第5章　双対問題

数理計画問題において，その問題の最適値がどれくらいになるか見積もることができると非常に便利である。特にその最適値がその値よりも小さくなることがないという下界値がわかれば、反復法においての終了条件として用いることができる。このような下界値を与えることができるのが双対問題である。元の問題が最小化問題であるとき、双対問題では最大化問題となる。また、元の問題の決定変数が n、制約の数が m のとき、双対問題では、それぞれ、m, n になる。このように元の問題と対称的な存在が双対問題である。

5.1　ラグランジュ双対問題

まず、双対問題とはどのような問題であるか説明する。ここで、次の問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{max} & \omega(z) \\ \text{subjectto} & z \in Z \end{array} \tag{5.1}$$

ここで、決定変数は z であり、この問題の実行可能領域は Z である。このとき、この問題 (5.1) が、数理計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in X \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, m \\ & g_j(x) \leq 0, j = 1, \cdots, r \end{array} \tag{5.2}$$

と関連して、以下の性質を持っているとする。

性質 (a) すべての点 $x \in X$, $z \in Z$ に対して，$\omega(z) \leq f(x)$ が成り立つ.

性質 (b) x^* が問題 (5.2) の最適解であり，z^* が最大化問題 (5.1) の解であるとき，$\omega(z) = f(x^*)$ が成り立つ.

もし性質 (b) が成り立ち、問題 (5.1) が問題 (5.2) よりも簡単であれば，問題 (5.1) を解くことによって、問題 (5.2) の最適値を得ることができるからである．また，例え性質 (b) が成り立たなくても、性質 (a) が成り立てば、問題 (5.2) の下界値 (最適値がこれ以上小さくならないという値) がわかることになる。この性質を利用すれば、問題 (5.1) の実行可能な近似解 $\bar{z}$ が見つければ, $f(x) - \omega(\bar{z})$ を計算することによって，現在の点 x がどれくらいよい問題 (5.2) の近似解か判別することもできる．この性質 (a) をもつ問題を**双対問題**と呼ぶ.

これまでに、数理計画問題 (5.2) に対して双対問題は数多く提案されているが、本書では，その中でも特に重要な __________ を扱い、その性質を解明する．ラグランジュ双対問題とは、決定変数が $(\lambda, \mu) \in R^{m+r}$ である次の最大化問題である。

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{max} & \omega(\lambda, \mu) \\ & \text{subjectto} & \mu \geq 0 \end{array}$$

ここで、$\omega : R^{m+r} \to R$ は、

$$\omega(\lambda,\mu) := \min_{x\in X} L(x,\lambda,\mu)$$

で定義される関数であり、$\min_{x\in X} L(x,\lambda,\mu)$ は、λ,μ が与えられたとき、決定変数が x である最小化問題

$$\begin{array}{ll} \min & L(x,\lambda,\mu) \\ \text{subjectto} & x\in X \end{array}$$

の最適値を返す関数である。[1] なお、$X=R^n$ のときは、$\min_{x\in X} L(x,\lambda,\mu)$ は制約なし最小化問題となる。また、関数 L は前章で定義したラグランジュ関数

$$L(x,\lambda,\mu) := f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$$

であることを思い出してもらいたい。なお、これより，特に断らない限り，ラグランジュ双対問題を双対問題と呼ぶことにする．

それでは、双対問題 (D) と数理計画問題 (5.2) の関係を見てみよう。そのために、まず問題 (5.2) を制約 $x\in X$ だけの最小化問題に変換する。問題 (5.2) に対して集合 $\mathcal{GH}$ を $\mathcal{GH} := \{x\in R^n \mid h(x)=0, g(x)\le 0\}$ と定義し、この集合に対して、関数 $\delta_{\mathcal{GH}} : R^n \to R$ を次のように定義する。

$$\delta_{\mathcal{GH}}(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathcal{GH}\text{のとき} \\ \infty & x\notin\mathcal{GH}\text{のとき} \end{cases}$$

この関数を用いて，関数 $\theta : R^n \to R$ を

$$\theta(x) = f(x) + \delta_{\mathcal{GH}}(x)$$

で定義する．そのとき，問題 (5.2) は，次の制約 $x\in X$ だけの最小化問題と等価である．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \min & \theta(x) \\ & \text{subjectto} & x\in X \end{array}$$

そこで以下では，問題 (5.2) のかわりに問題 (P) を考えることにする．

ここで，$\delta_{\mathcal{GH}}$ の具体的な計算式を与えてみよう．まず、不等式制約について考える。x が $g(x)\le 0$ であるとき 0 の値を返し，そうでない場合は ∞ となるような関数として，次の関数 $\delta_{\mathcal{G}} : R^n \to R$ を作ることができる．

$$\delta_{\mathcal{G}}(x) = \max_{\mu\ge 0} \mu^T g(x)$$

実際、$g_i(x) > 0$ となる i が存在すれば、$\mu_i \to \infty$ とすることによって、$\delta_{\mathcal{G}}(x)=\infty$ となる。一方，等式制約に対しても同様に、x が $h(x)=0$ であるとき 0 の値を返し，そうでない場合は ∞ となるような関数として，次の関数 $\delta_{\mathcal{H}} : R^n \to R$ を作ることができる．

$$\delta_{\mathcal{H}}(x) = \max_{\lambda\in R^m} \lambda^T h(x)$$

結局，この 2 つを足し合わせることによって、関数 $\delta_{\mathcal{GH}}$ を構成することができる。

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{GH}}(x) &= \delta_{\mathcal{G}}(x) + \delta_{\mathcal{H}}(x) \\ &= \max_{\mu\ge 0,\lambda\in R^m} \{\lambda^T h(x) + \mu^T g(x)\} \end{aligned}$$

[1] 実際はこの最小化問題が最小値を持たないこともあるので inf で定義する必要があるが、ここでは簡単のため、最小値を取るものとする。

よって，問題 (P) の目的関数 θ は，

$$
\begin{aligned}
\theta(x) &= \max_{\mu \geq 0, \lambda \in R^m} \{f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)\} \\
&= \max_{\mu \geq 0, \lambda \in R^m} L(x, \lambda, \mu) \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．このことから，問題 (P) は，ラグランジュ関数を μ, λ に対して最大化した関数の最小化問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max_{\mu \geq 0, \lambda \in R^m} L(x, \lambda, \mu) \\
\text{subjectto} & x \in X
\end{array}
$$

と考えることができる．ここで自然な発想として，最大化と最小化の順番を入れ替えても問題の性質が変わらないのではないかと思うかもしれない。そのような発想で生まれた問題がラグランジュ双対問題 (D) である。なおこれより、記号を簡単化するために、双対問題 (D) の決定変数を $z := (\lambda, \mu)$, 実行可能領域を $Z := \{(\lambda, \mu) \in R^{m+r} \mid \mu \geq 0\}$ として、

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \max & \omega(z) \\
& \text{subjectto} & z \in Z
\end{array}
$$

と表すことにする。

双対問題 (D) に対して、問題 (P) は __________ とよばれている．双対問題 (D) の"D"は Dual problem(双対問題) の D であり、主問題 (P) の"P"は Primal problem(主問題) の P である。これからは，双対問題の性質，特に性質 (a), (b) が成り立つ条件を調べることとする．

5.2 双対問題の性質

ここでは前節で定義した双対問題と主問題の関係および双対問題の性質を調べる。

まず、性質 (a) について調べてみよう。主問題 (P) の目的関数 θ の定義 (5.3) より，任意の $x \in X$ と $z \in Z$ に対して，

$$
L(x, z) \leq \theta(x)
$$

が成り立つ．この両辺を $x \in X$ に対して最小化すると，

$$
\omega(z) \leq \min_{x \in X} \theta(x)
$$

となる．さらに、z は任意であったから，

$$
\max_{z \in Z} \omega(z) \leq \min_{x \in X} \theta(x),
$$

が成り立つ。この不等式は性質 (a) が成りたつことを意味している．この性質は __________ と呼ばれている。

定理 1 (弱双対定理)

$$
\max_{z \in Z} \omega(z) \leq \min_{x \in X} \theta(x),
$$

弱双対定理は、それぞれの実行可能領域においては，主問題の目的関数値は双対問題の目的関数値よりも大きいこと意味している (図 5.1 参照)．そのため、それぞれの最適値の差、

$$
\eta := \min_{x \in X} \theta(x) - \max_{z \in Z} \omega(z)
$$

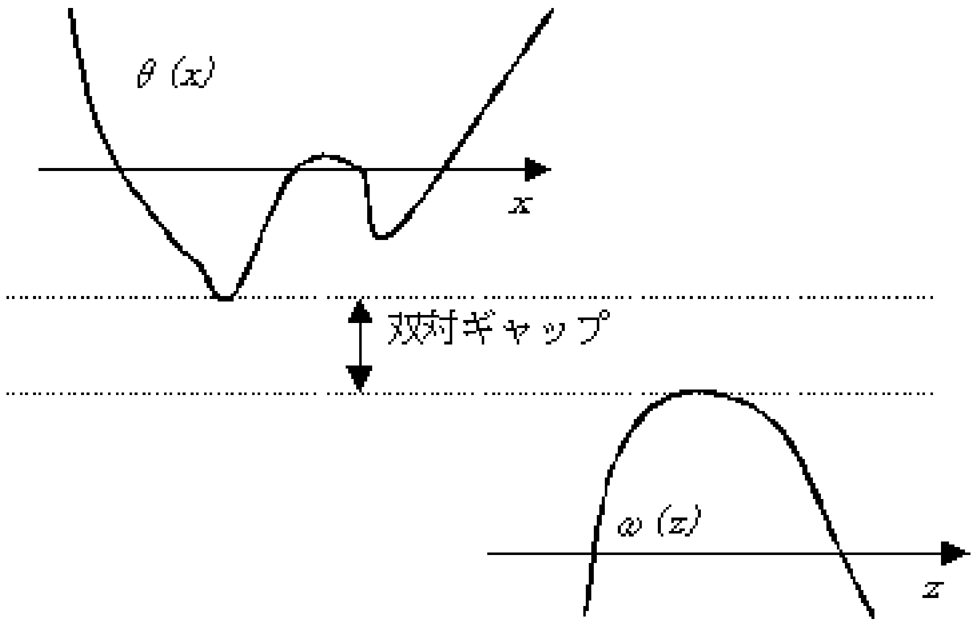

図 5.1: 弱双対定理のイメージ

は非負の値をとる．この値が 0 となる、すなわち性質 (b) が成り立てば，主問題のかわりに双対問題を解いても，主問題の最小値が得られることがわかる．(なお、最適値がわかっても最適解が得られているわけではないことに注意．) この η を ＿＿＿＿＿ と呼ぶ．

一般の数理計画問題では双対ギャップが正となることが多い．それでは，どのようなときに双対ギャップ η が 0 になるのであろうか？ここで、答えを前もっていうと、以下のようになる。

答え (i) 双対ギャップが 0 になることの必要十分条件は、ラグランジュ関数に ＿＿＿＿＿(下記参照) が存在することである。

ここで、点 $(\bar{x}, \bar{z}) \in X \times Z$ が任意の $x \in X$ と $z \in Z$ に対して，

$$L(\bar{x}, z) \leq L(\bar{x}, \bar{z}) \leq L(x, \bar{z}) \tag{5.4}$$

をみたすとき，$(\bar{x}, \bar{z})$ をラグランジュ関数 L の**鞍点**という．ラグランジュ関数の鞍点が存在性は、一般の f, g, h から容易には導けない。しかし、主問題が凸計画問題であるときには、以下のことが知られている。

答え (ii) 主問題が h がアフィン関数、g_i が凸関数、$X = R^n$ である凸計画問題とする。このとき、主問題の Karush-Kuhn-Tucker 点が存在することと、ラグランジュ関数の鞍点が存在することが等価である。

さらに、Karush-Kuhn-Tuchker 条件より、

答え f が凸関数、h がアフィン関数、$g_i, i = 1, \ldots, r$ が凸関数、$X = R^n$ であるとする。このとき、この凸計画問題に最適解が存在するとき、双対ギャップが 0 になる。

となる。

それでは，答え (i)、ラグランジュ関数 L に鞍点が存在することと，双対ギャップが 0 となることが等価であること示そう。

まず，$(\bar{x}, \bar{z})$ を L の鞍点としよう．そのとき，(5.4) より，

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{z}) &= \max_{z \in Z} L(\bar{x}, z) = \theta(\bar{x}) \\ L(\bar{x}, \bar{z}) &= \min_{x \in X} L(x, \bar{z}) = \omega(\bar{z}) \end{aligned}$$

であるから，

$$\min_{x \in X} \theta(x) \leq \theta(\bar{x}) = \omega(\bar{z}) \leq \max_{z \in Z} \omega(z)$$

となる．一方、弱双対定理 (定理 1) より

$$\min_{x \in X} \theta(x) \geq \max_{z \in Z} \omega(z)$$

であるので，

$$\min_{x \in X} \theta(x) = \max_{z \in Z} \omega(z)$$

つまり、双対ギャップが 0 になる。

次に逆を証明する．まず、

$$\max_{z \in Z} L(\bar{x}, z) \geq L(\bar{x}, \bar{z}) \geq \min_{x \in X} L(x, \bar{z})$$

が常に成り立つことに注意しよう。このとき、双対ギャップが 0 であることより、

$$\max_{z \in Z} L(\bar{x}, z) = L(\bar{x}, \bar{z}) = \min_{x \in X} L(x, \bar{z})$$

となる．これは，$(\bar{x}, \bar{z})$ が鞍点であることを示している．

それでは、次に答え (ii)、凸計画問題に対して、鞍点が存在することと、Karush-Kuhn-Tucker 点が存在することが等価であることを示そう．まず、$z \in Z$ であるとき、g_i が凸関数、h がアフィン関数であることより、ラグランジュ関数 L は x に対して凸関数となり、ラグランジュ関数を -1 倍した関数 $-L$ は z に対して凸関数になることに注意しよう。

このとき、ラグランジュ関数の $(\bar{x}, \bar{z}) \in R^n \times Z$ が鞍点とする。鞍点の定義より、以下のことが成り立つ。

- $\bar{x}$ は $\bar{z}$ を固定したラグランジュ関数の最小化問題 $\min_{x \in R^n} L(x, \bar{z})$ の最適解である。
- $\bar{z}$ は $\bar{x}$ を固定したラグランジュ関数の最小化問題 $\max_{z \in Z} L(\bar{x}, z)$ の最適解である。

ラグランジュ関数は x に関して凸関数であるので，$\min_{x \in R^n} L(x, \bar{z})$ は制約なし凸計画問題である。よって、その最適解 $\bar{x}$ は次の式を満たす。

(5.5) $$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{z}) = \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x})\bar{\mu} = 0$$

一方、最大化問題 $\max_{z\in Z} L(\bar{x}, z)$ は、最小化問題 $\min_{z\in Z} -L(\bar{x}, z)$ に等しい。この最小化問題は、実行可能領域 Z が凸集合で、$-L$ が z に対して凸関数であることから、凸計画問題である。よって、$\bar{z}$ は、この最小化問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす。

$$h(\bar{x}) = 0,\ \ \bar{\lambda} \geq 0,\ \ g(\bar{x}) \leq 0,\ \ \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0 \tag{5.6}$$

式 (5.5), (5.6) は，元の問題の Karush-Kuhrn-Tucker 条件に他ならない．

次に、$\bar{x}, \bar{z}$ が、Karush-Kuhn-Tucker 条件 (5.5), (5.6) を満たしているとする。このとき、先ほどの証明を逆にたどることによって、$\bar{x}, \bar{z}$ がラグランジュ関数の鞍点であることが導かれる．

ここで、Karush-Kuhn-Tucker 点が存在する条件を考えてみよう。今、この凸計画問題に最適解 x^* が存在するとする。さらに、この最適解 x^* において、一次独立の制約想定が成り立っているとする。このとき、(最適性の条件の授業において紹介した) 定理 6 より、Karush-Kuhn-Tucker 点が存在することがわかる。これをまとめると以下の定理を得る。

定理 2 ＿＿＿＿＿ 目的関数 $f : R^n \to R$ および制約関数 $g_i : R^n \to R, i = 1, \ldots, r$ は微分可能な凸関数とする．さらに h はアフィン関数とする．さらに $X = R^n$ とする。そのとき，この凸計画問題には最適解 x^* が存在し、さらにその最適解において $LICQ$ が成り立っていれば、双対ギャップは *0* になる。

この定理より、解が存在する凸計画問題に対しては、双対問題を解くことによって、元の凸計画問題の解を得ることが期待できる。この定理において、注意しなければならない点は、次の 2 点である。

- 元の問題に解が存在しないとき、双対問題はどうなるのか？
- 双対問題の最適解が求まったとき、元の問題の解は求まるのか？

まず、元の問題に解が存在しなかったときのことを考えよう。解が存在しないというのは、「目的関数の値をいくらでも小さくできる」か「実行可能点が存在しない」ことである。目的関数の値がいくらでも小さくできるときは、弱双対定理より、双対問題の最適値は存在しないことを意味している。つまり、任意の $z \in Z$ に対して関数値 $\omega(z) := \min_{x\in R^n} L(x, z)$ を与える x が存在しないことである。次に、元の問題に実行可能点が存在しなかったとしよう。このとき、ある固定した $\hat{x} \in R^n$ に対して、$\max_{z\in Z} L(x, z) = +\infty$ となる。そのため、双対問題の最適値は $+\infty$ となる、つまり、いくらでも双対問題の目的関数値は大きくすることができる。

次に、双対問題 (D) の最適解 $\bar{z}$ がわかっていたときのことを考えよう。このとき、$\bar{z}$ に固定した、ラグランジュ関数 L を x に関して制約なし最小化問題を解けば、その解は主問題の解になるであろうか？実は、そのような解でも、主問題の最適解とならない場合がある。これは，そのような最適解が必ずしも元の問題の実行可能解とは限らないからである．そこで $\bar{x}$ が主問題 (P) の実行可能解となる十分条件を，次の定理で与える．

定理 3 $\bar{z} \in Z$ を双対問題 *(D)* の最適解とし，双対ギャップは *0* とする。そのとき，

$$\min \quad L(x, \bar{z})$$

の最適解 $\bar{x}$ がさらに

$$h_i(\bar{x}) = 0,\ \ i = 1, \ldots, m,\ \ g_j(\bar{x}) \leq 0,\ \ \bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, j = 1, \ldots, r$$

を満足するならば，その $\bar{x}$ は主問題の最適解である．

証明． まず $\bar{z} \in Z$ より $\bar{\mu} \geq 0$ に注意しておく．仮定より $\bar{x}$ は主問題の実行可能解であり，さらに，

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{z}) \leq L(x, \bar{z}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \bar{\mu}_j g_j(x), \forall x \in R^n$$

が成り立つ．よって，実行可能な任意の x に対して，$\bar{\mu}_j g_j(x) \leq 0, j = 1, \cdots, r$ であるから $f(\bar{x}) \leq f(x)$ となる． □

これまでに、双対問題の利点として、その実行可能解 (最適解) が元の問題の下界値 (最適解) を与えることを主眼として説明してきた。次に、双対問題の解きやすさについて考えてみよう。双対問題の良い点は、

- 制約条件の次元 $m + r$ が双対問題の決定変数の次元になる。そのため、主問題の決定変数の次元 n よりも小さいとき、双対問題の方が小さい問題となる。
- 双対問題の制約領域 Z は非常に簡単な形をしているため、元の問題よりも扱いやすい。
- 双対問題は凸計画問題となる。

双対問題が凸計画問題になるというのは、制約領域 Z は明らかに凸集合であるので、最大化問題を最小化問題に変換したとき、その目的関数 $-\omega(z)$ が凸関数であることを示せばよい。ここで詳細は省略するが、実は、関数 f, g, h に関係なく、$-\omega$ は凸関数であることが知られている。そのため、双対問題はどのような主問題に対しても、凸計画問題となるのである。

上記にあげた利点より，双対問題は主問題よりも解きやすい場合がある．しかしながら，実際には ω の関数値を求めることは容易ではなく，また ω は微分不可能な関数になる場合が多いので，一般に主問題のかわりに双対問題を解くというアプローチは有効とはいえない．しかしながら，次に紹介する例のように，双対問題を考える方がよい場合がある．

5.3 双対問題の応用例

この節では，双対問題を考えるとよい問題や双対問題の応用例について紹介する．

5.3.1 線形計画問題

次の線形計画問題を考えよう。

[線形計画問題]

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{5.7}$$

ここで，c は n 次元ベクトル，A は $m \times n$ 行列，b は m 次元ベクトルである．

この問題のラグランジュ関数は、$f(x) = c^T x$, $h(x) = A^T x - b$, $g(x) = -x$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} L(x, z) &= c^T x + \lambda^T (Ax - b) - \mu^T x \\ &= x^T (c + A^T \lambda - \mu) - \lambda^T b \end{aligned}$$

となる。このとき、双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & \omega(z) := \min_{x\in R^n} L(x,z) \\ \text{subject to} & \mu \geq 0 \end{array}$$

となる。しかしこのままでは、目的関数に最小化問題が入っており、容易に扱うことができない。実は、線形計画問題の場合、目的関数 ω を簡単に書き下すことができるのである。ここで、ある $z = (\lambda, \mu)$ に対して、ベクトル $c + A^T\lambda - \mu$ のなかで、0 でない要素 $(x + A^T\lambda + \mu)_i$ があったとしよう。このとき、$t \in R$ に依存したベクトル $x(t)$ を、$x_i(t) = (c + A^T\lambda - \mu)_i t$ とし、$j \neq i$ である添え字 j に対して $x_j(t) = 0$ とする。このとき、

$$L(x(t), z) = (c + A^T\lambda - \mu)_i^2 t - \lambda^T b$$

となるので、$t \to -\infty$ とすることによって、ラグランジュ関数の値はいくらでも小さくできる。そのため、$\min_{x\in R^n} L(x,z) = -\infty$ となることがわかる。つまり、$c + A^T\lambda + \mu \neq 0$ である領域では、双対問題の目的関数値は $-\infty$ となり、その領域を考える必要がない。そこで、双対問題を $c + A^T\lambda + \mu = 0$ という領域でのみ考えることにする。このとき、その領域上ではラグランジュ関数は x に依存しない関数になるので、双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & -\lambda^T b \\ \text{subject to} & \mu \geq 0 \\ & c + A^T\lambda - \mu = 0 \end{array}$$

となる。ここで、$\bar{\lambda} := -\lambda$ という変数変換を行ない、さらに制約条件から μ を消去すると、この問題は

となる。この問題において、目的関数は線形で表されており、制約条件もアフィン関数によって表されていることに注意しよう。つまり、この問題もまた、線形計画問題となっているのである。線形計画問題 (5.7) に対して、上記の形で表された線形計画問題を線形計画問題に対する双対問題と呼ぶ。また、この双対問題を導いたやり方を踏襲することによって、双対問題の双対問題が元の線形計画問題 (5.7) になることが確認できる。

5.3.2　下界値の計算

双対問題は、性質 (a) により、元の問題の最適値がこれ以上小さくならないという下界値を与えることができる。また、性質 (b) が成り立つときには、元の問題と双対問題の実行可能解の双対ギャップを計算することによって、どれくらいよい解が得られているか推定することができる。この観点に沿って、双対問題の利用法として次の 2 つを紹介しよう。

- 反復法の終了条件

  反復法を実行するとき、いつ反復を終了するかは極めて重要な問題である。ここで、双対ギャップが 0 の数理計画問題を解くこととしよう。このとき、反復法によって、実行可能な点列 $\{x^k\}$ を生成し、それと同時に、双対問題に対しても反復法を適用して、双対問題の実行可能な点列 $\{z^k\}$ が生成する。双対ギャップが 0 になったとき問題の解が得られているので、適当な定数 $\varepsilon > 0$ を用いて、

$$f(x^k) - \omega(z^k) \leq \varepsilon$$

  を反復法の終了条件とすることができる。

- 分枝限定法の下界値計算

  組合せ最適化問題などのように、凸計画問題でない問題の厳密解を求めることは容易ではない．組合せ最適化問題の厳密解を求める手法としては，後ほど紹介する分枝限定法がある．その分枝限定法において重要となるのは，部分問題の下界値計算である．

  下界値の計算にはいろいろ方法があるが，まず制約条件を扱いやすい形に緩和することが考えられる．例えば，x_i が 0 か 1 のどちらかであるという 0-1 制約

$$x_i \in \{0, 1\}$$

  を満たした点は、次の線形な制約条件を満たした領域に含まれる。

$$0 \leq x_i \leq 1$$

  さらに、この制約条件は不等式制約として表すことができるため、数理計画問題としては扱いやすい制約となる。このため、この制約は元の 0-1 制約を緩和した制約として考えることができる。

  このように、複雑な制約を緩和した簡単な制約条件に入れ替えた緩和問題の最適解を求めれば，元の部分問題の下界値を求めることができる．しかしながら，分枝限定法において、下界値計算に多大な時間を要することは得策ではない．そこで，その緩和問題の双対問題を考え，その実行可能解の目的関数値を用いれば，弱双対定理より，下界値が簡単にもとまることが期待できる．

5.3.3 感度解析

数理計画問題の制約関数や目的関数が多少ずれたときに、そのずれた問題の最適値がどのように変わるかを調べることを感度解析と呼ぶ。この感度解析は、双対問題、特に双対問題の最適解と密接な関係がある。

一般の感度解析は複雑なため、ここでは、$f : R^n \to R$ および $g_i : R^n \to R, i = 1, \ldots, r$ が凸関数である次の不等式制約付き最小化問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subjectto} & g(x) \geq 0 \end{array} \tag{5.8}$$

不等式制約の関数 g が $u \in R^r$ だけずれた次の問題の最適値を $\phi(u)$ とする。

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subjectto} & g(x) + u \geq 0 \end{array}$$

このとき、元の問題 (5.8) の最適値は $\phi(0)$ となることに注意しよう。ここで、ずらした問題も凸計画問題であるので、適当な仮定の元で強双対定理が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \min_{x\in R^n}\max_{\mu\geq 0}(f(x)+\mu^T(g(x)+u))\\ &= \max_{\mu\geq 0}\min_{x\in R^n}(f(x)+\mu^T g(x)+\mu^T u)\\ &= \max_{\mu\geq 0}(\mu^T u+\min_{x\in R^n}(f(x)+\mu^T g(x)))\\ &\geq (\mu^*)^T u+\phi(0)\end{aligned}$$

となる。右辺の $\phi(0)$ を移項すると、

$$\phi(u)-\phi(0)\geq(\mu^*)^T u \tag{5.9}$$

を得る。ここで、ϕ が微分可能であると仮定する[2]．このとき、ベクトル $\nabla\phi(0)$ と任意のベクトル $d\in R^r$ との内積を考える。微分の定義と (5.9) より

$$\nabla\phi(0)^T d=\lim_{t\to 0}\frac{\phi(td)-\phi(0)}{t}\geq\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\mu^*)^T(td)}{t}=(\mu^*)^T d$$

が成り立つ。同様にして、

$$\nabla\phi(0)^T(-d)=\lim_{t\to 0}\frac{\phi(-td)-\phi(0)}{t}\geq\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\mu^*)^T(-td)}{t}=(\mu^*)^T(-d)$$

が成り立つ。つまり、

$$\nabla\phi(0)^T d\leq(\mu^*)^T d$$

である。以上の 2 つの不等式より、

$$\nabla\phi(0)^T d=(\mu^*)^T d$$

が任意の $d\in R^r$ で成り立つことになる。これは、

$$\nabla\phi(0)=\mu^*$$

であること、つまり、ϕ の 0 における勾配は双対問題の最適解 μ^* に等しいことを意味している。

それでは、$\nabla\phi(0)$ の利用方法を考えてみよう。今、ある数理計画問題を解いて、その最適解と双対問題の最適解を得ているとしよう。このとき、ある制約を少しだけずらして、よりよい最適値を得ようと考えている。(例えば、経済分野で利益の最大化を考えているとき、予算などの制約式のうち 1 つの制約を少しずらして、より利益をあげたいと思っているとする。) このとき、どの制約をずらしたら、よりよい最適値が得られるだろうか？それの回答を与えるのが、$\nabla\phi(0)=\mu^*$ である。今、ある制約 $g_j(x)\leq 0$ だけ 1(または -1) ずらし、他の制約はずらさないとする。これは、$u_j=1$ で $i\neq j$ である i に対しては $u_i=0$ である u だけ、不等式制約をずらすことになる。定義より、その問題の最適値は $\phi(u)$ となる。このとき、微分の定義より

$$\frac{\phi(u)-\phi(0)}{1}=\nabla\phi(0)^T u+o(1)=\mu_i^*+o(1)$$

となる。$o(1)$ が十分小さければ、この変換によって、目的関数値は μ_i^* だけ変化させることができる。つまり、一番大きく目的関数値を変化させることができる変化は、$|\mu_i^*|$ が一番大きくなる添え字 i を変化させることである。このように、不等式制約を 1 ずらせば目的関数値は μ^* 増える。このため μ^* を経済の分野では、その制約の潜在価格と呼んでいる。

[2] 最適解 x^* において、2 次の十分条件と狭義の相補性が成り立っているとき、ϕ は 0 において微分可能である。