測データが分離可能であることが前提となっていた。もし、分離不可能なデータに適用するとこの問題には実行可能解が存在しない。そこで制約 (1.1)，(1.2) を緩めることを考える．そのために、非負の人為変数 $xi_i, i = 1, \cdots, l$ を導入し、制約条件は次のよう変更する．

$$\begin{aligned} & w^T z_i + b \geq +1 - xi_i \quad \text{for } a_i = +1 \\ & w^T z_i + b \leq -1 + xi_i \quad \text{for } a_i = -1 \\ & xi_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

ここで、$xi_i = 0$ であれば、元の問題の制約が維持されていることを意味し、$xi_i > 0$ であれば元の制約が、その大きさ分満たされていないことを意味している。そのため、できるかぎり、xi_i は小さい方がよい。そのために、目的関数を次のように変更する．

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{l} xi_i$$

こｋで、C は、元の問題の制約を壊すことをどれくらいゆるすかの厳しさをあらわす正のパラメータである。C が大きいほど、制約をなるべく壊さない解を求めることになる。

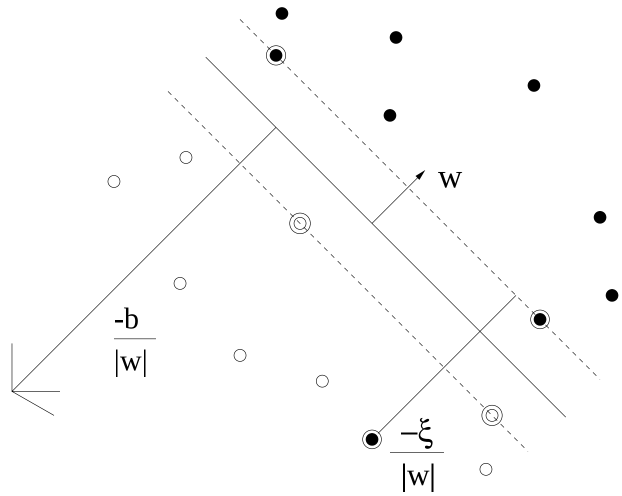

図 1.5: 線形分離ができない場合の分離超平面

最小固有値計算問題

工学の分野では行列の最大固有値や最小固有値を調べる問題がしばしば現れる．特に，制御や建築など，システムや構造物の安定性を調べる上で、固有値の計算は不可欠である．ここでは，一番簡単な $n \times n$ の対称行列 A の最小固有値を求める問題を考えよう．対称行列であるため，固有値は実数である．今、$\mu \in R$ というパラメータを考える。(後ほど、この μ が最小固有値と対応することがわかる。) ここで，I を単位行列とし，$A - \mu I$ という行列を考える．このとき，A が対称行列であることから，A の任意の固有値 μ_i に対して，$A + \mu I$ の固有値は $\mu_i + \mu$ となる．そこで,

$$\mu_i - \mu \geq 0, i = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

という条件のもとで，μ を最大化 ($-\mu$ の最小化) することを考える．この問題の解は，明らかに、最小固有値に一致する．しかし、この定式化では，固有値がすべてわかっていることが前提となっており、これは問題の主旨に反する．そこで，固有値がわからない状況でも扱えるよう、条件 (1.4) を次の等価な条件への変更する．

行列 $A - \mu I$ は半正定値行列

この等価性は、半正定値対称行列の固有値は非負であるという性質による。こうすることによって，最小固有値を求める問題は,

min	$-\mu$
subject to	$A - \mu I$ は半正定値行列

と表すことができる．ここで、「半正定値行列である」という制約は一見難しそうに見えるが，実際はこの制約をみたす行列の集合は凸集合となり、この問題は凸計画となる。

ところで，最小固有値を求めるだけであれば，数値計算の手法である QR 法などのほうが実用性が高く、このように数理計画問題として定式化して解くことには意味がないように思えるかもしれない。しかしながら、この問題は、制約条件や目的関数を変更を加えることによって、様々な応用問題に適用することができる。例えば，あるシステム (構造物) の安定性が $A(x)$ の固有値が 0 以上であるという条件と等価であったとしよう。ここで、$A(x)$ は、x を変数 (設計変数) として行列を出力する関数である。そして，設計に関する目的が $f(x)$ の最小化として与えられているとする．(例えば，安定した橋を，低コストで作りたいとか.) そのとき，この問題は,

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(x) \\
\text{subject to} & A(x) - \mu I \text{ は半正定値行列} \\
 & \mu \geq 0
\end{array}
$$

という形で表される．これはもう数理計画問題としてしか扱うことができない．なお、この問題を一般化した問題は半正定値計画問題と呼ばれ，さらに広い工学的応用分野を持つ問題として知られている．

ナップサック問題

今，B さんはバーゲン会場に来ている．このバーゲン会場では，各商品は 1 つずつしか売られていない．そして、現在の所持金は 5 万円である．また、各商品には，B さんがどれくらい欲しいかを表す満足度と値段が与えれらている．例えば，

商品	財布	靴	ズボン	スカート	シャツ	鞄	$\cdots$
満足度	10	20	15	17	10	30	$\cdots$
値段	5 千円	1 万円	8 千円	9 千円	5 千円	4 万円	$\cdots$

となっているとしよう．このとき、B さんにとって、所持金内で、満足度が最大となる買い物をするにはどうしたらよいだろうか？

この問題を数理計画問題に定式化するために、まず，財布は 1，靴は 2，ズボンは 3,... というように, 商品に番号づけをする．その番号に対応して，満足度を $c_1, c_2, \ldots$ とする．例えば，財布の番号は 1 なので，財布の満足度 c_1 は $c_1 = 10$ となる．同様にそれらの商品の価格を $a_1, a_2, \ldots$ と表すことにする．さて，この問題の決定変数は何であろうか？この問題では，対象の商品を買うか買わないかである．そこで，商品を買うことには 1，商品を買わないことには 0 をつける変数を考える．各商品 i に対して，決定変数は x_i とする．つまり，$x_i = 1$ のときには商品 i を買い，$x_i = 0$ のときは商品を買わないことを意味している．このとき，ある買い物 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をしたときに，得られる満足度の合計は，$\sum_{i=1}^n c_i x_i$ で表される．さらに，その買い物にかかる費用は $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ であり，予算が今 5 万円であったので，$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq 50000$ でなければならない．結局この予算制約の中で，最高の満足度をあげる買い物 x を求める問題は次のように定式化できる．

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\
\text{subject to} & \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq 50000 \\
 & x_i \text{ は } 0 \text{ か } 1,\ i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

このような問題は，一般にはナップサック問題とよばれ，効率の良いアルゴリズムが提案されている．

また，この問題は，x_i が 0 か 1 であるという，連続に変化できない離散的な変数であるということに注意しよう．そのため、この問題は，組み合せ最適化問題のひとつである。なお、本書では，連続的に変化できる数理計画問題を中心的に扱う。