第8章　線形計画問題

線形計画問題は凸計画問題である。そのため、凸計画問題に対する理論やアルゴリズムをそのまま適用できる。一方、線形計画問題は、数理計画法の中でも、古くから研究が進められ、理論的にいろいろなことが知られている。また、問題を解く上でも、大規模な問題が実用上速く解けることが知られている。この章では，線形計画問題の簡単な説明とその問題に定式化できる問題を見てみることにしよう.

8.1　線形制約の標準形

線形計画問題の制約条件は線形関数で表すことができる。様々な理論やアルゴリズムを適用するとき、その表現方法が違っていれば、それらをどのように適用したらよいか考えなければならない。ここでは、線形関数で表された制約条件が、どのような形であっても、標準形と呼ばれる形に定式化できることを見る.

線形計画問題は、n 次元ベクトル c, $m \times n$ 行列 A, m 次元ベクトル b が与えられているとき，以下のように定式化できる.

[線形計画問題]

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

この形で表された、制約を標準形の制約と呼ぶ。

行列 A の i 行目の行ベクトルを a_i^T とすると、標準形の制約は

$$h_i(x) = a_i^T x - b_i, i = 1, \ldots, m, \quad g_i(x) = -x_i, i = 1, \ldots, n$$

と定義した関数 h, g によって、$h(x) = 0, g(x) \leq 0$ と記述できる。

逆に h, g がアフィン関数で与えらている制約条件 $h(x) = 0, g(x) \leq 0$ は、標準形の制約に変形することができる。そのことを見るために、より一般的に記述された次の制約を考えよう。

$$A^1 x + b^1 = 0 \tag{8.1}$$

$$A^2 x + b^2 \leq 0 \tag{8.2}$$

$$A^3 x + b^3 \geq 0 \tag{8.3}$$

$$x_N \leq 0 \tag{8.4}$$

$$x_P \geq 0 \tag{8.5}$$

ここで制約 (8.1) は等式制約で、その他は不等式制約である。また、添え字集合 $N, P \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ が与えられているとき、x_N, x_P をその添え字に対応した成分を持つベクトルである。ここで、制

約 (8.4) と (8.5) の N と P には共通の要素がないとする。もしそのような要素 i が存在すれば、それは $x_i = 0$ を意味するので、問題から消去することができる。

これら一般的な制約 (8.1)-(8.5) に対して、次の操作をすることによって標準形の制約に変換することができる。

操作 1 次の変数変換を行なう。

$$x'_i = \begin{cases} -x_i & i \in N \\ x_i & i \notin N \end{cases}$$

この変換によって、(8.4) と (8.5) は、

$$x'_{N \cup P} \geq 0$$

となる。

操作 2 制約 (8.2) の両辺に -1 をかける。その結果、(8.2) と (8.3) は、

$$A^4 x' + b^4 \geq 0 \tag{8.6}$$

という形に変形できる。

操作 3 制約 (8.6) の不等式の数 (b^4 の次元) の次元のベクトル y を用意し、制約 (8.6) を

$$A^4 x' + b^4 - y = 0, \quad y \geq 0$$

とする。このような人為的に加えた変数 y をスラック変数と呼ぶ。

操作 4 $i \notin P \cup N$ である決定変数 x_i には非負条件 $x_i \geq 0$ がない。そこで、そのような決定変数は、

$$x'_i = x_i^+ - x_i^-, x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$$

となる 2 つの変数 x_i^+, x_i^- に置き換える。

この操作の結果、一般の線形制約は標準形の制約と変換できた．もちろん，目的関数は x を用いて表されているので、目的関数においても決定変数を変換してやる必要がある。具体的には、

$$x_i = \begin{cases} x'_i & i \in P \\ -x'_i & i \in N \\ x_i^+ - x_i^- & i \notin P \cup N \end{cases}$$

を代入する。

線形計画問題や 2 次計画問題を標準形に変換することがどうしても必要というわけではない。しかしながら、このような共通の記述をしてやることによって、様々な本や論文に書かれた内容の対応付けが容易になる。また、後の章で紹介する線形計画問題の解法のひとつであるシンプレックス法では、標準形で書かれた制約条件を上手につかうことによって、最適解を求める。

section 線形計画問題の応用問題線形計画問題は、理論的に良い性質を持っているだけでなく、シンプレックス法や内点法などにより、大規模な問題が実用時間で解くことができる。このため、数理計画法の中では、最も成功した問題であると言っても過言ではない。一方、線形計画問題は、2 次計画問題や凸計画問題に含まれる問題であるため、応用範囲がそれらの問題に比べて狭いように思われる。しかしながら、いくつかの変換技術を用いることによって、数多くの問題がこの問題に変換できることがわかる。

8.1.1 線形計画問題への変換技術

ここでは、実用上よく現れる関数を用いた数理計画問題を等価な線形計画問題へ変換する技術を紹介する。なお、等価な変換とは、変換する問題と解集合が同じになるように変換することを言う。

絶対値関数： 目的関数 f が絶対値を用いて $f(x) = |c^T x|$ で与えられている次の問題を考えよう。なお、制約は線形制約であり前節で説明した方法で、あらかじめ標準形の制約に変換されているとする。

$$\begin{array}{ll} \min & |c^T x| \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

まず、この問題の目的関数を線形な関数に変換するために、人為的な決定変数 $t \in R$ を用意し、問題を以下のように変換する。

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & |c^T x| \leq t \end{array}$$

この問題は明らかにもとの問題と等価である。実際、この問題の最適解 (x^*, t^*) では, $|c^T x^*| = t^*$ となるので、x^* は元の問題の最適解となる。一方、元の問題の最適解 x^* に対して、$t^* = |c^T x^*|$ とすると、この (x^*, t^*) はこの問題の最適解となる。

この変換では絶対値関数が制約条件に移っただけである。制約 $|c^T x| \leq t$ を線形制約に変換するには、絶対値の定義より、制約 $|c^T x| \leq t$ が

$$-t \leq c^T x \leq t$$

と等価であることを用いればよい。以上より絶対値関数が目的関数に入った問題は、

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & -t \leq c^T x \leq t \end{array}$$

という線形計画問題に変換できる。なお、標準形に変形するためには、さらに前節で説明した手法を用いる必要がある。

max **関数：** 目的関数 f が $f(x) = \max\{c^T x, d^T x\}$ で与えられた次の問題を考えよう。ここで、$d \in R^n$ である。

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{c^T x, d^T x\} \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

このとき、絶対値関数の変換と同様に、人為的な決定変数 $t \in R$ を用いて、等価な次の問題

に変形できる。

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & \max\{c^T x, d^T x\} \quad \leq t \end{array}$$

さらに絶対値関数の定義より、制約 $\max\{c^T x, d^T x\} \leq t$ は、

$$c^T x \leq t, \ \ d^T x \leq t$$

と等価であることを用いると、この問題は等価な線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & c^T x \leq t, \ \ d^T x \leq t \end{array}$$

に変形できる。

1 次元の単調増加な関数と線形関数の合成関数： p を R から R への単調増加な関数とする。このとき、目的関数が $p(c^T x)$ で表された問題は、目的関数を $c^T x$ としても等価に変換される。例えば、目的関数 $f(x) = e^{c^T x}$ は、$c^T x$ としても、問題の解集合は変わらない。

8.1.2　ポストの配置問題の変換

ここでは、線形計画問題に変換できる具体例として、1 章で紹介したポストの配置問題を取り上げる。ポストの配置問題では、ポストを設置する基準として，次の 2 つを考えていた。

(a) すべての家からの距離の和が最小になる位置 (村人全体として歩く距離の最小化)

(b) 最も遠くなる人の距離が最小となる位置

それぞれの基準に対して、問題は、

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{7} \|x - a^i\| \\ \text{subject to} & x \in X \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \max_i\{\|x - a^i\|\} \\ \text{subject to} & x \in X \end{array}$$

と定式化されていた。ここで、a^i はポストを利用する家の座標であり、X がポストの配置できる場所の制限であった。ここで、X は線形制約で表された領域、つまり、$X = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ とする。また、ノルム $\|\cdot\|$ は $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ で表されているとする[1]．このとき、それぞれの問題は、前の節で説明した方法を用いることにより、以下の等価な線形計画問題に変換できる。なお、前の節では人為変数を t だけとっていたが、ここでは、ポストを利用する家の数の 2 倍だけ用意する (絶対値関数がそれだけある)。

[1] このとき距離 $\|x - a^i\|$ は、マンハッタン距離 (碁盤目の道路を通ったときの距離) になっている。

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{7}(t_{1,i}+t_{2,i}) \\ \text{subject to} & x \in X \\ & -t_{1,i} \le x_1 - a_1^i \le t_{1,i} \quad i=1,\ldots,7 \\ & -t_{2,j} \le x_2 - a_2^j \le t_{2,j} \quad j=1,\ldots,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{subject to} & x \in X \\ & -t_{1,i} \le x_1 - a_1^i \le t_{1,i} \quad i=1,\ldots,7 \\ & -t_{2,j} \le x_2 - a_2^j \le t_{2,j} \quad j=1,\ldots,7 \\ & t_{1,i}+t_{2,i} \le t \quad i=1,\ldots,7 \end{array}$$

8.2　多面体集合と最適解の関係

ここでは、線形計画問題と 2 次計画問題の解の性質を知る上で重要となる、制約集合と解との関係を見ることにしよう。

ここでは、標準形に直される前の一般の線形制約を考えてみよう.

$$Ex = d, Bx \ge a$$

この制約を満たす集合は多面体集合と呼ばれる。ここで、行列 E の Rank を r とする。このとき、等式制約 $Ex = d$ は、ガウスの消去法を用いることによって、r 個の変数をその他の変数で表す等価な式に変形できる。その関係を不等式制約に代入すれば、結局、多面体集合は不等式制約のみであらわすことができる。そこで、これからは、多面体集合が

$$b_i^T x - a_i \le 0, \quad i = 1,\ldots,r$$

で表されているとしよう。このとき、2 次元上の多面体集合とは図 8.1 のようになる。

このとき，これらが表す領域は図のようになり，直線で囲まれた領域になる．(曲面が使われていないということ)．また、この領域はいくつかの角にある点によって結ばれた、平面や直線の集合と見ることもできる。この角にある点を多面体集合の端点と呼ぶ。ここで端点を、数学的に定義する。$\{b_i\}$ は 1 次独立である n 個の線形な等式

$$b_i^T x - a_i = 0$$

の解を端点と呼ぶ。なお、このように定義された端点では、必ずしも他の制約を満たしている必要はなく、実行不可能な端点も存在することに注意しよう。

それでは、制約集合が多面体集合として与えられている線形計画問題や 2 次計画問題の解が多面体上のどの位置にくるか調べてみよう。

線形計画問題線形計画問題の目的関数 $c^T x$ の等高線は、超平面となる (図 8.2)。図 8.2 をみると、$c^T x$ の等高線が直線で表されていることがわかる。この直線は、直線上のある点の関数値を α とすると、$c^T x = \alpha$ で表されている。この直線は、ベクトル c と直交することがわかる。(このことは、$\nabla(c^T x) = c$ であることからもわかる。) この線形計画問題の最適解は、図よりあきらかなように、多面体の端点であることがわかる。このことは、一般の線形計画問題にも成り立つ。つまり、

> 線形計画問題の解は、多面体で表された制約の端点で達成される。

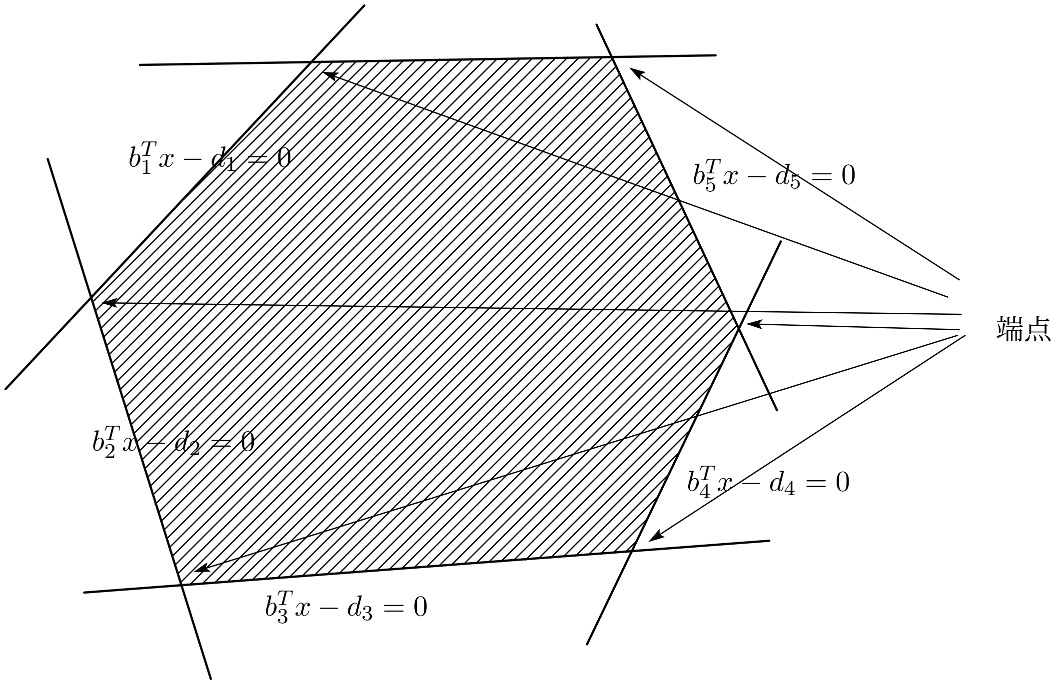

図 8.1: 多面体集合

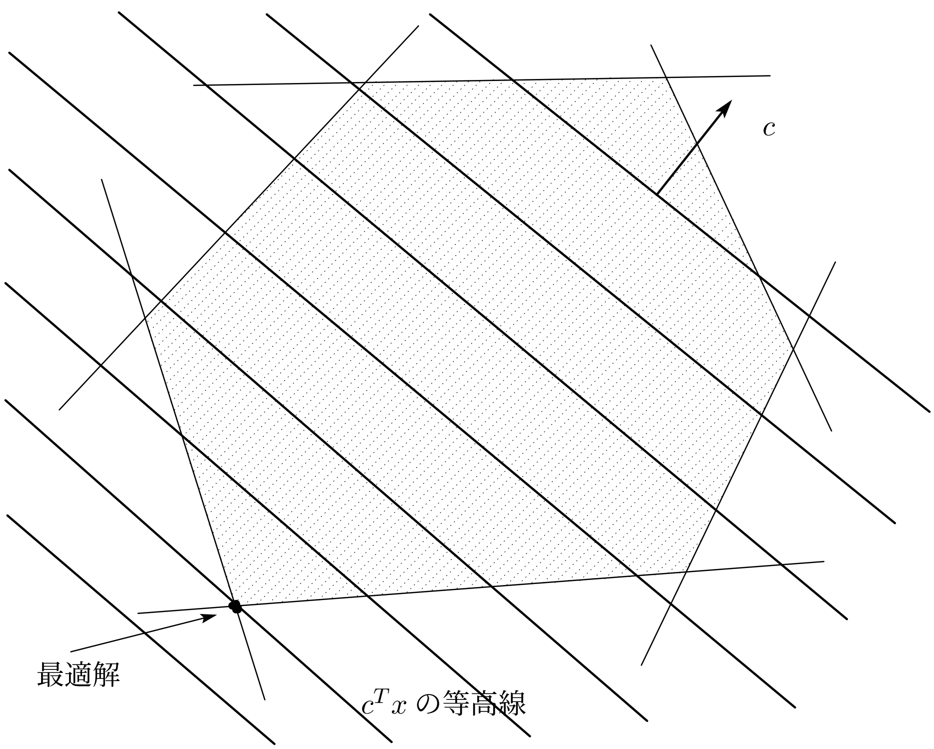

図 8.2: 線形計画問題の解と端点